マルコフ保全理論は批判に耐えられるか

鳩山　由紀夫

1. はじめに

電気系，機械系等を問わず，技術の進歩は系の複雑化，大規模化をうながし，それにともない，系の構成要素の故障や劣化が系全体に与える影響の重要性が認識され，結果として信頼性理論の発展をみた．より良い製品・設備を求めるということであれば，資力に物を言わせ高品質のきわみに挑戦すれば良いわけであるが，企業としてはそうはいかない．そこで，経済性を保ちつつ満足な機能を果たすため，製品のライフサイクルコストの最小化の問題が浮かび上がってくる．保全は，ライフサイクルの中で，製品や設備の点検，整備，修理，取替等の活動を示し，経済性を保ちつつ広義の信頼性を向上させるのに大いに貢献し得る行動である．

保全問題をライフサイクルの他の部分から完全に分離して論ずることは危険であるが，設備にとって最も好ましい保全活動は何かを探索する場合など，保全以外の外的環境をあらかじめ設定し，保全のみを切り離して論じてまず差しつかえない．したがって，保全性理論の中でも最適保全アクションを決定する理論が多く研究されているが，複雑な系をも扱い得るとして，系の振舞いをマルコフ的に記述するマルコフ保全理論がかなりのウエイトを占めている．

はとやま　ゆきお　専修大学

一方，最適保全理論，特にマルコフ保全問題は実用的でないとの批判も強い．並列システムのような簡単な電子系ならまだしも，部品が構造的に複雑に絡む機械系設備に対しては理論は無力と思われている．それは理論の有用性を立証する事例報告の少なさに裏づけられる．

このとき1つの開き直りは，理論は直接役に立たなくとも良く，指導的な原理たり得れば良しとする発想である．実はこれは開き直りではなく，原理を与える理論は究極的にきわめて有用なものである．保全性理論と呼ばれる以上，直接・間接的に保全の場に生かされねば意味がない．

ここでは，基本的なマルコフ保全理論をまず紹介し，それがどのように一般化，拡張されてきたかを眺め，現実への適用には何が障害となっているかを調べ，その障害を取り除くことは果たして可能であるのか，原理として生きるためにはどのような努力がなされるべきか，多少なりとも展望を加えてみたい．

2. マルコフ保全モデル

保全の対象となる機器などの系が，保全の意味からいくつかの稼動状態に分けられる場合に，どのような予防的保全処置をほどこすべきかという議論は，1963年に Derman [2] によってマルコフ保全モデルとして定式化された．Derman の基本モデルはしばしば引用されており，本質的には取替モデルである．保全を考慮すべきある程度大

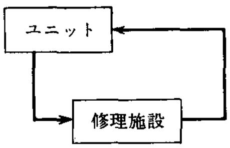

図 1 修理をともなう保全系

きな系では，系の取替という保全よりも，点検をし，故障部品を取替え，不具合個所を修理するといった保全活動がより自然と思われる．したがってここでは，修理を考慮に入れたモデル［6］を取り上げ，マルコフ保全理論の展開を説明しよう．

保全の対象となる機器(以下，ユニットと呼ぶ)と，その修理施設とから成る簡単な系を考える(図1)．ユニットは新品状態(状態0)および故障状態(状態 s) の他に，劣化の程度に応じて付番された中間的状態 $1, 2, \cdots, s-1$ をとり得るものとする．系は一定間隔で観測され，ユニットの劣化状態が明らかにされる．適当な劣化状態のもとでユニットは修理施設に送られ修理される．この“適当な状態”を求めるため，以下のモデルを構築する．

(1) 状態 i のユニットをそのまま稼動させるとき，次の観測時点で状態 j となる推移確率を過去の履歴によらず $p_{ij}(\geqq 0)$ で与える．これがマルコフモデルと呼ばれる所以である．$\sum_j p_{ij}=1$ とする．

(2) 修理のとき状態 i のユニットはただちに修理施設に送られ，T_i 期間後に新品同様にもどり，稼動が再開される．修理時間 T_i は平均修理時間 $1/\mu_i(\mu_i \leqq 1)$ なる幾何分布にしたがう．すなわち，

$$P\{T_i=k\}=\mu_i(1-\mu_i)^{k-1}, k=1, 2, \cdots$$

(3) A_i：状態 i のユニットの単位期間当りの作動コスト．

C_i：状態 i のユニットを修理するときの固定費用．

B_i：状態 i のユニットの修理に要する単位期間当りの流動費用(労賃等)．

ここで，状態 i のユニットを施設で修理中である系の状態を $S(i)$ で表わすことにする．上記の下で，割引係数を α としたときの総期待費用を最小とする保全方式は，

$V(i)$： 系が状態 i からスタートしたときの最小総期待費用($i=0, 1, \cdots, s, S(0), S(1), \cdots, S(s)$)，

を導入することにより，次式から求められる．

$$\begin{cases} V(i)=\min\{A_i+\alpha\sum_{j=0}^{s} p_{ij}V(j), C_i+B_i \\ \quad +\alpha(\mu_i V(0)+(1-\mu_i)V(S(i)))\},\ 0\leq i\leq s, \\ V(S(i))=B_i+\alpha(\mu_i V(0)+(1-\mu_i)V(S(i))), \\ \quad 0\leq i\leq s. \end{cases} \tag{1}$$

このマルコフ決定問題は，政策改良法や逐次近似法，あるいはＬＰを用いて解くことができる．ただ，一般には解析的に最適解を求めることはできず，また，状態数の増加とともにいちじるしく計算時間が増大する．そこで，最適解の構造を探る方向に努力が向けられる．最適保全政策が確率的でなく，また，現時点での状態のみによって決定される定常的政策となることは問題から明らかであるが，さらに，劣化状態がある程度に達したときのみ修理を行なう，いわゆるコントロール・リミット政策(以後，ＣＬポリシー)が直観的に妥当と思われる．最適政策がこの簡単な形で与えられるためには，推移確率や費用に適当な条件が要る．上述の問題では，費用の非負条件など当然なものは省略して，下記の４条件が十分性を与える(証明は［6］参照)．

(1) $\sum_{j=k}^{s} p_{ij}$ がすべての k で，i に関して非減少．

(2) C_i, B_i が i に関して非減少．

(3) $A_i-(C_i+B_i/\mu_i)$ が i に関して非減少．

(4) μ_i が i に関して非増加．

劣化の上昇にともない，(1)はより劣化の程度の高い状態へ移りやすくなることを，(2)は修理に要する諸費用が増加することを，(3)は稼動費用と期待修理費用との差が増加することを，また(4)は平均修理時間が長くなることを意味している．これらの条件下で，ＣＬポリシーが保証されるので，

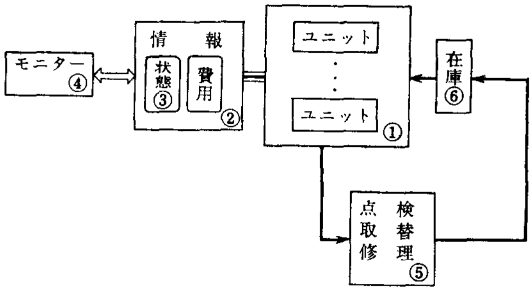

図 2 一般的な保全系の模式図

表 1 保全系の分類

要因番号	要因	分類番号 0	1	2	3	4
①	ユニット数	1	2	複数		
②	情報	完全	点検により完全	不完全(コスト)	不完全(状態)	
③	状態数	2	2以上	連続		
④	モニター	無	有			
⑤	保全アクション	取替	修理	修理，取替	機会取替	点検，修理取替
⑥	在庫(予備)	無	有			

解を得るアルゴリズムがきわめて簡単化され，また，保全アクションが受け入れられやすくなる．このように，多くのマルコフ保全問題では妥当な構造をもつ政策が最適となるための妥当な条件を探すことに力が注がれる．

3. マルコフ保全モデルの拡張

マルコフ保全モデルはさまざまな方向に拡張されている[14]，[16]．マルコフ理論を用いて定式化し得ると思われる最も包括的な保全系を図2に示す．保全対象のユニット数は単一である場合がほとんどである．これは，複数ユニットを扱う場合の相互依存性の記述がむずかしいためと，物理的，経済的な従属性が顕著でないならば，それぞれ単一ユニットの保全系として議論して差しつかえないからによる．近年複数ユニット系もいくらか研究されているが，ショックモデルが有効に思われる．保全活動を行なうには，ユニットの劣化状態および保全費用などの情報が必要であるが，これらの情報が完全に既知とする基本モデルは，費用が確率的に変動する場合，点検によってのみ状態が正確に観測される場合，あるいは，状態は外部から正確には把握できない場合へと拡張されている．特に最後のケースでは，モニターによって状態が“ある程度”わかる場合についても研究がなされている．さらに，取替の場合には在庫量を，修理の場合には予備ユニット数を決定する問題も扱われている．これらのマルコフ保全問題に関する主な文献を，細かな差異を無視して表1にしたがい分類すると，表2のようになる．表に掲げたのはすべて離散時間のモデルである．連続時間のモデル，セミマルコフ過程を用いた議論は一切省略してある（たとえばKao［11］が示すように，同様の議論が期待される）．

マルコフ保全問題を扱う議論の大半は，一般的解法に触れた後，なんらかのCLポリシーの最適性が保証される適当な条件に言及している．粗く言えば，観測ないし推測されたユニットの劣化状態がある程度以上に達したときのみ保全活動を行

表 2 マルコフ保全問題文献の分類

著者	年	(①,②,③,④,⑤,⑥)	著者	年	(①,②,③,④,⑤,⑥)
Girshick, 他［5］	'52	(0, 3, 0, 1, 4, 0)	Smallwood, 他［21］	'73	(0, 3, 1, 1, 0, 0)
Klein［12］	'62	(0, 1, 1, 0, 4, 0)	Rosenfield［17］	'76	(0, 1, 1, 0, 4, 0)
Derman［2］	'63	(0, 0, 1, 0, 0, 0)	Wang［25］	'77	(0, 3, 1, 0, 0, 0)
Taylor［24］	'65	(0, 3, 0, 1, 4, 0)	Sethi［20］	'77	(2, 0, 1, 0, 3, 0)
Kolesar［13］	'66	(0, 0, 1, 0, 0, 0)	Bobos, 他［1］	'78	(0, 0, 1, 0, 2, 0)
Derman, 他［4］	'67	(0, 0, 1, 0, 0, 1)	Hatoyama［7］	'79	(0, 0, 1, 0, 1, 1)
Ross［18］	'69	(0, 0, 2, 0, 0, 1)	Suzuki［22］	'79	(0, 3, 0, 1, 0, 0)
Kalymon［10］	'72	(0, 2, 1, 0, 0, 0)	Ohashi, 他［15］	'81	(1, 0, 1, 0, 3, 0)

なうという政策が，妥当な条件下で最適であることを保証してくれる理論である．なお，最適解の単純性に関する一般的な議論は[9]，[19]に見られる．

4. マルコフ保全理論適用の困難性

劣化状態が適度に複雑な系の保全問題を論ずるとき，マルコフ決定理論はその定式化の容易性ゆえにしばしば用いられている．しかしながら，これらの理論の適用例は，特殊構造を持つ電気系を除いてきわめて少ない．以下に，その原因と思われるものをいくつか指摘し，実用的な理論の可能性を探すための参考としたい[8]．

(a) 状態の把握および状態推移確率の測定の困難性

並列システムにおける稼動要素数を状態と把える場合を除き，一般に系の真の劣化状態を把握することはきわめて困難である．多くの部品から構成される系は多くの故障モードを持ち，劣化状態の1次元的表現には無理がともなう．さらに，状態間の推移確率の測定には，状態の把握の問題の他に，データ数の問題がある．良い推定値を得るためには多量のデータを必要とするが，部品の高信頼化は故障データの不足に拍車をかけている．

(b) マルコフ性の仮定

保全理論ではマルコフ性はあくまでも仮定であり，実際に使用する場合には，マルコフ性が検定される必要があるが，これが厄介である．

(c) コストの実測の困難性

予防保全が重視される理論においては，予防保全費用が事後保全費用よりも経済的であることが必須で，したがって，機械の不測の稼動停止による損失や，定期保全のための停止による損失がコストの面から計測されねばならない．また，劣化をともなう系の場合には，劣化の程度に依存する稼動費用が計測される必要がある．これらの値の測定は，実際には，はなはだむずかしいと思われる．

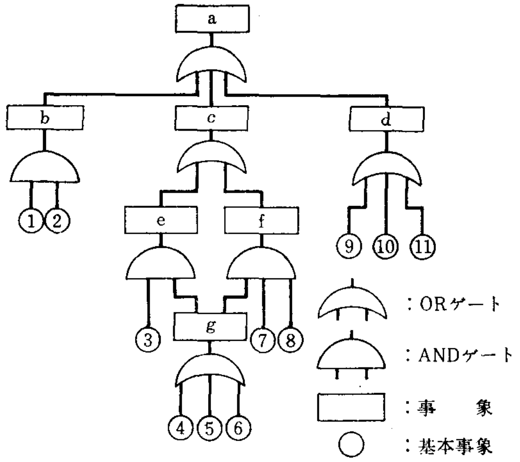

図 3 故障の木の例

(d) 確率的に生起しない故障の多さ

特に機械系では，設計の段階で各種のストレスを正確に推定することができないため，稼動中に突発故障が生じることが多い．このような，系の構造上の不具合に起因する故障は，構造の強化等により再発を防止できよう．ところで最適保全問題は確率的に故障する系を対象としているので，再現性に乏しい故障の多い系には適用されない．

その他，理論家のための理論で実際問題から乖離している，本質的な原理は基本モデルで尽くされている，といった批判もなされているが，上述した問題点の解明がこれらの批判を鎮めることに効果があると思われる．

5. 解決の糸口

そこで，上記の問題点を考慮に入れ，理論と実践との溝を埋める第1歩として，次の提案を行なう．粗さはご容赦願いたい．

まず，保全対象の機械・設備の上に起こり得るあらゆるタイプの故障とその故障原因を列挙し，それらの間の因果関係を論理記号で樹枝状に表現する，いわゆる故障の木の作成からスタートする．たとえば図3の故障の木が得られたとする．故障原因は，摩耗・劣化型のみでなく，人間のエラーによるものや構造上の欠陥によるものも含む．そこで次に，基本事象である最も細かいレベルでの

表 3　故障原因別の基本事象の分類

大別した故障原因	基本事象
構造上の不具合	3，10
人間の誤操作	1，6
摩耗・劣化	2，4，5，7，8，9，11

故障発生原因を，構造上の不具合によるもの，人間の誤操作によるもの，摩耗・劣化によるものに大別する．前2者に関しては，設計の段階でそのような故障が起こらないよう配慮するばかりでなく，必要な個所にモニターを設置するなど故障を未然に防ぐ策を講じる．これらの故障を故障の木から除去し，確率的に発生するとみなせる故障原因のみから成る故障の部分木を得る．この故障の部分木から系の故障を表わす回路網を作り，その否定操作をほどこすことにより系の信頼性を表わす回路網を作る．このとき，並列のサブシステムが直列に接続する並直列系で表現しておく．図3の故障の木において表3のように故障原因が大別されたとき，系の信頼性を表わす回路は図4のようになる．要素 x_i および系 ϕ は正常(故障)のとき1(0)をとるコヒーレント系を構成する．ここで $\overline{4}$ は基本事象4の否定，すなわち4なる故障原因が生起していない事象を示し，必ずしも物理的な要素を意味しない．

この系に対してマルコフ保全理論を適用する．状態の決め方にはいくつか可能性があるが，1つは重要度を見る方法が考えられる．状態として故障が生起した基本事象の和をとる．重要度としては次の構造的重要度が適当であろう．

$$B(i)=2^{-n}\sum_{x}[\phi(1_i,x)-\phi(0_i,x)]$$

$B(i)$：基本事象 i の構造重要度

別の状態の決め方として，並列事象から成るサブシステムをユニットとみなし，サブシステム内の事象で故障原因の生起したものの数をそのユニットの状態と規定すれば，多ユニットの保全問題となる．物理的，経済的に独立なユニットには単一ユニットの保全問題が適用される．ユニット間の依存性が強い場合には直列ユニットの保全問題となり，ショックモデルの適用を考慮すべきである．

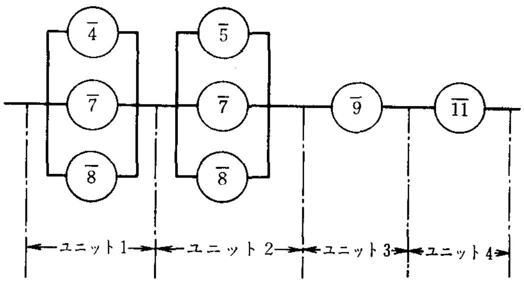

図 4　信頼性システム

状態の推移確率は，基本事象の生起確率が得られている場合には，それらの生起確率から求める．打切りデータの活用など少ないデータを有効に用いるとともに，稼動時のデータをも利用して推定値の逐次修正を行なう．コストとしては，各状態ごとに修理，取替，稼動費用を実測する他，修理時間を計測し，必要があればコスト換算を行なう．

こうして理論適用に必要な情報が得られるが，状態空間を単純に分割するＣＬ政策の中に十分良いものがあることが予想される．このように，多少の無理は承知の上で状態を明確化することが理論適用に重要な第1ステップであると思われる．

6.　マルコフ決定問題の感度分析

状態が明確化されても正確な推移確率や費用を求めることは不可能に近い．怪しいデータの下でＣＬ政策の最適性が保証されても不安は残る．このとき，推移確率などの値が多少ずれたとき，大勢に影響を及ぼすか否かを調べておくことは意味があると思われるので，次のような一般のマルコフ決定問題の感度分析について多少触れておく．

各離散時点に対象は1から s までのいずれかの状態をとる．その対象に対しアクション $a\in A$ がとられるときの対象の推移確率行列を P_a，費用(積)ベクトルを C_a で表わす．割引係数を α とする．状態 i のときアクション a をとる確率を x_{ia} とし，$x_a=(x_{1a},\cdots,x_{sa})'$ と記す．このとき，総期待費用の最小値は次のＬＰ問題の解で与えられ

る[3].

$$\begin{aligned}&\text{Min}\ \sum_{a\in A} \boldsymbol{C}_a \boldsymbol{x}_a\\ &\text{s.t.}\ \sum_{a\in A}(I-\alpha P'_a)\boldsymbol{x}_a=\boldsymbol{\beta} \qquad (2)\\ &\qquad \boldsymbol{x}_a \geqq 0,\ a\in A.\end{aligned}$$

ただし，$'$ は転置を，I は $s\times s$ 単位行列で，$\boldsymbol{\beta}$ は

$$\beta_i>0,\ \sum_{i=1}^{s}\beta_i=1$$

を満たす．

いま(2)をシンプレックス法で解き，最終タブローの基底ベクトルを $\boldsymbol{x}_B$，非基底ベクトルを $\boldsymbol{x}_N$ と書き，(2)を形式的に，

$$\begin{aligned}&\text{Min}\ \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{C}_N\boldsymbol{x}_N\\ &\text{s.t.}\ B\boldsymbol{x}_B+N\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{\beta} \qquad (3)\\ &\qquad \boldsymbol{x}_B\geqq 0,\ \boldsymbol{x}_N\geqq 0\end{aligned}$$

と表現する．

(a) 推移確率の変化 $(P_a)_{i\cdot}\to(P_a)_{i\cdot}+(\Delta\boldsymbol{p})'$

アクション a の推移確率行列の i 行に$(\Delta\boldsymbol{p})'$ ほどの不正確さがあるとしよう．もっとも，行和は1であるから$\sum_{j=1}^{s}\Delta p_j=1$ は満足される．

ケース 1 x_{ia} が(3)における非基底変数

$$\boldsymbol{x}_B=B^{-1}\boldsymbol{\beta}+\alpha x_{ia}B^{-1}\Delta\boldsymbol{p}-B^{-1}N\boldsymbol{x}_N \qquad (4)$$

より，目的関数値は，

$$z=\boldsymbol{C}_BB^{-1}\boldsymbol{\beta}+\alpha x_{ia}\boldsymbol{C}_BB^{-1}\Delta\boldsymbol{p}+(\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_BB^{-1}N)\boldsymbol{x}_N$$

と求まる．$\boldsymbol{e}_i$ を要素 i のみ1の単位ベクトルとし，

$$\Delta\equiv\{\Delta\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{C}_BB^{-1}(\boldsymbol{e}_i-\alpha(P_a')_{\cdot i}-\Delta\boldsymbol{p})\leqq C_{ia}\}$$

とおけば，$\Delta\boldsymbol{p}\in\Delta$ なる限り最適政策は不変であり，目的関数の値も変化しない．

ケース 2 x_{ia} が(3)における基底ベクトル

x_{ia} が $\boldsymbol{x}_B$ の第 k 要素であるとすると，$x_{ia}=(B^{-1}\boldsymbol{\beta})_k$($B^{-1}\boldsymbol{\beta}$ の第 k 要素)と近似して(4)に代入すれば，

$$\boldsymbol{x}_B=B^{-1}\boldsymbol{\beta}-B^{-1}N\boldsymbol{x}_N+\alpha(B^{-1}\boldsymbol{\beta})_kB^{-1}\Delta\boldsymbol{p}$$

が得られる．ケース1と同様の議論により，

$$\Delta\equiv\{\Delta\boldsymbol{p}\,|\,B^{-1}\boldsymbol{\beta}+\alpha(B^{-1}\boldsymbol{\beta})_kB^{-1}\Delta\boldsymbol{p}\geqq 0\}$$

とおけば，$\Delta\boldsymbol{p}\in\Delta$ の範囲で最適政策は不変で，目的関数値の変化量は $\alpha(B^{-1}\boldsymbol{\beta})_k\boldsymbol{C}_BB^{-1}\Delta\boldsymbol{p}$ で与えられる．

(b) コストの変化 $(\boldsymbol{C}_B,\boldsymbol{C}_N)\to(\boldsymbol{C}_B+\Delta\boldsymbol{C}_B,\boldsymbol{C}_N+\Delta\boldsymbol{C}_N)$

(3)の最適解はコスト変化後も実行可能解．また，

$$\Delta\equiv\{\Delta\boldsymbol{C}=(\Delta\boldsymbol{C}_B,\Delta\boldsymbol{C}_N)\,|\,(\boldsymbol{C}_B+\Delta\boldsymbol{C}_B)B^{-1}N\leqq\boldsymbol{C}_N+\Delta\boldsymbol{C}_N\}$$

とおくと，$\Delta\boldsymbol{C}\in\Delta$ の範囲で最適性も保たれる．目的関数の変化量は $\Delta\boldsymbol{C}_BB^{-1}\boldsymbol{\beta}$ である．特に，$\Delta\boldsymbol{C}_BB^{-1}N\leqq\Delta\boldsymbol{C}_N$ なる$(\Delta\boldsymbol{C}_B,\Delta\boldsymbol{C}_N)$は Δ に属する．

これらの値や範囲を，実際に理論を適用する場合にはチェックしておき，推移確率や費用のデータがどの位不正確であっても議論の大勢にあまり影響を与えないかを調べておくことは役に立つことと思われる．

最後にマルコフ性の仮定の検定に関しては，並列系における故障要素数など状態の定義が明確なものについては，マルコフ性は構造的に仮定して差しつかえないものが多いと考えられる．それ以外の場合には検定の必要があるが，データ量の問題もありマルコフ性の検定が困難と思われるときには，高橋氏[23]の提唱される弱マルコフ性さえあれば議論の展開ができるので，より容易に検定可能な弱マルコフ性の検定を行なうのがよろしいかと思う．

7. おわりに

より多くの事例研究をと叫ばれている今日，この位の事で最適保全問題の分野において理論と実践との橋渡しができると単純に考えている訳ではないが，両者の歩み寄りのきっかけにでもなればと思い，思いつくままに述べさせていただいた．

参考文献

[1] A. G. Bobos and E. N. Protonotarios: Optimal Systems for Equipment Maintenance and Replacement under Markovian Deterioration. *European J. of OR*, Vol. 2 (1978), 257-264

[2] C. Derman: On Optimal Replacement Rules

when Changes of State are Markovian. *Math. Optimization Tech.* (ed. R. Bellman), Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1963, 201–210

[3] C. Derman : *Finite State Markovian Decision Processes.* Academic Press, New York and London, 1970

[4] C. Derman and G. J. Lieberman : A Markovian Decision Model for a Joint Replacement and Stocking Problem. *Management Sci.*, Vol. 13, No. 9(1967), 609–617

[5] M. A. Girshick and H. Rubin : A Bayes Approach to a Quality Control Model. *Ann. of Math. Statist.*, Vol. 23(1952), 114–125

[6] Y. Hatoyama : Markov Maintenance Models with Repair. Ph. D. Dissertation, Dept. of OR and Stat., Stanford Univ., 1976

[7] Y. Hatoyama : On Optimal Policies for Multi-Repair-Type Markov Maintenance Models. *JORSJ*, Vol. 22, No. 2(1979), 106–122

[8] 鳩山由紀夫：保全性理論とその機械系への適用性. 機械工業における信頼性および保全に関する調査研究報告書(第2部第1章), 機械振興協会経済研究所, 1982, 195–216

[9] D. Kalin : A Note on "Monotone Optimal Policies for Markov Decision Processes". *Math. Prog.*, Vol. 15(1978), 220–222

[10] B. A. Kalymon : MachineReplacement with Stochastic Costs. *Management Sci.*, Vol. 18, No. 5(1972), 288–298

[11] E. Kao : Optimal Replacement Rules when Changes of State are Semi-Markovian. *JORSA*, Vol. 21, No. 6(1973), 1231–1249

[12] M. Klein : Inspection- Maintenance- Replacement Schedules under Markovian Deterioration, *Management Sci.*, Vol. 9, No. 1 (1962), 25–32

[13] P. Kolesar : Minimum Cost Replacement under Markovian Deterioration. *Management Sci.*, Vol. 12, No. 9(1966), 694–706

[14] 三根久, 河合一：信頼性・保全性の数理. 朝倉書店, 1982

[15] M. Ohashi and T. Nishida : Optimal Replacement Policy for Two-Unit System. *JORSJ.*, Vol. 24, No. 4(1981), 283–295

[16] W. P. Pierskalla and J. A. Voelker : A Survey of Maintenance Models : The Control and Surveillance of Deteriorating Systems, *Naval Res. Log. Quart.*, Vol. 23, No. 3(1976), 353–388

[17] D. Rosenfield : Markovian Deterioration with Uncertain Information-A More General Model. *Naval Res. Log. Quart.*, Vol 23, No. 3(1976), 389–405

[18] S. Ross : A Markovian Replacement Model with a Generalization to Include Stocking. *Management Sci.*, Vol. 15, No. 11(1969), 702–715

[19] R. F. Serfozo : Monotone Optimal Policies for Markov Decision Processes. *Math. Prog. Study 6*, North-Holland Pub. Com., Amsterdam, 1976, 202–215

[20] D. P. S. Sethi : Opportunistic Replacement Policies. The Theory and Applications of Reliability with Emphasis on Bayesian and Nonparametric Methods, Vol. II (ed. C. P. Tsokos et al.), 1977

[21] R. D. Smallwood and E. J. Sondik : The Optimal Control of Partially Observable Markov Processes over a Finite Horizon. *JORSA*, Vol. 21(1973), 1071–88

[22] K. Suzuki : On a Preventive Maintenance with Monitored System. *JORSJ.*, Vol. 22, No. 1(1979), 69–83

[23] 高橋幸雄：マルコフ性の仮定. オペレーションズ・リサーチ, **27**(1982), 453–458

[24] H. M. Taylor, III : Markovian Sequential Replacement Rules. *Ann. of Math. Statist.*, Vol. 36(1965), 1677–94

[25] R. C. Wang : Optimal Replacement Policy with Unobservable States. *J. Applied Probability*, Vol. 14(1977), 340–348