配水ネットワークの圧力制御計画に関する基礎的考察

（指導教官　西川禕一教授）京都大学大学院　工学研究科修士課程電気工学専攻　現在　中部電力㈱　小川　覚

配水管網における均圧配水制御，すなわち管網各部の圧力を望ましい範囲内に保つようにする制御は，水の安定供給，漏水や無駄水の削減，管網破損の防止等のために必要であり，またきわめて有効な方策である [1]．ところで管網内の圧力（水頭）は水源水位と需要量の変動に依存して大きく変化するため，ポンプやバルブを用いてその調節・制御が行なわれている．

本論文ではこのような配水制御に関する２つの問題について基礎的考察を行なっている．その１つは静的均圧配水制御計画問題であり，与えられた配水池水位と需要量のもとで，管網内の圧力を一定の範囲内に保つようなポンプおよびバルブの設置箇所と操作量を同時に決定する改良された手法を提案する．本方法によれば，重みパラメータの導入によって，ポンプやバルブを設置できない枝が存在する場合にも対処することができる．

他の１つは動的圧力制御計画問題であり，配水池水位と需要量の日間の時間変化を考慮して，動的な最適制御法について論じる．これは配水池運用をも含む問題ということができる．

さて，配水管網は電気抵抗回路網に対応させて考えることができる．すなわち水頭を電圧に，流量を電流にそれぞれ対応させ，さらに配水池とポンプを電圧源，バルブを定電圧負荷，需要量を定電流負荷，パイプを抵抗としてとり扱えばよい．このようにしたとき，キルヒホフの電圧則に対応するのが水頭閉合条件，同電流則に対応するのが流量保存則である．ただしパイプの粘性抵抗による水頭損失は流量の1.85乗に比例するという性質があるため，圧力制御計画問題は非線形最適化問題となる．

1.　静的均圧配水計画問題

まず，制御点，すなわちポンプあるいはバルブがすべての枝に存在すると考え，枝 j までのそれらによる圧力ギャップを x_j，流量を q_j とする．このとき，ポンプ運転コスト（電力コスト）を最小化する均圧配水計画問題（P1）は，次のように定式化される．

$$(\text{P1})\quad \min_{x,q} f(x,q) \triangleq 1/2\sum_j (q_j x_j + |q_j x_j|) + w_j|x_j|$$
$$\text{subject to } g(x,q)\leq 0$$

ここで $x\triangleq[x_j]$，qはすべてのq_jを表わすに必要十分な流量変数のベクトルであり，ベクトル関数gによって表わされる制約条件は水頭閉合条件，流量保存則および圧力制約条件を含むものである．また，w_jは枝jのポンプまたはバルブについての重み係数であり，それらの作動を許す枝では$w_j=0$とし，禁止する枝では適当に大きな値を与える．$q_jx_j<0$のときはx_jはバルブに対応するので，電力コストはかからない．

（P1）はxとqを決定変数とする非線形計画問題であるが，xを$x=x^+-x^-(x^+\geq 0, x^-\geq 0)$で表わせば，$f$と$g$は非負変数$x^+$および$x^-$について線形，$q$について非線形関数となる．ここで，ある固定された$q$に対して次の$z(q)$を求める問題（P2）を考える．

$$(\text{P2})\quad z(q)\triangleq \min_x f(x;q)$$
$$\text{subject to } g(x;q)\leq 0$$

任意の$q=q^{(k)}$に対して$z(q^{(k)})$を求める問題（P2）は，x^+とx^-を決定変数とする線形計画（ＬＰ）問題となっている．また，その解に付随して得られるシンプレックス乗数を用いれば，$z(q)$の$q=q^{(k)}$における勾配（正確には劣勾配）$\nabla z(q^{(k)})$が求まる．以上のことから，適当な$q=q^{(0)}$を初期点とし，（P2）の求解と，qを

$$q^{(k+1)}\leftarrow q^{(k)}-\theta\nabla z(q^{(k)}),\quad \theta>0 \qquad (1)$$

のように負勾配方向へ変更する手続きを反復することによって，すなわち基本的にはＬＰを繰り返し解くことによって，（P1）の最適解が求まる．

しかし，もともと（P1）の目的関数fが$q_jx_j=0$の空間を境にしてその形を大きく変えるため，その空間（以下，これをＶ字谷空間とよぶ）で勾配$\nabla z(q)$が不連続となる．したがって，反復降下の途中でＶ字谷空間に遭遇すると，その両側で勾配の向きが互いに対向するために降下がしばしば停止する．この難点を克服するために，すでにＶ字谷探索法が提案されている [1,2]．これは，Ｖ字谷との遭遇によって(1)式による降下が不可能となった場合に，Ｖ字谷空間を推定し，それに沿った方向に$q^{(k)}$を修正する解法である．

本論文では，このV字谷探索法をより完全なものにするとともに，さらに以下の2つの解法を提案する．

(a) 外接平面近似法　$z(q)$が凸関数であれば，任意のqおよび$q^{(k)}$に対して，

$$z(q)\geq z^P(q,q^{(k)})\triangleq z(q^{(k)})+\nabla z(q^{(k)})^T(q-q^{(k)})$$

が成立する．ただし，添字Tは転置を表わす．そこで，いくつかの$q^{(k)}(i=0,\cdots,K)$をとって，$z=z(q)$なる曲面を外接平面群$z^P(q,q^{(k)})$で近似する．このようにすれば（P1）は，

$$(\text{P}3)\quad \min_q z(q) \quad \text{subject to } z(q)\geq z^P(q,q^{(k)})\quad (k=0,\cdots,K)$$

なるＬＰ問題に置き換えて解くことができる．以上を基本とし，適当な初期点$q^{(0)}$から出発して（P2）と（P3）を交互に解くことによって，すなわち，やはりＬＰの求解を反復することによって，（P1）の最適解を求めることができる．（P1）の真の最適値との誤差の上限値は，（P3）の最適解を$z^{(k)*}$とすれば，

$$\min_{k=0,\cdots,K}\left[z(q^{(k)})-z^{(k)*}\right]$$

で与えられるので，収束の判定が明確に行なえる．

(b) 解の囲い込み法　解の囲い込み法とは楕円体法に類似した解法である．ただし，最適解の存在範囲を凸多面体によって限定する．すなわち，$z(q)$が凸関数であれば，任意の点$q^{(k)}$を通る等コスト曲面$z(q)=z(q^{(k)})=$ const. の接平面のどちら側に真の最適点q^*があるのかを判別できる．したがって，多くの$q^{(k)}(k=0,\cdots,K)$をとれば，次のようにq^*の存在範囲を限定できる．

$$q^*\in\{q\mid\nabla z(q^{(k)})^T(q-q^{(k)})\leq 0,\ k=0,\cdots,K\}$$

解の囲い込み法は以上を基本として，やはりＬＰ問題の反復求解による解法である．

計算例として，節点数30，枝数40程度の2つの管網に対して，上記の3種の解法を適用した．詳細は数値については割愛するが，現在の問題は凸問題ではないにもかかわらず，いずれの解法によってもほぼ満足すべき解が得られることが確かめられた．どの解法もＬＰ問題の求解を反復するものであるから，大規模システムに対する適用性が高い．また反復途中で得られる解はすべて実行可能解であるのも，3つの解法に共通した長所である．

それぞれの解法の特徴は次のように要約される．V字谷探索法は問題の非凸性に強く，V字谷空間の推定に配水管網に普遍的な制約条件だけを用いるので，配水管網における種々の最適化問題，たとえば設備コストや漏水コストを含めた問題に適用できる．外接平面近似法は収束判定が容易かつ明確である．しかし，問題の非凸性には弱いので，最適点近傍の凸領域に限定するなどの工夫を要する．解の囲い込み法は問題の非凸性に比較的強く，収束判定もほぼ明確である．解の存在領域をいかに速く収縮させるかが焦点である．本論文では各解法を単独で適用したが，それぞれの長所を組み合わせることによって，より優れた求解法を構成できる可能性がある．

2.　動的圧力制御計画問題

最近，水道の広域運用が指向され，それにともなって新たに広域水道の受水を開始する自治体がふえている．そこでは自己水源のみによる従来の配水池運用とはまったく異なった考え方が必要とされ，配水池運用についての基本的な指針の確立が急務となっている．このような実際的要請をふまえて，ここでは配水池水位と需要量の時間変化を考慮し，1日全体として最適となるようなポンプとバルブの操作量を決定する問題につき考察する．

従来，このような問題における解の基本的性質は，あまり明らかにされていない．ここでは，広域水道から常に一定量の浄水を受水する1個の配水池とポンプ圧送の1個の自己水源から，2つの需要端（実際には地区）へ供給するモデルを設定する．そして，動的計画法を用いたポンプ運転コストおよび漏水コストを最小化する数値解法を提案する．そして実際問題に適用し，制御の評価規範と制御方策の関連について，実際的な立場からの検討を加えた．その結果明らかになった主な点は，以下のようである．

評価規範として，ポンプ運転コストのみを考えたときは，配水池を電気回路網におけるコンデンサとして用いる運用法，すなわち軽負荷時に貯水し，重負荷時に放水するのが最適である．また，いくつかのポンプやバルブを使用したほうが全体のコストは減少する．一方，漏水コストも考慮すると，有効水頭をほぼ下限値に拘束するような制御が最適となり，均圧制御の必要性が再確認された．検討したモデルはきわめて小形のものであるが，実際規模の問題に対しても十分有意義な制御・運用法の基本的特徴を明らかにし得たと考えられる．

この研究は筆者が修士課程在学中に行なわれたものであり，終始ご懇篤なご指導，ご鞭撻を賜った西川禕一教授ならびに宇土顕彦助手に対し，深甚の謝意を表します．

参　考　文　献

［1］ Y. Nishikawa and A. Udo : Uniform Pressure Control in Water Distribution Networks Including Location of Control Points, Analysis and Optimization of Systems, pp.656-669, Springer-Verlag (1982)

［2］ 杉原　進：制御点の位置決定を含む均圧配水制御問題の解法，京都大学大学院工学研究科昭和56年度修士論文（1982）