保全を行なう高信頼性システムの信頼度の漸近評価法

阿部 俊一

1. まえがき

システムの高信頼性を実現するためには，まず構成要素の信頼性を向上させる必要がある．しかし，製造技術の現状に制約された要素レベルの信頼度の限界を超えてシステムの高信頼性を達成し，これを維持するためには，システム構成に冗長性を持たせたうえ，保全を実施して要素の機能更新をはかりながら，システムを運用するのが普通である．こうした場合，システムが時間 t 以上にわたり機能を持続する確率(信頼度)や，いったん故障したシステムが時間 t 以内に機能を回復する確率(保全度)を評価することは，システムの経済的な設計方式や効率的な運用・保全方式を検討するうえで不可欠といえる．このため，

1° 特定の比較的簡単なシステム構成を持ち，

2° 各要素の寿命または修理時間の少なくとも一方は指数分布にしたがう，

と仮定し，マルコフ過程，セミ・マルコフ過程，マルコフ再生過程などの方法によってシステムの信頼度，保全度などを評価する研究が数多く行なわれている(たとえば文献［5］，［6］参照)．

しかし，上の1°または2°を仮定しない場合にはシステムの信頼度や保全度の厳密な評価はきわめて困難な問題となる．たとえば，上の2°を仮定せず，各要素の寿命分布も修理時間分布も，ともに一般分布の場合には，最も単純なシステムである2要素待機冗長システムの信頼度のラプラス変換式は求められている［6］が，2要素並列冗長システムの信頼度については，その implicit な評価法は示されている［9］けれども，それはまだ実用に供されるまでに至っていない．したがって，1°も2°も仮定せず，

3° 特定のシステム構成(要素結合)を前提としない一般のシステム

4° 各要素の寿命分布も修理時間分布も，ともに一般分布

という場合に，システムの信頼度や保全度の厳密な評価式を解析的に求めることは，少なくとも当分の間は，断念せざるを得ないであろう．しかし，幸いなことにシステムの信頼度や保全度の逐次近似的，あるいは，漸近的な評価は上の前提条件3°，4°のもとでも可能である．その1つは次節で概要を紹介する Gnedenko らの方法［7］である．彼らは，一般の単調構造システムに対して，各要素の故障率がシステムの現在の状態には依存するが過去の履歴とは無関係な一定値をとると仮定し，さらに各要素の修理時間の分布は要素別・修理窓口別に異なる一般分布と仮定したうえで，これらの要素の修理時間の期待値がすべて0に近づく場合，あるいは各要素の故障率がすべて0に近づく場合に，システム信頼度は漸近的に指数分布で表わされることを証明している．これはGnedenko らが文献［6］で示した出生死滅過程のモ

あべ しゅんいち 鉄道技術研究所

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

デルによる方法を一般化したものに相当している.

これに対して，筆者は文献［1］(1974年)で，各要素の寿命も修理時間も，ともに要素ごとに異なる一般分布にしたがい，要素の修理窓口が一定個数以上ある場合に，一般の単調構造システムの信頼度に対する逐次近似法を示した．この方法は上記のようなシステムの信頼度の過渡的挙動（動作開始後の比較的短時間内の動的挙動）を評価するのに有効であるが，システム信頼度の長時間にわたる漸近的挙動を解析するのには適していない．そこで筆者は上記の逐次近似法を発展させて，文献［2］(1976年)と［3］(1977年)では，各要素 i の寿命の平均値に対する修理時間の平均値の比 ρ_i がすべて0に近づくとき，上の前提3°, 4° を満たす冗長システムの信頼度が若干の弱い条件のもとで漸近的に指数分布になることを証明した．また上記の比 ρ_i がすべて0に近いある正の値を持つ場合，システム信頼度を上記の漸近指数分布で近似したときの誤差の評価式を与えた．さらに筆者は同じ問題を別の角度から考察し，システム信頼度 $R(t)$ を含む関数方程式を導き，この方程式の第1次近似解として $R(t)$ の指数分布近似が得られ，その第2次近似解から第1次指数分布近似の誤差の評価式が見通しよく導かれることを明らかにした［4］．この方法を発展させると，システム保全度やシステム・アベイラビリティの漸近評価式や近似評価式を導くことができ，またこれらの近似式にともなう誤差のオーダーを評価することもできる［4］．

本稿では，次節以下に主として Gnedenko らの文献［7］(1975年) の結果と筆者の文献［4］(1981年)の結果の概要を簡単に紹介する．

2. 一般モデルにおけるシステム信頼度の漸近評価法—Gnedenko らの方法—

Gnedenko らの文献［6, pp. 346-353］においてシステムが状態 $k=0,1,\cdots,m$ を持つ出生死滅過程として表現され，状態 m がシステム故障を表わす場合を解析している．この場合，状態推移 $k\to k+1$ および $k+1\to k$ の推移確率密度をそれぞれ $\lambda_k\alpha$ および $\mu_{k+1}(0\leqslant k<m)$ とし，システムが状態0から出発して初めて状態 m に達してシステム故障を起こすまでの時間を τ_m，その期待値を T_m とし，システム故障が時間 $T_m x$ まで生起しない確率 $\mathrm{P}\{\tau_m>T_m x\}$ は $\alpha\downarrow 0$ のとき漸近的に指数分布で表わされ，

$$(1)\quad \lim_{\alpha\to 0}\mathrm{P}\left\{\frac{\tau_m}{T_m}>x\right\}=e^{-x}\quad (x>0)$$

が成立するための必要十分条件を示している．ここで τ_m の期待値 T_m は，α が十分0に近いとき，

$$(2)\quad \frac{1}{T_m}\cong\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{m-2}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{m-1}}\alpha^{m-1}\times[\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{m-1}]$$

と評価される．

次に Gnedenko らは文献［7］(1975年) では上記のモデルを一般化して，次のようなモデルを考察している：システムは n 個の要素 $i=1,2,\cdots,n$ から構成され，各要素は下に述べるようにシステムの状態 e に依存した一定値を取る故障率をもって故障する；故障した要素はただちに修理窓口に送られ，先着順に修理を受ける；要素は修理によって完全に機能を回復し，機能回復後ただちに動作を開始する；時刻 t における要素 i の状態は，

$$e_i(t)=\begin{cases}0 & (\text{時刻 } t \text{ に要素 } i \text{ が正常})\\ 1 & (\text{時刻 } t \text{ に要素 } i \text{ が故障})\end{cases}$$

とし，時刻 t におけるシステムの状態はベクトル

$$e(t)=(e_1(t),e_2(t),\cdots,e_n(t))$$

で表わす；システムは状態ベクトル e にしたがって正常もしくは故障の2つの状態だけをとり，単調構造 (monotonic *or* coherent structure) を持つとする；すなわち，時刻 t のシステムの状態 f を，

$$f[e(t)]=\begin{cases}0 & (\text{状態 } e(t) \text{ でシステムが正常})\\ 1 & (\text{状態 } e(t) \text{ でシステムが故障})\end{cases}$$

とおくとき，2つの状態 $e=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ と $e'=$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

$(e_1', e_2', \cdots, e_n')$において，

(3)　$e_i \leqq e_i'(i=1, 2, \cdots, n)$ ならば，$f(e) \leqq f(e')$ とする；このシステムを正常［故障］状態 $f(e)=0[f(e)=1]$ にする状態ベクトル e の集合を E_+ $[E_-]$ とする；ベクトル $e=(e_1, \cdots, e_{i-1}, 0, e_{i+1}, \cdots, e_n)$ が E_+ に属し，かつ，$e(i)=(e_1, \cdots, e_{i-1}, 1, e_{i+1}, \cdots, e_n)$ が E_- に属するとすれば，これはシステムの故障状態 $e(i)$ のもとで1個の故障要素 i の修理が完了して正常状態に復帰すれば，これによってシステムも正常状態に復帰することを意味する．上記のような状態 $e(i)$ の集合を境界故障状態と呼び，これを Γ_- と表わす；システムが時刻 t に状態 $e(t)$ にあるとき，$(t, t+h)$ に要素 i が故障する確率は，$e(t)$ に依存するが t 以前のシステムの状態の履歴には無関係で，

(4)　$\lambda_i[e(t)]h+o(h)$

と仮定し，さらに $(t, t+h)$ に2個以上の要素が故障する確率は $o(h)$ と仮定する；ここで $\lambda(e)=\lambda_1(e)+\lambda_2(e)+\cdots+\lambda_n(e), \bar{\lambda}=\max_{e\in E_+}\lambda(e)$ と定義する；故障した要素 i を j 番目の修理窓口で修理するときの修理時間分布を $G_{ij}(t)$,

$$G(t)=\min_{i,j} G_{ij}(t),\ T=\int_0^\infty (1-G(t))dt,$$

とおく；時刻0に状態 $e(0)=(0, 0, \cdots, 0)$ にあったシステムが初めてのシステム故障を起こすまでの時間を τ とし，その期待値を $\mathrm{M}\tau$ とする．以上の前提のもとで Gnedenko らは，時刻 $\mathrm{M}\tau\cdot x$ までシステム故障が生起しない確率（システム信頼度）は漸近的に指数分布：

(5)　$\lim_{\bar{\lambda}T\to 0} \mathrm{P}\left\{\frac{\tau}{\mathrm{M}\tau}>x\right\}=\mathrm{e}^{-x}$

となることを示している．この式で問題なのは τ の平均値 $\mathrm{M}\tau$ の評価であるが，これは近似的に，

(6)　$\mathrm{M}\tau \cong 1/\lambda(0)q$

と表わされる．ここに $\lambda(0)=\lambda[e(0)]$, q は状態 $e(0)$ から出発したシステムが再び $e(0)$ にもどるまでの1再生周期の間にシステム故障が発生する確率である．文献［7］には，その漸近評価法が示されている：それを述べるために便宜上，システムの状態 e のもとでの要素 i の故障率を $\lambda_i(e)\alpha$ とおくと，α が十分0に近いとき，確率 q は漸近的に，

$$(7)\ q\equiv \Lambda\alpha^{s-1}/\lambda(0)$$
$$\cong \sum \frac{\lambda_{k(0)}(0)}{\lambda(0)}\lambda_{k(1)}(e^{(1)})\cdots\lambda_{k(s-1)}(e^{(s-1)})\alpha^{s-1}$$
$$\times \underset{0<x_1<\cdots<x_{s-1}}{\int\cdots\int} \bar{G}_{k(0)j(0)}(x_{s-1})\cdots$$
$$\bar{G}_{k(l-1)j(l-1)}(x_{s-1}-x_{l-1})$$
$$\times \exp\{-[\lambda(e^{(1)})(x_1-x_0)+\cdots$$
$$+\lambda(e^{(s-1)})(x_{s-1}-x_{s-2})]\alpha\}$$
$$\times dx_1\cdots dx_{s-1}\ (x_0\equiv 0)$$

で与えられる．ここに $\{k(0), \cdots, k(s-1)\}$ は境界故障状態集合 Γ_- に属する状態 $e=(e_1, \cdots, e_n)$ において故障状態 $(e_i=1)$ にある要素 i の集合であり，したがって s はシステム故障を起こす最小の故障要素数，l は $\min\{r, s-1\}$ を表わす．また $e^{(i)}$ はシステムの中で要素 $k(0), k(1), \cdots, k(i-1)$ が故障している状態を表わすベクトルである．(7)式は一見複雑そうに見えるが，意外に簡単に理解できる：(7)式の右辺の各項は，システムの中で最初にどれか1個の要素の故障が発生したという条件のもとでその要素が $k(0)$ であり，その後要素 $k(1), \cdots, k(s-1)$ がこの順番に故障し，かつ，要素の修理が1個も完了することなくシステム故障が発生する確率を表わしている．右辺の $\sum$ はすべての状態 $e\in\Gamma_-$，および e によって決まる要素 $k(0), \cdots, k(s-1)$ のすべての順列について和をとることを意味している．(6)，(7)の両式から，明らかに，

(8)　$\lim_{\alpha\to 0} \mathrm{P}\{\Lambda\alpha^s\tau>x\}=\mathrm{e}^{-x}\quad (\lambda(0)\alpha q\cong\Lambda\alpha^s)$

が得られる．これは，システムの状態 $e(0)$ の再生周期 τ' を状態 $e(0)$ の持続時間 τ_0 と，1個以上の要素が故障している時間の長さ τ_1 の和として $\tau'=\tau_0+\tau_1$ とおくとき，τ_0 はパラメータ $\lambda(0)\alpha$ の指数分布にしたがうこと，τ_0 にくらべて τ_1 は無視できること，およびシステム故障の発生はこの状態 $e(0)$ の再生点を確率 q で thinning したも

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

のと考えられること，に注意すれば，(5)，(8)両式が成立する理由は直観的に容易に理解できるであろう．

(7)式で特に修理窓口数 $r \geqslant s-1$；$G_{ij}(t)=G_i(t)$，その期待値を T_i；$\lambda_i(e)=\lambda_i$ とすると，システム故障発生時間の期待値の逆数は，

(9) $$1/M\tau \cong \lambda(0)\alpha q$$
$$=\sum \lambda_{k(0)}\lambda_{k(1)}\cdots\lambda_{k(s-1)}\alpha^s T_{k(0)}T_{k(1)}\cdots T_{k(s-1)}$$
$$\times(T_{k(0)}{}^{-1}+T_{k(1)}{}^{-1}+\cdots+T_{k(s-1)}{}^{-1})$$

となる．右辺の $\sum$ は，s 個の故障要素を持つすべての状態 $e \in \Gamma_-$ に関する和を表わす．(9)式は明らかに(2)式の一般化になっている．

また特に修理窓口数 $r=1$, $G_{ij}(t)=G(t)$ の場合，(7)式から，

(10) $$\Lambda \cong \sum \lambda_{k(0)}(0)\cdots\lambda_{k(s-1)}(e^{(s-1)})$$
$$\times\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(s-1)!}dG(x)$$

が得られる．上の(5)～(10)の各式を導く過程で，システムの状態 e が要素故障によって変わらないかぎり，各要素 i の故障率は一定値 $\lambda_i(e)$ をとるという(4)の仮定が本質的な役割を果たしていることはいうまでもない．

3. 一般の修理可能システムの信頼度の漸近評価

前節で述べた Gnedenko らのモデルはかなり一般的ではあるが，各要素の故障率はシステムの状態に応じて一定値をとるものと仮定していた．本節では各要素の寿命も修理時間も，ともに一般分布の場合について述べる．

まず，2要素待機冗長システムで2個の要素に共通な寿命分布 $F(t)$ と修理時間分布 $G(t)$ が，ともに一般分布の場合，2要素が新品の状態から出発したシステムで初めてシステム故障が起こるまでの時間 $\tau>t$ の確率 $R(t)$ は，

$$\alpha=\int_0^\infty \bar{G}(t)dF(t) \quad (\bar{G}(t)=1-G(t))$$

が十分0に近いとき，近似的に，

$$R(t)\cong e^{-\alpha\lambda t}$$

となることが知られている([6, p.333] 参照)．ここに λ は要素寿命の平均値の逆数であり，α は要素故障がシステム故障に結びつくための thinning の確率である．

2要素並列冗長システムの信頼度に対する指数分布近似に関しては，文献［8］(1981年)がある．

筆者は1975年から，さらに一般的な冗長システムの信頼度の指数分布近似について研究してきた．第1節で述べたように，文献［2］(1976年)と［3］(1977年)は文献［1］(1974年)の方法を発展させたものであるが，以下では，これらとはまったく別の着想で同じ問題を考察した文献［4］(1981年)の内容の一部を紹介することにしたい．

3.1 一般システムの確率モデル

前節に述べた Gnedenko らの場合と同様に n 個の要素 $i=1,\cdots,n$ から構成された単調構造システムで，そのすべてのパス（システムを動作可能にする動作可能な要素の最小集合）$A_1,\cdots,A_a$ とすべてのカット（システムを動作不能にする故障要素の最小集合）$B_1,\cdots,B_b$ が知られており，システムは冗長性：$2\leqslant|B_1|=\cdots=|B_c|<|B_{c+1}|\leqslant\cdots\leqslant|B_b|$ を持つとする；ここに $|B|$ は集合 B に含まれる要素個数を表わす．各要素 i の寿命分布 $F_i(t)$ と修理時間分布 $G_i(t)$ はともに一般分布とし，すべての $t>0$ において確率密度 $F_i'(t)=f_i(t)$, $G_i'(t)=g_i(t)$ が存在し，それらの平均値をそれぞれ $1/\lambda_i$, $1/\mu_i$；$\lambda_i/\mu_i=\rho_i$, $1+\rho_i=\sigma_i$ とおく．また $F_i(t)$ の2次のモーメント，$G_i(t)$ の k_0+2 次のモーメントの存在を仮定する；ただし，$k_0=\max\{0, |B_1|-m-1\}$, $m\geqslant1$ は修理窓口数とする．各要素は故障するとただちに修理窓口に送られ，先着順に修理され，修理完了後はただちに動作を始める；修理によって各要素の機能は完全に回復する；各要素の寿命と修理時間はそれぞれ独立とする．システムは時刻0には動作可能の状態にあり，その時点に動作可能［不能］状態にあった要素の集合を $C_0[D_0]$ とする．

3.2 主な記号

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

システム故障を特徴づけるため，次の２つの条件を満たす要素集合 $[I_\alpha, C_\alpha, D_\alpha]$ を考える：

(i)　$|I_\alpha|=1, I_\alpha C_\alpha=I_\alpha D_\alpha=C_\alpha D_\alpha=$空集合，
$I_\alpha+C_\alpha+D_\alpha=\{1,2,\cdots,n\}$；

(ii)　$I_\alpha+C_\alpha[I_\alpha+D_\alpha]$ は少なくとも１つのパス［カット］を含むが $C_\alpha[D_\alpha]$はパス［カット］を含まない．

この性質を満たす集合をすべて数えあげることができる［1］から，それらを $[I_\alpha, C_\alpha, D_\alpha](\alpha=1,2,\cdots,\nu)$と表わす．いま，時刻 t に $I_\alpha+C_\alpha[D_\alpha]$ の要素が動作［故障］しており，時刻 $t+dt$ には $C_\alpha[I_\alpha+D_\alpha]$ の要素が動作［故障］しているとすれば，上の条件(ii)から時刻 t にはシステムは正常であるが，$(t,t+dt)$に故障した要素 $i\in I_\alpha$ のためにシステム故障が発生することがわかる．これを“タイプ α のシステム故障”と呼ぶことにする．

ある時刻に要素 i が動作［故障］しているとき，その時刻における要素 i の“年令” u_i はその要素を使用［修理］し始めてからその時刻までの経過時間を表わすものとし，$\bar{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ を“年令ベクトル”と呼ぶことにする；$\bar{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$に対して，年令ベクトル $\bar{u}$ が$(\bar{v},\bar{v}+d\bar{v})$に“属する”とは $v_i<u_i\leqslant v_i+dv_i (i=1,2,\cdots,n)$ を満たすことと定義する．特に修理窓口数 $m=n$ の場合，次の記号を定義する：

(11)　$Q_{\alpha|\beta}(t,d\bar{v}|\bar{u}_\beta)dt\equiv$ある時刻にタイプ$\beta$のシステム故障が発生し，その直後における年令ベクトルが $\bar{u}_\beta$ であったという条件下で，さらに時間 t が経過した時点の年令ベクトルが$(\bar{v},\bar{v}+d\bar{v})$に属し，かつ$(t,t+dt)$ にタイプ α のシステム故障が発生する条件付確率（ただし特に $\beta=0$ の時，$\bar{u}_0$ は時刻０における初期条件として与えられた年令ベクトルを表わすとする）；

(12)　$p_\alpha(t,d\bar{v}|\bar{u}_0)dt\equiv$時刻０に年令ベクトル $\bar{u}_0$ で使用開始したシステムの**最初の**システム故障がタイプ α の故障であり，それが$(t,t+dt)$に発生し，かつ，時刻 t における年令ベクトルが$(\bar{v},\bar{v}+d\bar{v})$に属する条件付確率．

3.3　システム信頼度に対する指数分布近似

上の定義から，明らかに擬似再生型恒等式：

(13)
$$Q_{\alpha|0}(t,d\bar{v}|\bar{u}_0)=p_\alpha(t,d\bar{v}|\bar{u}_0)+\sum_{\beta=1}^{\nu}\int_0^t ds\int_{\bar{u}_\beta} p_\beta(s,d\bar{u}_\beta|\bar{u}_0)Q_{\alpha|\beta}(t-s,d\bar{v}|\bar{u}_\beta')$$

が成立する．ここに $\bar{u}_\beta,\bar{u}_\beta'$ はそれぞれタイプ β のシステム故障の直前，直後における年令ベクトルを表わす．いま，$Q_{\alpha|\beta}(t,d\bar{v}|\bar{u}_\beta)$が初期条件 $\bar{u}_\beta$にも時間 t にも無関係な定常項 $Q_\alpha(\bar{v})d\bar{v}$ とそれ以外の変動項 $\Psi_{\alpha|\beta}(t,d\bar{v}|\bar{u}_\beta)$の和として，

(14)
$$Q_{\alpha|\beta}(t,d\bar{v}|\bar{u}_\beta)=Q_\alpha(\bar{v})d\bar{v}+\Psi_{\alpha|\beta}(t,d\bar{v}|\bar{u}_\beta)$$

と表現されることに注意しよう．ただし，ここに

(15)
$$Q_\alpha(\bar{v})d\bar{v}=\frac{\lambda_i}{\sigma_i}f_i(v_i)dv_i\cdot\prod_{j\in C\alpha}\frac{\lambda_j}{\sigma_j}\bar{F}_j(v_j)dv_j\cdot\prod_{k\in D\alpha}\frac{\lambda_k}{\sigma_k}\bar{G}_k(v_k)dv_k$$

となり$(i\in I_\alpha)$，$\Psi_{\alpha|\beta}(t,d\bar{v}|\bar{u}_\beta)$も与えられた分布関数を使って表わすことができる．一方，システム信頼度 $R(t)$ は(12)の p_α を使って，

(16)
$$R(t)=1-\sum_{\alpha=1}^{\nu}\int_0^t ds\int_{\bar{v}} p_\alpha(s,d\bar{v}|\bar{u}_0)$$

と表わすことができる．(14)～(16)式を(13)の両辺に代入すると，

(17)
$$p_\alpha(t,d\bar{v}|\bar{u}_0)=R(t)Q_\alpha(\bar{v})d\bar{v}+q_\alpha(t,d\bar{v}|\bar{u}_0)$$

が得られる($q_\alpha(\cdots)$は既知の関数)．この両辺を $\bar{v}$ に関して積分し，α に関して加え合わせると，

(18)
$$-R'(t)=\Lambda R(t)+\sum_{\alpha=1}^{\nu}\int_{\bar{v}} q_\alpha(t,d\bar{v}|\bar{u}_0),$$

(19)
$$\Lambda\equiv\sum_{\alpha=1}^{\nu}\int_{\bar{v}} Q_\alpha(\bar{v})d\bar{v}=\frac{1}{\sigma_0}\sum_{\alpha=1}^{\nu}\lambda_{i\alpha}\prod_{j\in D\alpha}\rho_j,$$

を得る．ただし，$i_\alpha\in I_\alpha$, $\sigma_0=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ とする．(18)式からシステム信頼度 $R(t)$ の第１近似 $e^{-\Lambda t}$ が得られ，その誤差を $\Theta(t)$とおくと，

(19)
$$R(t)=e^{-\Lambda t}+\Theta(t)$$

となる．これを(18)式の両辺に代入すると，$\Theta(t)$を含む関数方程式が得られ，これから，

(20)
$$\Theta(t)=e^{-\Lambda t}\int_0^t e^{\Lambda x}\{\psi_*(x)-\psi_0(x)\}dx+\theta(t)$$

と表わすことができる．右辺の ψ_* と ψ_0 はいずれも与えられたモデルに関する条件と分布関数を

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

使って書き下すことができる関数である．本稿の末尾に付記した仮定Aをおくと$\Theta(t)$や$\theta(t)$の大きさを評価することができる．ただしこの仮定の各条件は実用上はほとんど気にする必要がない程度の弱い条件である[2]．結局，次の結論を得る．

"修理窓口数$m \geqq \max_{i=1,\cdots,a}\{n-|A_i|\}$のとき，システム信頼度$R(t)$に対する指数分布近似(19)，(20)が成立し，仮定Aのもとで$\theta(t)=O(\lambda_0^{2\delta_0})$ $(\delta_0 \equiv \min_{i=1,\cdots,n}\{\delta_i, 2-a_{2i}\})$となる"．

"修理窓口数$m \geqq |B_1|-1$のとき，システム信頼度$R(t)$に対する指数分布近似

(21)　$R(t)=e^{-\Lambda_0 t}+\Theta_0(t)$　(Λ_0は(23)式参照)

が成立し，仮定Aのもとで$\Theta_0(t)=O(\lambda_0^{\delta_0})$となる"．

"修理窓口数$1 \leqq m < |B_1|-1$のとき，システム信頼度$R(t)$に対する指数分布近似

(22)　$R(t)=e^{-\Lambda_* t}+\Theta_*(t)$　(Λ_*は(23)式参照)

が成立し，仮定Aのもとで$\Theta_*(t)=O(\lambda_0^{\delta_*})$となる$(\delta_* \equiv (1+k_0)\delta_0-k_0)$"．ここに，

(23)
$$\Lambda_0=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j\in B_i}\lambda_j\prod_{k\in B_{ij}}\rho_k,$$
$$\Lambda_*=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j\in B_i}\int_0^\infty H_{ij}(x)dx,$$
$$H_{ij}(x)=\prod_{h\in B_i}\lambda_h\cdot k_0 x^{k_0-1}$$
$$\times\sum_{\{j_1,\cdots,j_m\}\subset B_{ij}}\prod_{k=1}^{m}\int_x^\infty \bar{G}_{j_k}(u_{j_k})du_{j_k},$$
$$B_{ij}=B_i-\{j\}.$$

4.　あとがき

筆者の文献［4］では，前節に紹介した事項のほか，システムの保全度とアベイラビリティの漸近評価，適正な予備車両数の査定および座席予約用コンピュータ・システムの信頼度評価への応用例などが示されているが，ここでは省略する．本稿で紹介した各モデルはいずれも柔軟性と一般性を持つから，今後広く応用されると思われる．

付　記

仮定A　"$\lambda_0=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$に対し$\lambda_i=l_i\lambda_0$とし，分布$F_i(x)$のパラメータを変化させて$\lambda_i\to 0(\lambda_0\to 0)$とするとき，

$\lambda_i^2\int_0^\infty x^2 f_i(x)dx\to a_{0i}$，$\int_0^\infty \bar{F}_i(x|u_i)dx\leqq a_1\lambda_0^{-a_{2i}}$，

$F_i(1+u_i)/\bar{F}_i(u_i)\leqq a_0\lambda_0^{\delta_i}(a_{0i}>1, 0<\delta_i\leqq 1, 1\leqq a_{2i}<2$，ただし，$\delta_i=1$もしくは$a_{2i}=1)$

とし，また分布$G_i(x)$を固定して，

$\int_0^\infty \bar{G}_i(x|v_i)dx\leqq b_0$

とする；ここにu_i, v_iを含む不等式はそれぞれ$\bar{F}_i(u_i)>0$，$\bar{G}_i(v_i)>0$を満たす任意の$u_i, v_i\geqq 0$に関して一様に成立し，$a_{0i}, a_0, a_1, a_{2i}, b_0, \delta_i, l_i$はいずれも$\lambda_i$に無関係な正の定数とする；ただし，$\bar{F}_i(x|u_i)=\bar{F}_i(x+u_i)/\bar{F}_i(u_i)$，$\bar{F}_i(x)=1-F_i(x)$；$\bar{G}_i$についても$\bar{F}_i$と同様とする"．

引　用　文　献

［1］ Abe, S.: An Approach to Reliability Evaluation of General Networks with Repairable Components, *JORSJ*, Vol. 17, No. 2 (1974)

［2］ Abe, S.: The Asymptotic Exponential Failure Law for General Redundant Repairable Systems, Part I, *Rep. Stat. Appl. Res.* Vol. 23, No. 2 (1976)

［3］ Abe, S.: The Asymptotic Exponential Failure Law for General Redundant Repairable Systems, Part II, *Rep. Stat. Appl. Res.*, Vol. 24, No. 1 (1977)

［4］ 阿部俊一：高信頼性ネットワークの信頼性保全性評価法とその応用，鉄道技研報告 No. 1179, 1981

［5］ Barlow, R. E. et al.: *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, 1965

［6］ Gnedenko, B. V. et al.: *Mathematical Method of Reliability Theory*, Academic Press, 1969

［7］ Gnedenko, B. V. et al.: Оченка Надежности Сложных Восстанавливаемых Систем, Техн. Киберн., No. 4 (1975)

［8］ Kaplan, N. L.: Another Look at the Two-Lift Problem, *J. Appl. Prob.*, Vol. 18, No. 3 (1981)

［9］ Ohashi, M. et al.: A Two-Unit Paralleled System with General Distribution, *JORSJ*, Vol. 23, No. 4 (1980)

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．