四色問題よもやま話

竹中 淑子

1. 四色問題の解決

四色問題が解かれて久しい.「平面上のどんな地図も四色で色分けできる」という四色予想は「$x^n+y^n=z^n$ $(n\geqq3)$に自明でない正の整数解はない」というフェルマーの大予想と並んで，素人うけのする未解決の難問として有名であった．しかしこの四色予想は1976年にイリノイ大学のアペル(K. Appel)とハーケン(W. Haken)により肯定的に解決したのはご承知のとおりである．

平面上のすべての地図は2000種類ほどの標準地図に還元できること，そしてそれらの標準地図がどれも四色で色分け可能であることを電子計算機で1つ1つ検証するというやり方であった．

これより以前，四色問題が解かれたといううわさや反例が見つかったという話はあちこちでたびたびあった．もしこれらの誤った証明や，色分けしそこねた地図を集めたとすれば，まったくナンセンスなものは除いても，数メートルあるいはそれ以上に達しただろう．2007年までに解決した人に賞金がでることになっているフェルマーの大予想のほうは，ゲッチンゲンの数学教室に積み重ねられた論文がすでに3メートルにも達しているということである．また四色問題がいかに素人うけしていたかは，四色問題の反例が四月バカとしてアメリカの雑誌に登場したりしたことや，ある大家が，素人による四色問題の解決の誤りの型を分類したものを作ったなどという話からも知ることができる．

2. 私たちのまわりで

当時をふり返ってみると，私たちのまわりにもこれに似たようなことがあった．

私が四色問題の証明といわれるものをはじめて目にしたのは，阪大基礎工学部の数理教室にいたときであった．院生，助手の間におそらくはナンセンスなものだったのだろうが，証明とおぼしきものがまわってきた．ただその頃は興味がなく，よく見もしないで次にまわした．そういうことが2，3度あった．グラフ理論の勉強を始めたのは慶大工学部管理工学科に移ってからであった．ベルジュ(C. Berge)の「グラフ理論とその応用」の英訳やオアー(O. Ore)の「四色問題」を読んだのもこの頃であった．

そんなころ，数理工学科の3年生S君が，証明を私たちの研究室にもちこんできた．証明は10ページほどの短いもので，ヒーウッド(P. J. Heawood)の五色定理に用いられた手法を使って四色問題を証明しようというものであった．S君が一夏考え続けたというその証明を私たちは聞かされたのであったが，誤りを指摘できないでいた．ところが次の日，当のS君がみずから誤りを見つけ，あえなくけりがついたのであった．

またこれに前後して，東大，数学科の大学院生

たけなか よしこ 慶応義塾大学 経済学部

からこんな話もきいた．数学科の教授数人が熱心に討論しているので何ごとかと思ったら，四色問題の証明がもちこまれていた．化学関係の人の書いたその証明は本格的なもので，ある1人の教授が誤りを指摘してけりがつくまでかなりの時間がかかったということであった．

しかしさすがに1976年8月以降は，解けた，反例が見つかったという話は聞かなくなった．

3. グラフのブール代数表現

四色問題については私も素人の域を出ない．グラフ理論をやっていれば四色問題は多かれ少なかれ関係があるだろうという程度のかかわりあいである．

私の興味は，グラフのブール代数表現にある．グラフ理論の勉強を始めたとき，用語の多さ，不完全さにとまどったが，もっと簡潔にこれらを表現できないかと思ったことから始まった．ブール代数，ブール方程式（不等式），準ブール方程式（不等式），ブール行列などを使って，ベルジュの本の大部分を書き直す(表現しなおす)とおもしろいと思った．グラフのブール表現とは次のようなものである．

3.1 グラフの接続行列

グラフを $G=(N,\Gamma)$ で表わす．N は点（頂点）i の集合，Γ は線(i,j)の集合，すなわち i を始点 j を終点とする弧(i,j)の集合とする．

$G=(N,\Gamma)$ の接続行列（頂点行列ともいう）を $A=(a_{ij})$で表わす．

$$a_{ij}=\begin{cases}1:(i,j)\in\Gamma \text{ のとき}\\ 0:(i,j)\notin\Gamma \text{ のとき}\end{cases} \quad (1)$$

である．グラフ G が n 個の点より成ると，A は $n\times n$ 行列になり，$G=(N,\Gamma)$ が無向グラフなら A は対称行列となる．$G=(N,\Gamma)$ と A は1対1に対応する．

また $G=(N,\Gamma)$ において，N の部分集合 S に対し特性ベクトル(状態ベクトル）を $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$で定義する．ここに，

$$x_i=\begin{cases}1:i\in S\\ 0:i\notin S\end{cases} \quad (2)$$

である．

3.2 2要素ブール代数

グラフ G に対応して行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ が定義されたので，次のようないろいろな行列とベクトル間の演算が出てくることになる．

$$\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{x}_j,\ A\boldsymbol{x}_i,\ A+A,\ A\times A\cdots\cdots.$$

ここで，これらの演算を普通の演算でやらずにブール演算で行なうわけである．したがって線形代数の行列，ベクトルに関する命題は当然成立しないが，その代りブール行列やブール関数や準ブール関数の既存の命題が使えることになる．グラフの諸性質をこれらの A や $\boldsymbol{x}_i$ などを用いて表現し，つまりブール表現し，ブール代数の性質を使って何か結果を出そうというのである．

ここでいうブール代数とは，2要素ブール代数のことで，$B_2=\{0,1\}$に3つの演算，ブール和$\cup$，ブール積$\cap$，ブール否定$^-$が次の規則にしたがって行なわれるものである．すなわち，

$$\begin{aligned}&0\cup0=0, 0\cup1=1\cup0=1\cup1=1\\&0\cap0=0\cap1=1\cap0=0\quad 1\cap1=1\\&\bar{0}=1\quad \bar{1}=0\end{aligned} \quad (3)$$

3.3 ブール関数，準ブール関数

変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n(\in B_2)$に，演算$\cup$，$\cap$，$^-$をほどこして得られる式を $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ で表わし，ブール関数という．関数値は0または1である．

ブール関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$は和の形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\bigcup_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n} f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \quad (4)$$

に表わせる．ここに記号 $\bigcup_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n}$ は$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in B_2^n$ の 2^n 通りのすべてについて演算$\cup$を行なうことを意味する $x^0=\bar{x}$, $x^1=x$ である．また積の形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\prod_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}[f(\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n)\cup x_1^{\alpha_1}\cup\cdots\cup x_n^{\alpha_n}] \quad (5)$$

にも表わせる．

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n), g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$をブール関数とするとき,

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

をブール方程式という．$f=g$ は,

$$f\cdot\bar{g}\cup\bar{f}\cdot g=0$$

や,

$$f\cdot g\cup\bar{f}\bar{g}=0$$

ともかける．

0と1との2値を変数とする実数値関数を準ブール関数という．準ブール関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n} C_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1}, \cdots, x_n^{\alpha_n} \tag{6}$$

と表わせる．ここに $\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}$ は $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\in B_2^n$ に対する 2^n 個の値 $C_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ に関する総和で，係数 $C_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}$ は,

$$C_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}=f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

である．

3.4 グラフの彩色数

グラフ $G=(N, \Gamma)$において,

$$\Gamma_i=\{j\mid(i,j)\in\Gamma\}$$

と書くことにする．$A(\subset N)$ が内的安定集合であるとは,

$$A\cap\Gamma_i=\phi \tag{7}$$

なることである．Aが最大内的安定集合であるとは $A\subset A'(\subseteqq N)$なるいかなる A' も内的安定集合とはならないことである．

$G=(N, \Gamma)$ において，N の内的安定集合 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ をとり,

$$\begin{aligned} &C_i\cap C_j=\phi \quad i\neq j \\ &\bigcup_{i=1}^{m} C_i=N \end{aligned} \tag{8}$$

とできるとき，この m は G の彩色数 (chromatic number)となる．$C_1, C_2, \cdots, C_m$ を最小彩色分解という．すなわちグラフGの最小彩色分解は N をおおう最大内的安定集合の最小数である．

これをブール式で表現しよう．$S(\subset N)$ が内的安定集合であることは，S の特性ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$がブール方程式

$$\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j=0 \tag{9}$$

を満たすことと同値となる．なぜなら $\forall i, j\in S$ に対し $a_{ij}=1$ なら x_i, x_j の少なくも1つは0でなければならず，これは $a_{ij}x_ix_j=0$ と同値である．

$G=(N, \Gamma)$ において，すべての最大内的安定集合の組を $\mathscr{F}=\{M_1, M_2, \cdots, M_m\}$ で表わす．$(y_1, y_2, \cdots, y_m)$を $\mathscr{F}$ の特性ベクトル，すなわち,

$$y_i=\begin{cases}1: M_j\in\mathscr{F}\\ 0: M_j\notin\mathscr{F}\end{cases} \tag{10}$$

とおく．また,

$$C_{ij}=\begin{cases}1: i\in M_j \text{ のとき}\\ 0: i\notin M_j \text{ のとき}\end{cases} \tag{11}$$

とおく．

すると最大内的安定集合の組$\mathscr{F}$がNをおおうということは $i\in N$ が少なくも1つの$M_j\in\mathscr{F}$に含まれるなら $C_{i_1}y_1, C_{i_2}y_2, \cdots, C_{im}y_m$ のうち少なくも1つが1．よって,

$$\bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}y_j=1 \tag{12}$$

これがすべての i について成立するから,

$$\bigcap_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}y_j=1 \tag{13}$$

これが $\mathscr{F}$ の特性ベクトル $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ の満たすべき式である．

これを準ブール式で考えると，$C_{i_1}y_1, \cdots, C_{im}y_m$ のうち少なくも1つが1．よって $(1-C_{i_1}y_1), \cdots, (1-C_{im}y_m)$のうち少なくも1つが0．

$$\therefore \quad \prod_{j=1}^{m}(1-C_{ij}y_j)=0 \tag{14}$$

これがすべての i について成立するから,

$$\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}(1-C_{ij}y_j)=0 \tag{15}$$

が成立する．

したがってNのすべての要素を含む最大内的安定集合の最小数を求めるには(15)のもとで，$\sum_{i=1}^{m} y_i$ の最小値を求めればよい．一般に，準ブール関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を準ブール関数 $f_j(x_1, \cdots, x_n)=0(j=1, 2, \cdots, m)$のもとで最小にするには,

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) f(x_1, \cdots, x_n) + (S^+ - S^- + 1) \sum_{j=1}^{m} f_j(x_1, \cdots, x_n) \quad (16)$$

を最小にすればよい．ここに S^+, S^- は f の正係数，負係数の個数である．

このことより，準ブール関数

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \sum_{j=1}^{m} y_i + (m+1) \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (1 - C_{ij} y_j) \quad (17)$$

をとると，この関数の最小値が G の彩色数であり，そのときの $(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)$ を特性ベクトルとする $\mathscr{F}$ がグラフ G の最小彩色分解となる．

4. 四色問題は講義の恰好な材料

さてグラフをブール表現する話はこれぐらいにして，話を四色問題にもどそう．実は四色問題は一般教養科目の数学の恰好の講義材料となっている．

3，4年前より週1回だけ文学部の一般教養科目の数学の講義を担当している．この私の授業はちょっとした人気番組になっており毎年400人ほどの受講者がある．大きな階段教室でOHPを使って行なうこの授業は教師は弁士，学生は観客といった感がしないでもない．それで，経済学部の数学の講義のように微分積分と線形数学などというのは最初からあきらめている．毎回1つ数学上のトピックをとりあげ，それについて話をする．トピックスとしては数の歴史，幾何の歴史，方程式の歴史，ピラミッドの体積，π の計算法，数の体系，数学的帰納法，パラドックス，群，非ユークリッド幾何，時空四次元空間，集合，有限と無限，マルコフ連鎖…など．

文学部の数学の授業はとてもやりにくいということになっている．それは文学部の学生の数学のセンスや能力が他学部では考えられないほどバラエティーに富んでいるからであろう．学生の大多数は数学のスの字を聞いただけで気がめいるという人で，高校では卒業単位ぎりぎりだけの数学しか履習してこない．しかし本来は他学部を志望していたので数学はかなりやっているという学生，またごくまれにだが，高校時代は“かくれ理科系”と言われていたという理科系顔負けの学生も混っている．

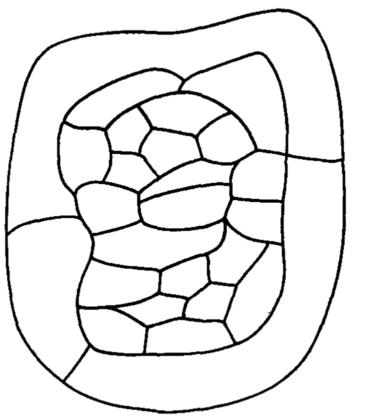


図 1　ヒーウッドの地図

こういう学生相手の授業の教材としては難易バラエティーに富んだ話ができるものが一番ありがたい．そのうえ四色問題は学生うけのする教材でもある．

まず，やさしいところでは，実際に地図を与えて色分けしてみようということである．国の数の少ない地図（しかしケンペの証明が不完全なことを示すべくヒーウッドの出した重要な地図である）図1などだと5分でできる．少し国の数の多いヒーウッドの反例とよばれる地図(図2)，あるいは前述の四月バカとして，ガードナー(M. Gardner)の与えた地図(図3)などは，色分けに手こずり，五色いるという学生が多い．

このように実際に与えられた地図を色分けするのは試行錯誤によるもので一種のパズルであるが，もう少し数学的にやることもできる．

4.1 ブール方程式を用いる方法

与えられた地図の国に番号 $i=1, 2, \cdots, n$ をつけ隣接している国を線で結ぶことにすると，地図に対応してグラフ $G=(N, \Gamma)$ ができる．a, b, c, d を4つの色とし，N の各点 i に対し2つの変数 x_i, y_i を次のように与える．

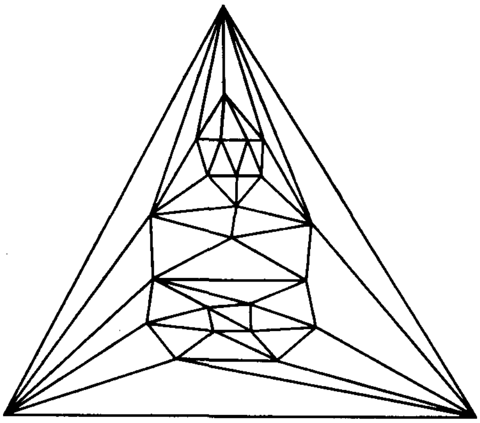


図 2 ヒーウッドの例

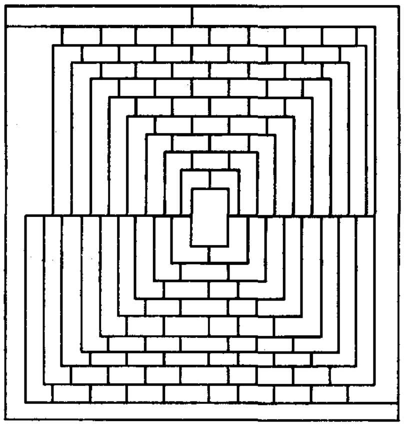


図 3 ガードナーの反例(四月バカ)

$$x_i=\begin{cases}1：点\ i\ が\ \mathrm{a}\ 色か\ \mathrm{b}\ 色のとき\\ 0：その他\end{cases} \tag{18}$$

$$y_i=\begin{cases}1：点\ i\ が\ \mathrm{a}\ 色か\ \mathrm{c}\ 色のとき\\ 0：その他\end{cases} \tag{19}$$

このとき,

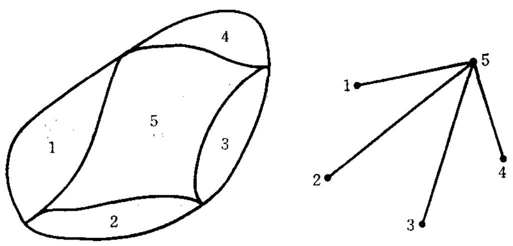
$$\begin{aligned}&点\ i\ が\ \mathrm{a}\ 色 \Leftrightarrow x_i y_i=1\\ &点\ i\ が\ \mathrm{b}\ 色 \Leftrightarrow x_i \bar{y}_i=1\\ &点\ i\ が\ \mathrm{c}\ 色 \Leftrightarrow \bar{x}_i y_i=1\\ &点\ i\ が\ \mathrm{d}\ 色 \Leftrightarrow \bar{x}_i \bar{y}_i=1\end{aligned} \tag{20}$$

となる. グラフ $G=(N,\Gamma)$ の接続行列を $A=(a_{ij})$ とする. 隣接した国は同色ではならないという条件より, ブール方程式

$$\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i y_i x_j y_j \cup x_i \bar{y}_i x_j \bar{y}_j \cup \bar{x}_i y_i \bar{x}_j y_j \cup \bar{x}_i \bar{y}_i \bar{x}_j \bar{y}_j)=0 \tag{21}$$

が成立しなければならない. この方程式の解を求めれば各点 i を何色にすべきかがわかる.

たとえば図4(i)のような地図についてはグラフ G は図4(ii)となり, 接続行列 A は,



(i) 5国地図　(ii) $G=(N,\Gamma)$

図 4

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix} \tag{22}$$

となる. この場合の(21)は,

$$\begin{aligned}&\{x_1y_1x_5y_5 \cup x_1\bar{y}_1x_5\bar{y}_5 \cup \bar{x}_1y_1\bar{x}_5y_5 \cup \bar{x}_1\bar{y}_1\bar{x}_5\bar{y}_5\}\\ &\cup\{x_2y_2x_5y_5 \cup x_2\bar{y}_2x_5\bar{y}_5 \cup \bar{x}_2y_2\bar{x}_5y_5 \cup \bar{x}_2\bar{y}_2\bar{x}_5\bar{y}_5\}\\ &\cup x_3y_3x_5y_5 \cup x_3\bar{y}_3x_5\bar{y}_5 \cup \bar{x}_3y_3\bar{x}_5y_5 \cup \bar{x}_3\bar{y}_3\bar{x}_5\bar{y}_5\}\\ &\cup\{x_4y_4x_5y_5 \cup x_4\bar{y}_4x_5\bar{y}_5 \cup \bar{x}_4y_4\bar{x}_5y_5 \cup \bar{x}_4\bar{y}_4\bar{x}_5\bar{y}_5\}\\ &=0\end{aligned} \tag{23}$$

となる.

4.2 ブール不等式を用いる方法

各点 i に $\{0,1,2,3\}$ の値を与え点を示す変数 t_i に対応させる. このとき満たすべき条件は弧により結ばれたすべての2つの点 i,j に対し,

$$t_i-t_j \neq 0$$

が成立することである. あるいはこれと同値な関係

$$t_i-t_j \geqq 1 \tag{24}$$

または,

$$t_j-t_i \geqq 1 \tag{25}$$

のいずれかが成立することである.

ここで,

$$t_k=t_k'+2t_k''$$

とおくと t_k', t_k'' は0または1をとる変数である. これを用いて(24), (25)を書き直すと,

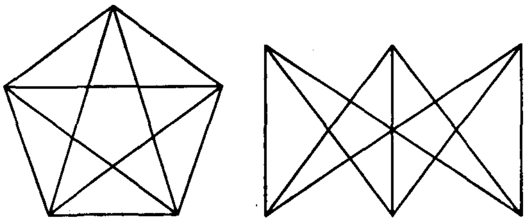


図 5　クラトフスキーのグラフ

$$t_i'+2t_i''-t_j'-2t_j''\geqq 1 \tag{26}$$

または,

$$t_j'+2t_j''-t_i'-2t_i''\geqq 1 \tag{27}$$

となる．これらの t_i', t_i'' を求めて各点 i の色を決定することもできる．

5.　生協の色エンピツが売切れた話

一昨年もこの講義でグラフ理論を3回にわたってとりあげた．まずグラフの平面性，つまりグラフがどの2辺も交わらないよう平面上に描ける性質について話をした．このためにはグラフがクラトフスキ (Kuratouski) の部分グラフ K_5 および K_{33} を部分グラフとして含まないことが必要十分条件であることまで説明した．次週は四色問題の話をしようと思い，学生に来週は地図の色分けをやるので各自，色エンピツをもってくるようにといって，その日の授業を終った．次の週この色エンピツを使って実際に地図の色分け競争をやったりして，けっこう楽しんだ．講義をおえて研究室に帰ると，すぐ生協の文房具係という人から電話がかかってきた．いわく，

「今日は大変迷惑をかけて申しわけなかった」

「…？」

「学生さんが昼休みに色えんぴつを買いに殺到しましたが，ストック全部はたいても足りませんでした」

なるほど，400人の学生の1割が行なっても40人になるなあーとやっと合点がいった次第．学生も色えんぴつぐらい家からもってくればいいものを….さらにいわく，

「学生さん，みんな6色のを買おうか，8色のを買おうか迷っていたようですよ．来年からはたくさん入れておきますが…」と．そこで6色のほうで結構，なんならバラ売りにしていただければなおありがたいのだけれどと言おうと思ったが，それは言わなかった．

6.　四食問題いまだ解決せず

またこんなこともある．よく専門は何ですかと質問をされる．一瞬日頃の怠慢が身をかすめるのだけれど，何か答えねばならないというわけで，グラフ理論です，四色問題などですということにしている．あるとき，大学の帰り，日吉の電車で経済学のK先生と乗り合わせた．そしてあなたの専門は何かという質問を受けることになった．いつものようにグラフ理論です，四色問題などですと答えた．

「ほう，四ショク問題？　それは何ですか」

「四色あれば十分で，五色とはいらないというあれです」

「え!! 四食いる？ 僕は一日三食ですよ．四食はいりません．昔から一日三食と決めています」

「!? それは私も一日三食です．一日四食したら肥ります．ですが，この四ショクというのは食事の食ではなく，色のほうなのですが…」

「なんだ，色のほうですか．そんならそうとはやく言ってくださいよ．色でしたか…….それにしても，三色で十分じゃあないですか？　昔から三原色というじゃあないですか．赤，緑，黄の三色で十分でしょう」

「いいえ，三原色は赤，青，黄じゃあなかったですか？」

「そうでしたかね．赤，緑，黄は信号機のほうでしたかね…」

「………」

そういっているうちに電車は渋谷に着いてしまった．K先生との四食問題は，それ以後解決に至っていない．

四色問題，たのしからずやである．