ネットワーク算法による組合せ最適化問題の効率的解法

（修士論文）

（指導教官　伊理正夫教授）　東京大学工学部計数工学科　今井　浩

1. はじめに

ORや工学の諸分野における離散システムを解析するのに,（ポリ）マトロイド,劣モジュラ関数の理論が有用であり，ここ10年ほどのあいだにさまざまな問題に対して応用されてきた[2]．一方，ネットワーク・フロー問題は，数理計画法の諸問題の中でも最も効率よく解ける問題であり，また，ネットワークのカット関数が劣モジュラ関数の代表的なものであることも知られている．しかし，この事実は算法的に十分には生かされていない．

本論文では，まず，ネットワークのカット関数に足切り（lower truncation）という変換をほどこして得られる劣モジュラ関数のクラスという新しい概念を導入し，それが算法的にネットワーク・フローの手法により扱えることを示す．それにもとづいて，この種の劣モジュラ関数の関連する組合せ最適化問題が，統一的に，かつ，効率よく解けることを示す．ここで導入する劣モジュラ関数のクラスは，実用上よく現われる（ポリ）マトロイド，劣モジュラ関数の多くを含んでおり，これにより，電気回路，リンク構造，多面体線画構造（一般に，内部自由度を有する工学システム[3]）に関する問題，またネットワークの容量修正問題などを効率よく解くことができる．ここでは，まず本論文の最も基本的な部分を概説し，以降の節で，本論文で提案した手法を具体的な問題に適用して得られた結果について述べる．

2. カット関数の足切りとネットワーク・フロー

有限集合 S に対して $\mathbf{R}^S$ ($\mathbf{R}_+^S$) で S 上の（非負の）実数ベクトル全体の集合を，2^S で S の部分集合全体を表わす．$u\in S$ に関する単位ベクトル $\chi_u\in\mathbf{R}^S$ を $\chi_u(u)=1$, $\chi_u(v)=0$ ($v\neq u$) により定める．

関数 $\mu: 2^S\to\mathbf{R}$ が任意の $X, Y\subseteq S$ に対して,

$$\mu(X)+\mu(Y)\geqq\mu(X\cup Y)+\mu(X\cap Y)$$

を満たすとき劣モジュラであるという．多面体 $\mathbf{P}(\mu)$ を

$$\mathbf{P}(\mu)=\{x\mid x\in\mathbf{R}^S,\ \textstyle\sum_{u\in X}x(u)\leqq\mu(X)\ (\phi\neq X\subseteq S)\}$$

で，μ に関する基本関数 $\mathrm{sat}(x)$, $\mathrm{dep}(x,u)$ ($x\in\mathbf{P}(\mu)$, $u\in\mathrm{sat}(x)$) を

$$\mathrm{sat}(x)=\{v\mid v\in S,\ \forall\delta>0: x+\delta\chi_v\notin\mathbf{P}(\mu)\},$$

$$\mathrm{dep}(x,u)=\{v\mid v\in S,\ \exists\delta>0: x+\delta_{\chi u}-\delta_{\chi v}\in\mathbf{P}(\mu)\}$$

で定める．基本関数が効率よく計算できるなら，μ に関する独立流れ問題[1]を実際的に解くことができる．

ネットワーク $N=(V,A,c;S,t)$（点集合 V, 枝集合 A, 入口の点集合 S, 出口 t, 容量 $c\in\mathbf{R}^A{}_+$; ただし $a_u=(t,u)\in A$ ($u\in S$), $c(a_u)=\infty$ とする）で，$f\in\mathbf{R}^A$ に対して $\partial f\in\mathbf{R}^V$ を

$$\partial f(v)=\textstyle\sum_{a=(v,w)\in A}f(a)-\sum_{a=(w,v)\in A}f(a)\ (v\in V)$$

により定める．$f\in\mathbf{R}^A$ が N 上の流れであるとは,

$$\partial f(v)=0\ \ (v\in V-(S\cup\{t\})),\ \ 0\leqq f(a)\leqq c(a)\ (a\in A)$$

であることをいう．$(\partial f(u)\mid u\in S)\in\mathbf{R}^S$ を流れ f の供給ベクトルという．N 上の S に関するカット関数 $\rho: 2^S\to\mathbf{R}_+$ を

$$\rho(X)=\min\{\textstyle\sum_{a\in\partial^+W}c(a)\mid W\cap S=X,\ t\notin W\subseteq V\}\quad(X\subseteq S)$$

（ただし, $\delta^+W=\{a\mid a=(v,w)\in A, v\in W, w\notin W\}$ ($W\subseteq V$)）とすると，ρ は劣モジュラ関数になる．この ρ に対する基本関数が，ネットワーク・フローの手法で計算できることはよく知られている．本論文では，同様の手法が ρ の足切りに関しても適用できることを示す．

ρ の d-足切り（d:非負実数）$\rho_d: 2^S\to\mathbf{R}$を次で定める：

$$\rho_d(X)=\rho(X)-d\qquad(X\subseteq S)$$

定理. $x\in\mathbf{P}(\rho_d)$, $u,v\in S$, $\epsilon,\delta\geqq 0$ に関して，$x+\delta_{\chi u}-\epsilon_{\chi v}\in\mathbf{P}(\rho_d)$ であるための必要十分条件は，N 上に $x+(\delta+d)\chi_u-\epsilon\chi_v$ を供給ベクトルとする流れが存在することである．

この定理より，$x+d\chi_u$ ($u\in S$) を供給ベクトルとする N 上の流れを f_u とすると，ρ_d の基本関数は次のように計算できる．

$u\in\mathrm{sat}(x)\leftrightarrow N$ 上で流れ f_u に関して点 u から出口 t

へ流れを増せる道が存在しない．

dep$(x, u)=\{v \mid v \in S, N$ 上で流れ f_u に関して点 u から点 v へ流れを増せる道が存在する$\}$

3. 足切り横断ポリマトロイド

2部グラフ $B=(S,T;A_B)$ ($S(T)$: 左(右)端点集合, A_B：枝集合$\subseteq S \times T$) において，$\gamma_{p,d}: 2^S \rightarrow \mathbf{R}$を次で定める：

$$\gamma_{p,d}(X)=p|\{w|(u,w) \in A_B, n \in X\}|-d \quad (X \subseteq S)$$

ただし，p, d は S の各点の次数が d/p 以上であるような非負の実数 ($p \neq 0$) とする．このとき，$\mathbf{P}(\gamma_{p,d}) \cap \mathbf{R}^S{}_+$ はポリマトロイドの独立多面体になる．このポリマトロイドを足切り横断ポリマトロイド (lower-truncated transversal polymatroid) といい，$P(p,d)$で表わす．このポリマトロイドに対してカット関数の足切りとネットワーク・フローの議論がそのまま適用できる．本論文の手法が有用であることは，足切り横断ポリマトロイドとして次のような例があることからも明らかである．

(1) 横断ポリマトロイド $P(1,0)$ は通常の横断ポリマトロイドであり，この場合，本論文の手法は既知の算法に一致する．

(2) グラフの閉路マトロイド 点集合 V, 枝集合 E のグラフ $G=(V,E)$に対して，2部グラフ $B(G)=(E,V;A_G)$ ($E(V)$：左(右) 端点集合，A_G：枝集合) を

$$A_G=\{(e,v_i),(e,v_j) \mid \text{グラフ } G \text{ で} \{v_i, v_j\}=e \in E\}$$

で定める．すると $B(G)$の E 上の足切り横断ポリマトロイド $P(1,1)$は，グラフ G の閉路マトロイド M_G に一致する．このことから，これまで木の概念にもとづいた算法しか知られていなかったグラフの諸問題に対して，ネットワーク・フローの手法にもとづいた，より効率的な算法を構成することができる．本論文では，M_G を k 回合併して得られるマトロイドの基が$O(k^2|V|^2)$の手間で求められること，グラフ G の基本分割が$O(|V|^2)$の手間で，またその詳細な基本分割が $O(|E|^3 \log|v|)$ の手間で求められることなどを示している (従来のやり方ではそれぞれ，$O(|E||V|^2)$ $O(|E|^{5-6})$ の手間がかかった)．これらの結果は，電気回路網の基本的諸問題に応用できる．

(3) 平面リンク構造のマトロイド リンク構造とは，剛体である棒材と，棒の端点同士をつなぐ節から成る滑節構造物である．平面リンク構造に関しては，剛性に関して冗長な棒材を含まない部分構造全体がマトロイドを成すことが知られている．ここで棒材を枝，節を点とするグラフを $G=(V,E)$とすると，$B(G)$の E 上の $P(2,3)$ はこのマトロイドに一致する．したがって，平面リンク構造に関する問題に対して本論文の手法が適用でき，たとえば，リンク構造の最大な静定構造を $O(|E||V|)$ の手間で求めること，また内部構造の従属関係を効率よく知ることができる．

(4) 内部自由度を有する工学システム 本論文の手法は，杉原[3]により研究されている内部自由度を有する工学システムへと拡張することができる．すなわち，本論文で展開されたネットワーク算法に関する技法，および劣モジュラ関数の理論の応用法を，適時，用いることにより内部自由度を有するシステムの冗長でない極大な部分システムを求めること，およびその構造に関して内部の従属関係を調べることが効率よく行なえる．本論文ではその一例として，多面体線画の正則性判定問題を採り上げ，従来のものより速い算法を与えている．

4. ネットワークの容量修正問題

足切り横断ポリマトロイドは2部グラフに関して得られたものであったが，一般のグラフを基にしたネットワークのカット関数の足切りを考え，独立流れ算法を適用することにより，次の問題を効率よく解くことができる．

ネットワークの容量修正問題：根とよばれる特別な1点 r が与えられたネットワーク $N=(V, A, c)$で，根以外の各々の点から根 r への最大流の値があらかじめ与えられた値 k 以上になるよう，ネットワークの各枝の容量を増量することを行なう (あるいは，各枝で順方向と逆方向の容量の和一定の下で，その割合を変化させる)．このとき，各枝で容量を1単位増すのにかかる費用が与えられているとして，最小費用でネットワークを修正せよ． ◢

各枝の最初の容量がすべて0の場合の問題は，ネットワークの構成問題になる．この問題は容量，費用，k が整数のとき，一般に多項式オーダーの手間で解け，また k を定数とみなした場合には $O(|A||V|^2)$ の手間で解ける．

5. むすび

本論文では，カット関数の足切りにより表わせる劣モジュラ関数が，ネットワーク・フローの手法により算法的に扱えることを示し，それにもとづいて，足切り横断ポリマトロイドという統一的枠組の下で種々の離散的工学システムが効率よく解析できることを示すとともに，ネットワークの容量修正問題というORの問題が効率よく解けることを示した．また，本論文では劣モジュラ関数の足切りに関する理論的解析を行ない，本論文の手法の適用範囲について考察を加えることも行なった．今後

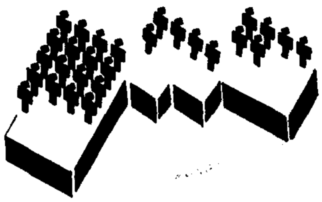
とも，内部自由度を有する工学システムに関して個々のシステムの特殊性を生かした解析手法を確立すること，ネットワークの容量修正問題に関してさらに一般的な問題に対する算法を構成することなどにより，より多くの現実問題が本論文の手法に沿って解かれることが期待される．

参考文献

[1] S. Fujishige : Algorithms for Solving the Independent-Flow Problems. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.21 (1978), pp. 189-203

[2] M. Iri : Applications of Matroid Theory. In "*Mathematical Programming, The State of the Art*" (A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1983, pp. 158-201

[3] 杉原厚吉：内部自由度をもった連立方程式における構造的不整合とその検出法．電子通信学会論文誌，Vol. J65-A (1982), pp. 911-918



会員近況

広島大学 経済学部 **椿 康和**

入会3年目をむかえましたが，ORに関してはときおりFuzzyなどを聞きかじる程度の周辺人にとどまっています．現在，統計データの管理システムの開発に応用の立場から参加しています．

近年のデータベース技術の発展とともに，その管理下に置くことが要請されるデータの種類は，単なる数値から文献・画像・知識等へと多様になってきました．またその範囲についても，組織の日常的管理活動におけるものから意思決定に直接に関連するものに拡大しております．これらの情報の管理には，従来のデータベース管理システムとは発想を異にする必要があります．なかでもさまざまな社会調査の結果や実験結果，また各種の統計資料を対象とするシステムは，そのモデル化および解析のシステムとともに，OR活動を背後から支える役割を果たすものと思われます．これまで，主として時系列経済資料を扱ってきましたが，今後は地域の各種統計資料を対象として，システムの基礎となるデータ・モデルやそれを記述するDD/D（データ辞書）の問題を考えてゆきたいと思っております．

(株)インテック 技術本部 **北野 孝一**

コンピュータの時代とよばれていても，コンピュータの常識は，一般の人の非常識である．パソコン，マイコンのマニュアルは，メーカーの担当者が書くため，非常にわかりにくく，すこぶる評判が悪い．これは日本に限ったことではないらしい．

最近英国の出版社で素人の青少年にマニュアルを書かせて成功したという話しが新聞に載っていた．これはたいへん大切なことを示唆しているように思う．今までのマニュアルには，なぜか一番大切なことが抜けていたのではないだろうか．コンピュータにとって常識的なことは書かれていないのである．

といって，マニュアルは細かく詳しく書いてあれば良いというものでもない．何も知らない者がマニュアルだけでマスターできるわけではないし，逆に良く知っている人にはマニュアルは不要なのである．どうせ書くのなら「大切なことだけを書く」ことだ，ただし，その対象としている人にわかるようにだ．それを「必要な時に役に立つように書く」ことである．わからないことがどこに書いてあるか探せる人には，マニュアルはいらない．これらは「使う側に立って書く」ことであると言って良いと思う．

情報処理に関係している者にとって，コミュニケーションの大切さは，わかっているつもりでも，実際やっていることは逆行していることが意外と身のまわりには多いものである．

●ご利用ください●さしあげます●

下記の雑誌は，交換等によって，日本OR学会にほぼ定期的に送られてきているものです．学会事務局で保管しておりますので，どうぞご利用ください．下記のもの以外にも大学の論叢等があります．なお，1982年中に発行のものは，ご希望があれば，さしあげますので（原則として郵送はいたしません）事務局までお申し出ください．（会員の方を優先とさせていただきます．）

(1) IE
(2) 運輸と経済
(3) ENGINEERS
(4) 技術と経済
(5) 計測と制御
(6) 高速道路と自動車
(7) 産業能率
(8) 数理科学
(9) テレトピア
(10) 電子通信学会誌
(11) 土木学会誌
(12) 日本機械学会誌
(13) 標準化ジャーナル
(14) 標準化と品質管理
(15) 理論経済学