

コヒーレント・システム

西田俊夫・大鑄史男

1. はじめに

本特集の編集者から依頼された表題は、一般化されたコヒーレント・システムについてであった。ふつう、部品とかそれらから構成されたシステムの状態としては、正常状態と故障状態の2つしか考えない。一般化したシステムというのは、この2状態だけではなく、他の多くの状態をとりうるような多状態をもつシステムのことである。

多状態システムに関する研究は最近かなり進んできてはいるが、本質的には2状態の場合と類似の結果がほとんどであり、多状態固有の興味ある結果はあまり得られていない。

それで本稿では、いたずらに複雑にするのをさけるため2状態に限って述べることにした。ただし、種々の定義において、そのまま多状態にただちに拡張できる形で与えてある。そのために、普通の定義と少し異なるものもある。その代表的なものは直列、並列システムの定義である。その定義は普通の定義より少しゆるい形だが、そのまま多状態の場合へ拡張できるようになっている。

はじめにコヒーレント・システムの構造を調べて、ついでシステムの信頼度、種々の寿命分布のクラスとそれらのシステムにおける保存性について述べることにする。主要な結果は定理としてあげているが、証明はすべて省略してある。それに

ついては、各定理につけてある文献番号にもとづいて、末尾の参考文献を参照されたい。

2. コヒーレント・システムとは

n 個の部品からできているシステムを考える。各部品とシステムの状態としては、正常状態と故障状態の2つだけであるとする。故障状態を0、正常状態を1で表わす。このとき、部品 i の状態空間は $C_i = \{0, 1\}$ ($i=1, 2, \dots, n$)である。同様にシステムの状態空間は $S = \{0, 1\}$ であるとする。この0と1からなる2状態の集合は全順序集合であり、0は最小元、1は最大元である。

n 個の部品の状態の組は直積空間

$$C(n) = \prod_{i=1}^n C_i$$

の要素としての n 次元ベクトルで表わされる。これらの部品からできたシステムの構造を特徴づけるものは $C(n)$ から S 上への写像 φ であり、これをシステムの構造関数という。この写像は全射である。ここで上記の記号を用いて n 個の部品からなる2状態システムを定義しておこう。

定義1 ($C(n), S, \varphi$)の組を n 個の部品からなる2状態システムという。

この定義はシステムの状態が n 個の部品の状態によってのみ決まることを表わしており、その決まり方が構造関数と呼ばれる写像 φ で与えられることになる。多状態システムも状態空間の要素の個数が2より多いだけで、同様に定義される。

にしだ としお, おおい ふみお 大阪大学

次に、 n 個の部品の状態の組を表わすベクトルの集合としての直積空間 $C(n)$ での順序を考えよう。この空間は半順序集合であるために、最小 (\min) とか最大 (\max) が存在するとは限らないので、 \inf (下限) とか \sup (上限) の記号を用いることにする。順序はすべて \leq の記号で表わす。また特に断らないかぎり、ベクトル記号の \mathbf{x} とか \mathbf{y} は $C(n)$ の要素であるとする。たとえば、3個の部品からなるシステムで、 $\mathbf{x}=(1,0,0)$ 、 $\mathbf{y}=(0,0,1)$ のとき、 \mathbf{x} と \mathbf{y} の \min は存在しないが、 $\inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}=(0,0,0)$ である。

定義 2 構造関数 φ が単調増加であるとき、2 状態システムは単調システムであるという。 φ が単調増加であるとは、 $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ のとき $\varphi(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{y})$ となることをいう。

単調システムにおいては、ある部品が故障状態から正常状態にもどったときに、システムの状態が逆に正常状態から故障状態に移ることはありえないことがわかる。ここで $C(n)$ の要素 \mathbf{x} に関して次の記号を用いる。

$$(k_i, \mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, k, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ (k=0, 1)$$

$$(\cdot_i, \mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

この記号によって部品 i に関するベクトルの集合

$$R_i(\varphi) = \{(\cdot_i, \mathbf{x}) \mid \varphi(0_i, \mathbf{x}) \neq \varphi(1_i, \mathbf{x})\} \\ (1 \leq i \leq n)$$

を定義する。

集合 $R_i(\varphi)$ が空集合 (\emptyset) であれば、

$$\varphi(0_i, \mathbf{x}) = \varphi(1_i, \mathbf{x})$$

が任意の (\cdot_i, \mathbf{x}) について成り立ち、部品 i がシステムの状態を決定するのにまったく関与しないことになり、 i 以外の $(n-1)$ 個の部品によってシステムの状態が決まる。

定義 3 2 状態システムにおいて $R_i(\varphi) \neq \emptyset$ である時、部品 i は関連性をもつ (relevant) という。

部品 i が関連性をもつということは、システムの状態を決定するのに何らかの形で部品 i が関与していることを表わしている。部品 i がシステム

にどの程度関与しているかの度合を表わすものとして $R_i(\varphi)$ の要素の個数を用いることがある[3]。

以上の定義を用いて、目的とするコヒーレント・システムを次のように定義する。

定義 4 2 状態システムが単調システムであり、すべての部品が関連性をもつとき、そのシステムをコヒーレント・システムという。

普通、単調システムとかコヒーレント・システムの定義において、

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$$

としたとき、条件として、

$$\varphi(\mathbf{0}) = 0, \quad \varphi(\mathbf{1}) = 1$$

を課すことが多いが、ここでは構造関数 φ がシステムの状態空間 S への全射としていることから、これらの条件は不必要となる。

次に、直列システムと並列システムの定義に移ろう。そのために n 個の部品の状態の組としてのベクトルの集合

$$V_0(\varphi) = \{\mathbf{x} \mid \varphi(\mathbf{x}) = 0\},$$

$$V_1(\varphi) = \{\mathbf{x} \mid \varphi(\mathbf{x}) = 1\}$$

を考える。これらはそれぞれ、システムが故障状態および正常状態であるようなベクトルの集合を表わしている。

定義 5 単調な 2 状態システムで、

$$\inf V_1(\varphi) \in V_1(\varphi)$$

あるとき、このシステムを直列システムという。

定義 6 単調な 2 状態システムで、

$$\sup V_0(\varphi) \in V_0(\varphi)$$

であるとき、このシステムを並列システムという。

普通は、システムを構成するどの部品が故障してもシステムが故障するとき、直列システムと呼び、システムを構成するすべての部品が故障したときだけシステムが故障するとき、並列システムという。この定義と比べて、上の 2 つの定義は少し奇異な感を与えるかもしれない。しかし本質的にはあまり変わらなく、またこのように定義しておくことが、そのまま多状態システムでの直列とか並列システムの定義に一般化できるのである。

ただし、厳密には上の定義は普通の定義より少し弱いものである。つまり、普通の定義であれば、直列システム、並列システムはコヒーレント・システムであるが、上の定義によれば、いつでもそうなるとは限らない。その事情は次の定理により明らかになる。

表 1

x_1	x_2	x_3	φ_s	φ_p
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

定理 1 [16] 2 状態システムが直列コヒーレント・システムであるための必要十分条件は、

$$\inf V_1(\varphi) = (1, 1, \dots, 1)$$

となることである。また、並列コヒーレント・システムであるための必要十分条件は、

$$\sup V_0(\varphi) = (0, 0, \dots, 0)$$

となることである。ここで、直列または並列システムであるが、コヒーレント・システムでないような簡単な例を 1 つ与えておこう。

例 1 構造関数 φ_s, φ_p が表 1 で与えられるような 2 つの 2 状態システムを考えよう。

このとき、

$$V_1(\varphi_s) = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1)\},$$

$$V_0(\varphi_p) = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\},$$

であるから、

$$\inf V_1(\varphi_s) = (0, 1, 1) \in V_1(\varphi_s)$$

$$\sup V_0(\varphi_p) = (1, 0, 0) \in V_0(\varphi_p)$$

であり、定義 5 および 6 により、 φ_s, φ_p を構造関数とするシステムはそれぞれ直列システムおよび並列システムである。ところが、これらは定理 1 の条件を満たしていないから、ともにコヒーレント・システムではない。もちろん、この例では、表 1 からわかるように、

$$R_1(\varphi_s) = \phi, R_1(\varphi_p) = \phi$$

であるから、部品 1 はどちらのシステムでも関連性をもたないことからコヒーレントではない。

定理 1 は、コヒーレントである直列システムとは、システムが正常状態であるためには、すべての部品が正常状態でなければならないようなシ

テムであることを述べている。部品の状態 x_i ($1 \leq i \leq n$) が 0 か 1 しかとらないことを考えて、直列コヒーレント・システムの構造関数は、

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \end{aligned}$$

と表わすことができる。

同様に、並列コヒーレント・システムの構造関数は、

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) \end{aligned}$$

となる。

直列システムと並列システムの特徴づけとして次の定理をあげておこう。ここで記号

$$x \wedge y = \inf \{x, y\}, \quad x \vee y = \sup \{x, y\}$$

を用いる。

定理 2 [3] 2 状態システムが直列システムであるための必要十分条件は $C(n)$ の任意の要素 x, y に関して、

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$$

が成り立つことである。また、並列システムであるための必要十分条件は、

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$$

が成り立つことである。

この定理は、並列システムでの冗長化の効果は部品レベルでもシステム・レベルでも同じであることを表わしている。直列システムでの直列化についても同様である。

3. パスとカット

ここでは、単調システムの構造関数を決定する問題を考えよう。単調システムでは、システムが故障状態および正常状態であるようなベクトルの集合 $V_0(\varphi)$ および $V_1(\varphi)$ に関して、

$$V_0(\varphi) \cup V_1(\varphi) = C(n), \quad V_0(\varphi) \cap V_1(\varphi) = \phi$$

であるから、 $V_1(\varphi)$ か $V_0(\varphi)$ のどちらか一方がわかればよい。 $V_1(\varphi)$ を決めるにはその極小元がわかればよい。ただし、その極小元は 1 つとは限らない。その極小元 x で正常状態にある部品の集合

を,

$$U_1(\mathbf{x}) = \{j | x_j = 1\}$$

と表わそう.

定義 7 単調システムで $V_1(\varphi) = \{\mathbf{x} | \varphi(\mathbf{x}) = 1\}$ の極小元をこのシステムの極小パスという. 極小パスが x_1, x_2, \dots, x_p であるとき,

$$A_i = U_1(x_i), \quad (1 \leq i \leq p)$$

を極小パス集合という.

同様に, $V_0(\varphi)$ を決めるには, その極大元がわかればよい. その極大元も 1 つとは限らない. 極大元 y について, 故障状態にある部品の集合を,

$$U_0(\mathbf{y}) = \{j | y_j = 0\}$$

とする.

定義 8 単調システムで $V_0(\varphi) = \{\mathbf{x} | \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$ の極大元をこのシステムの極小カットという. 極小カットが y_1, y_2, \dots, y_k であるとき,

$$B_i = U_0(y_i), \quad (1 \leq i \leq k)$$

を極小カット集合という.

極小パス集合か, 極小カット集合のどちらか一方がわかれば, 単調システムは完全に決まる.

例 2 (2-out-of-3 システム)

3 つの部品からなるシステムで, システムが正常状態にあるためには, 少なくとも 2 つの部品が正常でなければならないシステムが 2-out-of-3 システムである. これは 1 つのコヒーレント・システムである.

このとき,

$$V_1(\varphi) = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

$$V_0(\varphi) = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

である. $V_1(\varphi)$ の極小元, つまり極小パスは,

$$(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$$

であり, 極小パス集合は $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ である.

たとえば, 部品 1 と 2 が正常状態であれば, 部品 3 の状態にかかわらずシステムは正常状態にある. 極小パス集合は, システムを正常状態に保つために, 正常でなければならない部品の最小限の組を表わしている. これから, 2-out-of-3 システム

の構造関数は,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \max\{\min\{x_1, x_2\}, \min\{x_1, x_3\}, \min\{x_2, x_3\}\}$$

と表わされる. 同様に, 極小カット集合を考えることによって,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \min\{\max\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_3\}, \max\{x_2, x_3\}\}$$

とも表わすことができる.

例 2 からわかるように, 一般に単調システムの構造関数 φ は, 極小パス x_1, x_2, \dots, x_p による極小パス集合 $A_i (1 \leq i \leq p)$ と, 極小カット集合 $B_i (1 \leq i \leq k)$ を用いて,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq p} \min_{j \in A_i} x_j = \min_{1 \leq i \leq k} \max_{j \in B_i} x_j$$

と表わされる. この表わし方は, システムの信頼度の限界を求めたり, 構造関数を具体的に与えるときに用いられる[3].

4. システムの信頼度

システムの寿命を調べるために, システムの時間的な動きを表わす確率過程を考えよう. ここでは単調な 2 状態システムに限って話を進める.

部品 i の時間的な動きを表わす確率過程を,

$$\{X_i(t), t \geq 0\}$$

とし, 時刻 t で部品 i が正常状態であれば $X_i(t) = 1$ であり, 故障状態であれば $X_i(t) = 0$ であるとする. 各部品の動きは独立であるとして, $X_i(t)$ は $1 \leq i \leq n$ に関して独立であるとする. また, $X_i(t)$ の実現値を表わす見本過程は右連続で単調減少であるとする.

ここで,

$$\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$$

とおけば, システムの動きを表わす確率過程は,

$$\{\varphi(\mathbf{X}(t)), t \geq 0\}$$

となる. この見本過程も右連続単調減少である.

さて, 部品 i の寿命は, 部品 i が初めて故障するまでの時間であり, それを表わす確率変数を,

$$T_i = \inf \{t | X_i(t) = 0\}$$

としよう. この T_i は非負の実数値をとる. 同様

に、システムの寿命を表わす確率変数を、

$$T = \inf \{t | \varphi(X(t)) = 0\}$$

とする。

前節で定義した極小パス集合 $A_i (1 \leq i \leq p)$ と極小カット集合 $B_i (1 \leq i \leq k)$ を用いて、

$$T = \max_{1 \leq i \leq p} \min_{j \in A_i} T_j = \min_{1 \leq i \leq k} \max_{j \in B_i} T_j$$

と表わすことができる。

いま、部品 i の寿命 T_i の分布関数を F_i 、システムの寿命 T の分布関数を F とする。また、

$$\bar{F}_i = 1 - F_i, \quad \bar{F} = 1 - F$$

とおく。確率過程の単調性と右連続性から $T_i > t$ であることは $X_i(t) = 1$ であることであり、また $T > t$ であることと $\varphi(X(t)) = 1$ であることは同じである。そこで、システムが正常状態であるような部品の状態の組としてのベクトルの集合 $V_1(\varphi)$ によれば、

$$\bar{F}(t) = P_r\{\varphi(X(t)) = 1\} = P_r\{X(t) \in V_1(\varphi)\}$$

となる。このことから $\bar{F}(t)$ は $F_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$) の多項式で表わされることがわかる。それを次のように表現する。

定義9 システムの寿命分布について、

$$\bar{F}(t) = h(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t))$$

と表わし、この h を 2 状態単調システムの信頼度関数という。

信頼度関数を求める例を 1 つあげておこう。

例3 例2であげた 2-out-of-3 システムの信頼度関数を求めてみよう。

$V_1(\varphi) = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ であるから、

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &= P_r\{X(t) \in V_1(\varphi)\} \\ &= P_r\{(X_1(t), X_2(t), X_3(t)) = (1, 1, 0)\} + \\ &P_r\{(X_1(t), X_2(t), X_3(t)) = (1, 0, 1)\} \\ &+ P_r\{(X_1(t), X_2(t), X_3(t)) = (0, 1, 1)\} \\ &+ P_r\{(X_1(t), X_2(t), X_3(t)) = (1, 1, 1)\} \\ &= \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)(1 - \bar{F}_3(t)) + \bar{F}_1(t)(1 - \bar{F}_2(t)) \\ &\bar{F}_3(t) + (1 - \bar{F}_1(t))\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) + \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) \\ &\bar{F}_3(t) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) + \bar{F}_1(t)\bar{F}_3(t) + \bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) \\ &- 2\bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) \end{aligned}$$

となり、信頼度関数 h は、

$$h(y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 - 2y_1 y_2 y_3$$

で与えられる。このように h は、 $V_1(\varphi)$ が与えられれば容易に求められる。

この節と前節では 2 状態単調システムについての議論をしたが、単調システムで関連性をもたない部品がなければコヒーレントであるから、実際的にはそれほどコヒーレント・システムを弱めたところでの話ではない。

5. 寿命分布のクラスとシステムにおける保存性

部品の寿命分布のモデルとしてはいろいろな分布が考えられてきており、最も基本的なものは指数分布であるが、より一般的な分布のクラスとして、IFR (Increasing Failure Rate) とか NBU (New Better than Used) などが用いられる。ここではこれらの分布のクラスの性質と、それがシステムの寿命分布とどのような関係にあるかを調べていこう。

寿命分布を表わす非負の実数値をとる確率変数を X とする。

定義10 条件つき確率 $P_r\{X > t + \Delta | X > t\}$, $\Delta > 0$ が $(-\infty, \infty)$ で t に関して単調減少であるとき、 X またはその分布は IFR であるという。

定義11 $0 < \alpha \leq 1, t > 0$ に対して、

$$P_r\{X > at\} \geq [P_r\{X > t\}]^\alpha$$

が成り立つとき、 X は IFRA (IFR Average) であるという。

定義12 $s > 0, t > 0$ に対して、

$$P_r\{X > s + t\} \leq P_r\{X > s\} \cdot P_r\{X > t\}$$

が成り立つとき、 X は NBU であるという。

定義10において、 t の範囲を $-\infty$ までとったのは後で述べる分布のクラスの関係において原点での確率分布がある場合を考慮したためである。

X の分布 G が確率密度 g をもつとき、 X が IFR であることは $g(t)/[1 - G(t)]$ が t に関して単調増加であることと同じである。 $g(t)/[1 -$

$G(t)$ は時刻 t での瞬時故障率を表わしており、それが単調増加であることは、使えば使うほど故障しやすくなることを示している。このことから実際に多くの部品の寿命分布は IFR の性質をもつと考えられる。指数分布、アーラン分布、ワイブル分布 (形状パラメータが 1 以上) などは IFR 性をもっている。

ところが、次の例からわかるように、IFR 性をもつ部品から構成された単調システムの寿命は必ずしも IFR 性をもたない。

例 4 3つの部品からなる単調システムで、構造関数が、

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \max\{x_1, \min\{x_2, x_3\}\}$$

で与えられたとき、システムの信頼度関数は、

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_1(t) + \bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) - \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t)$$

となる。

そこで各部品の寿命が指数分布

$$\bar{F}_1(t) = \bar{F}_2(t) = \bar{F}_3(t) = e^{-t}$$

であるとすれば、 $F(t)$ の確率密度を $f(t)$ として、

$$f(t)/\bar{F}(t) = [e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}] / [e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}]$$

となる。このグラフを書いてみれば単調増加でないことがすぐにわかる。

単調システムにおいて、部品の寿命分布のクラスがシステムにおいても保存されるものとして、IFRA が考えられる。

定理 3 [6] 単調システムにおいて保存性をもつ最小の寿命分布のクラスで指数分布を含むものは IFRA である。ただし弱収束を考える。

瞬時故障率が、

$$r(t) = g(t) / [1 - G(t)]$$

であるとき、

$$\frac{1}{t} \int_0^t r(u) du$$

が t に関して単調増加であることが IFRA 性である。つまり、IFRA は故障率が平均的に増加する。したがって、IFR であれば IFRA であるが、システムにおける保存性からは、IFRA のほうが重要であるといえよう。

一方、NBU の性質は取替え問題に関連して導入されたが、この性質は単調システムで保存性をもっている。分布のクラスの関係としては、

$$\text{IFR} \Rightarrow \text{IFRA} \Rightarrow \text{NBU}$$

であり、これらについては種々の性質が調べられている [1], [6], [12]。

単調システムにおいて、IFR 性が必ずしも保存されないという例 4 をすでにあげたが、それが保存される条件は次の定理で与えられる。

定理 4 [10] 単調システムでつねに IFR 性が保存されるための必要十分条件は、直列システムであることである。

IFR 性が保存されるシステムとしては、次の定理で与えられるものがある。

定理 5 [2][12] 部品の寿命分布がすべて同じで IFR であれば、それから作られた k -out-of- n システムの寿命は IFR である。

ここで、 k -out-of- n システムとは、 n 個の部品からできたシステムが正常であるためには、少なくとも k 個の部品が正常でなければならないようなシステムである。1-out-of- n システムは並列システムであり、 n -out-of- n システムは直列システムである。

寿命分布のクラスの関係からわかるように、NBU はきわめて広いクラスであるが、システムの寿命分布が指数分布になるときの関係として次の定理が成り立つ。

定理 6 [16] n 個の独立な部品の寿命分布 F_1, F_2, \dots, F_n が NBU であるような単調システムの寿命分布 F が指数分布であるとき、

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_{i_1}(t) \cdot \bar{F}_{i_2}(t) \cdots \bar{F}_{i_k}(t)$$

$$F_{i_j}(t), (1 \leq j \leq k) \text{ は指数分布}$$

となるような $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ の組 (i_1, i_2, \dots, i_k) が存在する。

この定理から、システムの寿命分布が指数分布であるための必要十分条件は、本質的にはそのシステムが直列システムであることであるといってもよい。

例5 並列システムでは、

$$\bar{F}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \{1 - \bar{F}_i(t)\}$$

であるが、 $F(t)$ が指数分布であれば、定理6から、ある*i*が存在して、

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_i(t) = e^{-\lambda_i t}, \bar{F}_j(t) = 0, t \geq 0, j \neq i$$

となる。

例6 例3で述べたように、2-out-of-3システムの寿命分布 F について、

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) = & \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) + \bar{F}_1(t)\bar{F}_3(t) + \bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) \\ & - 2\bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) \end{aligned}$$

であった。このとき、 F が指数分布であるとすれば、定理6から、 $i=1, 2, 3$ のどれかの*i*について $\bar{F}_i(t) = 0, t \geq 0$ が成り立たねばならない。たとえば $\bar{F}_1(t) = 0$ であるとすれば $\bar{F}(t) = \bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t)$ である。ところで、例2で調べたように、このシステムの極小パス集合は $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ であった。したがって、このとき部品1はつねに故障状態であり、システムの動きはパス集合 $\{2, 3\}$ だけに関係している。つまり、このシステムは実質的には部品2と3の直列システムになる。

一般に単調システムの寿命分布が指数分布のときには、極小パス集合のどれか1つだけが実質的に機能し、それ以外の極小パスは機能しない。そ

のことはシステムが実質的には直列システムであることになる。したがって、寿命分布が原点で退化せざるをえないような部品がでてくる。そのような部品がないとき、つまり、

$$0 < F_i(t) < 1, t > 0, 1 \leq i \leq n$$

であるときにはどうなるであろうか。

定理7 [14] 寿命分布 F_1, F_2, \dots, F_n がNBUであるような独立な n 個の部品からできたコヒーレント・システムの寿命分布 F がパラメータ λ をもつ指数分布であり、 $0 < F_i(t) < 1, t > 0, 1 \leq i \leq n$ であれば、このシステムは直列システムであり、

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \lambda, \lambda_i > 0 (1 \leq i \leq n)$$

となるような $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ が存在して、 F_i は λ_i をパラメータとする指数分布となる。

これまで述べてきたことをまとめれば、定理7の条件のもとでは、極小パスはただ1つしか存在せず、寿命分布が指数分布であるようなコヒーレント・システムを作るには、直列システムしかないことになる。

参考文献

- [1] Barlow, R. E., A. W. Marshall and F. Proschan. (1963). Properties of Reliability Distributions with Monotone Hazard Rate. *The Annals of Mathematical Statistics*. Vol. 34, pp. 375-389
- [2] Barlow, R. E. and F. Proschan. (1965). *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley and Sons. Inc.
- [3] Barlow, R. E. and F. Proschan. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt Rinehart and Winston. Inc.
- [4] Barlow, R. E. and Alexander S. Wu. (1978). Coherent Systems with Multi-State Components. *Mathematics of Operations Research*. Vol. 3, pp. 275-280
- [5] Birnbaum, Z. W., J. D. Esary and S. C. Saunders. (1961). Multi-Component Systems and Structures and Their Reliability. *Technometrics*. Vol. 3, pp. 55-77
- [6] Birnbaum, Z. W., J. D. Esary and A. W. Marshall. (1966). A Stochastic Characteriza-

次号予告

特集 ORのはじまり

ORと私	小野勝次
学会創設前に考えていたこと	河田龍夫
民間輸送機開発のOR	近藤次郎
私のORのはじまり	藤森謙一

連載講座

APLとOR(6)
 建築計画における人間行動のシミュレーション
 渡辺仁史

- tion of Wear-Out for Components and Systems. *The Annals of Mathematical Statistics*. Vol. 37, pp. 816-824
- [7] Block, H. W. and T. M. Savits. (1979). Systems with Exponential Life and IFRA Components Lives. *The Annals of Statistics*. Vol. 7, pp. 911-916
- [8] El-Newehi, E., F. Proschan and J. Sethuraman. (1978). Multistate Coherent Systems. *Journal of Applied Probability*. Vol. 15, pp. 675-688
- [9] Esary, J. D. and F. Proschan. (1963). Coherent Structures of Nonidentical Components. *Technometrics*. Vol. 5, pp. 191-209
- [10] Esary, J. D., A. W. Marshall and F. Proschan. (1970). Some Reliability Applications of the Hazard Transform. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 18, pp. 849-860
- [11] Griffith, W. S. (1980). Multistate Reliability Models. *Journal of Applied Probability*. Vol. 17, pp. 735-744
- [12] Marshall, A. W. and F. Proschan. (1972). Classes of Distributions Applicable in Replacement with Renewal Theory Implications. *Proceeding of the 6-th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Vol. 1, pp. 395-415
- [13] Mine, H. (1959). Reliability of Physical System. *IRE CT-6 Special Supplement*, pp. 138-151
- [14] 中島恭一, 大和一晴 (1981). 多状態単調構造システムとその構造関数の性質. 電子通信学会技術研究報告, R81-41
- [15] Ohi, F. and T. Nishida. Generalized Multistate Coherent Systems. submitted to *Journal of the Japan Statistical Society*
- [16] 大鑄史男. (1982). システムの構造と確率的挙動について. *Proceeding of the 17-th SSOR*. pp. 38-43
- [17] Ross, S. M. (1979). Multivalued State Component Systems. *The Annals of Probability*. Vol. 7, pp. 379-383
- [18] Schechner, Z. (1981). A Note on Two IFR Systems. *Naval Research Logistics Quarterly*. Vol. 28, pp. 685-692