ゲームと確率

寺岡 義伸

1. はじめに

17世紀の中頃，ちょうど Newton が微積分法を発見したのとほぼ同じ頃，好きなくせに負けてばかりいるフランスの貴族たちのギャンブルへの執念が確率の始まりといわれている．同程度の起こりやすさを基礎にした確率が Pascal, Fermat, Bernoulli, Laplaceらによって発展させられ，社会統計や経済統計との出会いや気体分子運動論，統計力学との接触を経た後，今世紀になって，解析学を導入した近代確率論に成長していったのは，よく知られた歴史であろう．

ところで，確率論発生の動機とその後の発展を観察していく時，1つの奇妙さに出会わざるをえない．本来，どうすれば勝てるのか，というギャンブルでの賭の方法を見つけ出すのが出発点であったにもかかわらず，カードの配られ方やサイコロの目の出方を探求する方向にのみ力点が置かれてしまった．正確な認識と適格な判断は合理的な行動への指針になることであり，それ自体の発展も自然な流れというものであろうから，不思議とは思えないが，確率論発生への導火線ともなり，確率論とともに歩まねばならない，不確実な状況に置かれた行動決定者がどのようにふるまうのが最適といえるのかという問題を，組織的に体系化する方向への研究が遅れてしまったのは，やはり奇妙というものであろう．

確率論が微積分と同様の歴史をもちながら，その近代化において大きな差をつけられたことがあった，との話を耳にする時，確率論とともに歩まねばならなかった“行動決定への指針(**戦略**)”の概念の出現が1921年の Borel の論文であり，“互いに競争状態にある2個以上の行動主体がとるべき戦略に関する数理的理論（**ゲームの理論**）の誕生が1944年の Neumann と Morgenstern による大著の出版であること，さらには“適格な判断の指針への戦略の応用(**統計的決定理論**)”の展開が 1950年の Wald の貢献によること，などと，つい比較してみたくなるのは，筆者だけであろうか．

出だしから，何かとりとめのないことばかりを書いてしまったが，**ゲーム**(あるいはギャンブル)における**確率**のかかわりは，あたかも**水力機械の設計**における**流体力学**のかかわりと，きわめて類似していると思えるのに，この関係があまり一般に理解されていないと考えるのは，筆者の認識不足によるものであろうか．

本稿では，本特集の方針に沿うよう，確率論の数学的内容とかゲームの理論を規定する複雑な構造とかは専門書を見ていただくこととして，われわれの周辺でよく出くわす3つの例で，エッセイ風に，問題の定式化とその結論の形でまとめ，ゲームにおける確率のかかわりをサラリと紹介させていただこうと思う．

てらおか　よしのぶ　姫路工業大学

ただ，この稿の筆者は知る人ぞ知る劣等生の上に不勉強者，はたしてどのような内容になりますのか，恥を忍んで，哲学的な意味づけ等は無しにして，単なる客観的な描写として書かせていただく．

2. ポーカー・ゲームと確率

ポーカーは19世紀の初め米国の New Orleans で始まった室内ゲームといわれている．このゲームのおもしろいところは，ハッタリやおどかしのあることであり，確率に充分な知識をもったプレーヤーが有利ではあっても必ず勝てるとは限らないことであろう．ポーカーには種類がたくさんあり，その1つ1つを生のままで取り扱うのはきわめて困難なので，次のように非常に単純化されたモデルを取り扱うことにする．

2人のギャンブラー（**プレーヤーⅠ，Ⅱ**）に手札としてそれぞれ［0, 1］上の一様分布から無作為に選ばれた数 x, y が配られる．Ⅰは自分の手札 x のみを知って y を知らずに，F：ゲームを降りるか，またはB：金額 a を賭けるか，を決めなければならない．Fの時はⅠの負けで参加料として1の金額がⅡにとられる．Bの時は，次にⅡが y のみを知って x を知らずに，F：ゲームを降りて彼の出した参加料1をⅠに没収されるか，S：Ⅰの賭けに応じて手札を見せ合うか，を決めることとなる．Sの時は，高い手札の者が相手から（参加料＋賭金）$=1+a$ をもらう．これを表1で示す．

表 1

プレーヤー	手札	第1手番	第2手番	Ⅰへの利益
Ⅰ	x	F		-1
		B →		
Ⅱ	y		F	1
			S	$(1+a)\mathrm{sgn}(x-y)$

ここに，$\mathrm{sgn}\, z=1\ (z>0)$, $=0\ (z=0)$, $=-1\ (z<0)$.

このように単純化されたモデルでポーカーといえるかとの問題も生ずるが，あんがい現実を反映しているとして，ここではⅠとⅡがそれぞれ x と y を知った後，どのようにふるまえばよいのかを考える．すなわち，ゲームを始める前にあらかじめ，Ⅰはやがて受け取る各々の $x\in[0,1]$ にFかBのいずれかを対応させるスケジュールを，Ⅱは各々の $y\in[0,1]$ にFかSのいずれかを対応させるスケジュールを定め，ともにその中から自分にとってベストと思われるスケジュールを選ぶ方法を考える．ゲームの理論では，このスケジュールのことを戦略，ある基準のもとでベストな戦略を最適戦略とよぶ．

このようなゲームでは，戦略は通常次のように定められている：Ⅰは自分の手札が x のとき確率 $\phi(x)$ でBを選び（賭ける），確率 $1-\phi(x)$ でFを選ぶ（降りる）；Ⅱは自分の手札が y で，Ⅰが賭けてきたとき，確率 $\varphi(y)$ でSを選ぶ（賭けに応ずる）．そうするとⅠ，Ⅱの戦略とはそれぞれ［0, 1］から［0, 1］への関数 $\phi(x)$, $\varphi(y)$ を選定することになる．ⅠにとってはBかFかを，ⅡにとってはSかFをサイコロを振って選ぶ．そしてそのサイコロの目の出方を，Ⅰは x に依存する $\phi(x)$ で，Ⅱは y に依存する $\varphi(y)$ で，とのスケジュールは定まったが，ベストな $\phi(x)$ と $\varphi(y)$ を選定すべき基準を何におくかが，当面の問題となってくる．

この場合，互いに相手がどのような戦略を選ぶかを考慮したうえで，自分の獲得する金額を最大にする（同じことではあるが，自分の失う金額を最小にする）戦略を選ぶのがベストといえよう．自分の獲得できる金額をどう定めるのかについても種々の考え方があるが，ここでは期待値として考える．

2人がそれぞれ戦略 $\phi(x)$, $\varphi(y)$ を用いたとき，Ⅰが獲得する金額（Ⅱが失う金額）の期待値は，

$$M(\phi,\varphi)=-\int_0^1(1-\phi(x))dx+\int_0^1\int_0^1\phi(x)(1-\varphi(y))dxdy+(1+a)\int_0^1\int_0^1\phi(x)\varphi(y)\mathrm{sgn}(x-y)dxdy \tag{2.1}$$

となる．ゲームの理論では $M(\phi,\varphi)$ のことを利得

関数とよぶ．Iは$M(\phi,\varphi)$を最大にするよう$\phi(x)$を選びたい．他方IIは$M(\phi,\varphi)$を最小にするよう$\varphi(y)$を選ぼうとする．この綱引きは，ともにハッタリは無益であるとして，Iは$\min_{\varphi} M(\phi,\varphi)$を最大にする$\phi$を，IIは$\max_{\phi} M(\phi,\varphi)$を最小にする$\varphi$を求めることで平衡状態：

(2.2) $\max_{\phi} \min_{\varphi} M(\phi,\varphi)=\min_{\varphi} \max_{\phi} M(\phi,\varphi)$

に至って結着がつく．(**min-max定理**の成立する例となっている．) そして次の結果が導かれる．

結果1．$b=a/(z+a)$とおく．(2.1)に対する最適戦略は，

$$\phi^*(x)=\begin{cases}\text{任意}, & \text{if } 0\leqq x<b\\ 1\ , & \text{if } b\leqq x\leqq 1\end{cases}$$

ただし，$\int_0^b \phi^*(x)dx=b(1-b)$, $0\leqq x<b$,

$$\varphi^*(y)=\begin{cases}0\ , & \text{if } 0\leqq y<b\\ 1\ , & \text{if } b\leqq y\leqq 1.\end{cases}$$

この場合のIへの利益の期待値は$-b^2$である．

証明については，Karlin [1] や坂口 [2] の書物を参照していただくとして，なんとなくもっともらしい解を得た．この種の問題はいろいろと変形され，より現実のポーカーに即した形で発表されている (たとえば文献 [3,4,5,6])．

この例は，室内のゲームにいかに確率が関与しているかを示す代表的例と考えられる．また，両プレーヤーに与えられる情報の不平衡 (Iが自分の手札xの真値についての部分的情報を必然的に与えてしまう) をもつゲームの例である．ところでこの問題は単なる室内ゲームとしてではなく，種々の対立状態での意思決定問題にも応用できる骨格をもっていることに注意されたい．

3. 買物クイズと確率

テレビを見ている時，われわれはよく次のような例で示されるクイズに出会う：

2人のプレーヤーと司会者がいる．司会者はある品物をとりあげ，さまざまな形でヒントを与えながら，各プレーヤーにこの品物の値段を当てさせる．真の値段に近く，しかも真の値段を越えない値を示したプレーヤーが勝ちとなる．両者は各々どのように値をつければよいか？

このよく知られたクイズを筆者の独断でもって定式化し解析してみよう．

プレーヤーIとIIは，司会者からのヒントにより当てるべき数は[0,1]上の分布関数 (今後 cdf を用いる) $H(t)$ をもつ乱数の実現値であるとする．両者ともできるだけ小さな値を示したほうが安全である．しかし小さすぎると，互いに相手が自分の示した値より大きくしかも実現値以下の値を示す可能性が大となる．そこで，IとIIがそれぞれ$0\leqq x,y\leqq 1$を示したとすると，プレーヤーi ($i=1,2$)にとっての勝つ確率$M_i(x,y)$は，

$$(3.1)\quad M_1(x,y)=\begin{cases}H(y)-H(x), & x<y\\ 0, & x=y\ ;\\ 1-H(x), & y>x\end{cases}$$

$$(3.2)\quad M_2(x,y)=\begin{cases}H(x)-H(y), & y<x\\ 0, & y=x\\ 1-H(y), & y>x.\end{cases}$$

この場合，両者は互いに相手の思惑を考えながら，自分の勝つ確率を最大にしようとするのがベストであろう．そうすると，この綱引きは2節の場合と勝手が違い，互いに相手がベストな値を示そうとしていることに対抗して，自分もベストにふるまおうとする，と考えるのが自然であろう．すなわち，Iは$M_1(x, y^0)$を最大にする$x=x^0$を選ぼうとし，他方IIも$M_2(x^0,y)$を最大にする$y=y^0$を選ぼうとすることで，(x^0,y^0)という1つの平衡状態に到達すると考えられる．

ところが，(3.1) と (3.2) を注意深く観察していくと，上記のようなうまく両立できる平衡点は求まりそうにない．(純戦略の中に平衡点は存在しない) そこで[0,1]内の数字x,yそのものを選ぶのではなく，適当なサイコロ ([0,1] の目が出るサイコロ) を選びそのサイコロの目の出方にしたがって確率的に[0,1]内の数字を選ぶとして，期待値の意味で勝つ確率を平衡に導くことにする．ゲーム理論では，このサイコロの出る目を規定す

る確率分布のことを混合戦略とよぶ．IとIIの混合戦略は $M_1(x,y)$ と $M_2(x,y)$ の形からともに同一の分布関数で特徴づけられ，

$$(3.3)\quad F^0(x)=\begin{cases}-\log\{1-H(x)\},\ 0\leqq x<H^{-1}(1-1/e)\\ 1,\qquad H^{-1}(1-1/e)<x\leqq 1\end{cases}$$

とすると，次の結果を得る．

結果 2．任意の [0,1] 上のcdf $G(\cdot)$ に対して，

$$\int_0^1\int_0^1 M_1(x,y)dG(x)dF^0(y)\leqq\int_0^1\int_0^1 M_2(x,y)dF^0(x)dF^0(y)$$

$$\int_0^1\int_0^1 M_2(x,y)dF^0(x)dG(y)\leqq\int_0^1\int_0^1 M_2(x,y)dF^0(x)dF^0(y)$$

が成立し，かつこのとき，

$$\int_0^1\int_0^1 M_i(x,y)dF^0(x)dF^0(y)=1/e=0.632$$

を得る．$(i=1,2)$

すなわち，両者とも $F^0(\cdot)$ で規定されるサイコロの目の出方にまかせてしまうなら，互いに平衡状態に到達でき，勝つ確率の期待値は $1/e$ になるというのである．しかも，このサイコロは [0, $1-1/\boldsymbol{e}$] に深く関係しているのもおもしろい．

くわしい解析やその他の話題は [7] を参照していただくとして，全体の $1/e$ は何も行動せず，残り $1-1/e$ である規則にしたがって行動するのが最適であるというのは，他の分野でもよく聞かされる結果である．(たとえば [8,9] を見られたい)

4. 保険契約と確率

保険契約は保険会社 (seller) と加入者 (buyer) との間のゲームであると考えると，あんがいおもしろい結果が出てくる．

cdf $F(\cdot)$ をもつ確率変数である金額 x の損害をこうむるおそれがあるときに，buyer は保険料 π を支払って，seller から保険契約 $T(\cdot)$ を買う．すなわち金額 x の損害が buyer に現実に起こったとき，seller は $T(x)$ (ただし $0\leqq T(x)\leqq x$) だけの支払いを約束する．ふつう，保険料は $\pi=E\{T(x)\}=\int_0^\infty T(x)dF(x)$ にとられており，契約も $T(x)\leqq K$ (ある一定金額以上は支払わない) となっている．いま $u(\cdot),v(\cdot)$ をそれぞれ buyer と seller のもつ効用関数とすると，保険契約 $T(\cdot)$ を結ぶことによる期待効用は各人にとって，それぞれ，

$$\int_0^\infty u[-\pi-x+T(x)]dF(x);\int_0^\infty v[\pi-T(x)]dF(x)$$

となる．ここで $u(\cdot),v(\cdot)$ はともに2回微分可能で concave な増加関数であると仮定する．すなわち，$u'(\cdot)\geqq 0$, $v'(\cdot)\geqq 0$, $u''(\cdot)\leqq 0$, $v''(\cdot)\leqq 0$.

また期待値 $E(X)=\int_0^\infty xdF(x)$ が存在するものとしておいても問題がなく，このとき $S_F(z)=\int_z^\infty(x-z)dF(x)\int_z^\infty\{1-F(x)\}dx$ とおく．有界な平均 $E(X)$ をもつ任意の分布関数 F に対して，$S_F(z)$ は非負，concave，かつ集合 $\{z|S_F(z)>0\}$ の上で厳密な減少関数である．さらに，

$$S_F(z)\geqq E(X)-Z,\ (0\leqq z\leqq\infty),\ S_F(0)=E(X)$$

$$\lim_{z\to\infty}S_F(z)=0$$

なる性質をもつことが知られている．また $S_F(z)$ の逆関数を $S_F^{-1}(c)$ ただし $0<c\leqq E(X)$ で示す．

以上の準備のもとに，buyer と seller 各々の立場から最も有利と考えられる契約 $T(\cdot)$ を示す．

結果 3．任意の効用関数 $u(\cdot)$ に対して，契約

$$T^*_K(x)=\begin{cases}0, & 0\leqq x<a_K\\ \min(x-a_K,K), & x\geqq a_K\end{cases}$$

は $\int_0^\infty u[-x-x+T(x)]dF(x)$ を最大にする契約である．ここに a_K は $S_F(a_K)-S_F(a_K+K)=\pi$ のただ1つの根であり $0\leqq a_K\leqq a_\infty=S_F^{-1}(\pi)$ を満足する．

結果 4．任意の効用関数 $v(\cdot)$ に対して，契約

$$T_K{}^0(x)=\begin{cases}qx, & 0\leqq x<K/q\\ K, & x\geqq K/q\end{cases}$$

は $\int_0^\infty v[\pi-T(x)]dF(x)$ を最大にする契約である．ただし，この場合の $T(x)$ は buyer の利益を守るため $T(x)/x$ は $T(x)<K$ を満たす x につき非減少と制限されたものから選ぶものとする．ここに q は $S_F(K/q)=E(X)-\pi/q$ のただ1つの根であり，$\pi/E(X)\leqq q\leqq\min(1,K/E(X))$ を満足する．

正確な意味でのゲームとはなっていないが，ゲーム論的な考え方をすることにより，buyerにと

っては自動車保険でよく見られる“免責点がa_Kである免責型”が都合よく，sellerにとっては火災保険でよく見られる“係数がqである比例型”が都合よいとの結果が得られた．しかも上記2つの契約は損害額の発生確率のみで決定され，buyerやsellerの効用関数とは無関係となるのである．この問題の動機づけとその発展やくわしい解析については，文献［10, 11, 12, 13］を参照されたい．

ところでこの分野は，経済的動機づけを背景に確率・統計・ORが微妙に関連する分野であり，単にゲームと確率といったテーマで取り扱える分野ではない．保険を専門に研究されている方から見ると，ずいぶん大胆な仮定をしているかもしれない．また統計屋さんから眺めるとき，「$F(\cdot)$をどうやって求める．それがわかれば苦労がない」との苦情を受けそうであり，$E\{T(X)\}=\pi$より不偏統計量の話題が出るかもしれない．

この節の結びとして，1974年度におけるわが国の自動車事故のデータをもとに，個人所有自動車対物損害保険に適用した結果を紹介する［13］．上限が150万円である（$K=150$）保険金に対して，年間1万円の保険料（$\pi=1$）とした場合，結果3（免責型）とするならば，4万円までの損害には支払いを放棄し，4万円以上の損害に対しては“損害額1000万円”をsellerから支払ってもらうのがbuyerにとって最適となる．同様の条件で，結果4（比例型）とするならば，損害額の59%をsellerがbuyerに支払うのが，sellerにとって最適となる．

5. おわりに

あまり，おもしろみのない数少ない話題をもとに，不確実性下における競争問題を，例と定式化とその結論の列挙という形で描写させていただいた．筆者の話題のとりあげ方や力不足もあり，かなりの誤解を受けそうだが，この分野を，単なる遊びの理論ではなく，広い応用が期待できる役に立つ理論として，理解してくださる読者が多くあることを希望する．最後に，興味ある話題を集めた読みやすい書物としてEpsteinの書物［13］を参考文献の中に入れさせていただいた．

参考文献

［1］ Karlin, S. : *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, Vol. II, Addison-Wesley, London, 1959

［2］ 坂口　実：数理計画法，培風館，1968

［3］ Sakaguchi, M. : "Strategic Information and Non-Cooperative Games", *Kodai Math. Sem. Rep.*, **12**(1960), 96-101

［4］ Sakaguchi, M. & Sakai, S. : "Partial Information in a Simplified Two-Person Poker". *Math. Japon.*, **26** (1981), 695-705

［5］ Sakaguchi, M. & Sakai, S. : "Solutions to a Class of Two-Person Hi-Lo Poker", *Math. Japon.*, **27** (1982), 701-714

［6］ Sakaguchi, M. : "A Simplified Two-Person Multistage Poker With Optimal Stopping", *Math. Japon.*, **28** (1983), 287-303

［7］ Teraoka, Y. : "A Two-Person Infinite Game Suggested from a Quiz of Guessing a Number", *Bull. Inform. Cybenet.*, **20**(1983), 23-32

［8］ Gilbert, J. P. & Mosteller, Y. : "Recognizing the Maximum of a Sequence", *J. Amer, Stat. Assoc.*, **61** (1966), 35-73

［9］ DeGroot, M. H. : *Optimal Statistical Decisions*. Chapt. 13, McGraw-Hill, New York, 1970

［10］ Arrow, K. : "Uncertainty and the Walfare Economics of Medical Care", *Amer, Econ. Rev.*, **53** (1963), 941-973

［11］ Miller, R. B. : "Insurance Contracts as a Two-Person Games", "*Manag. Sci.*, **18**(1972), 444-447

［12］ Teraoka, Y. : "Bounded Insurance Contracts", *Rep. Stat. Appl., JUSE*, **19**(1972), 110-115

［13］ Epstein, R. A. : *The Theory of Gambling and Statistical Logic*, Academic Press, New York, 1977.