都市・地域の空間・時系列モデル

中村 良平

1. はじめに

一般に，都市・地域は，人口移動とか財の移出入の現象をみてもわかるように，各々が単独で成立しているものではなく，都市・地域間相互の依存性の中でオープン・システムとして成立っているものといえる．最近，このような観点から都市のダイナミズムを，各都市を孤立したものではなく，都市群あるいは都市システムとしてとらえて分析していくことが重要になってきている．

従来，都市の動学モデルの代表的なものとしては，システム・ダイナミックス手法による単一都市の動向を分析の中心とするところの都市シミュレーション・モデル([2]，[13]等)とか，Lowryタイプの都市内の土地利用予測のためのモデル([17] [18])などがあげられよう．また，地域(県・圏域)単位においては，人口とか諸経済活動の予測を目的とした地域計量経済モデルが考えられる．これらは，それぞれ，シミュレーション手法とか推定方法および予測手法において優れた点をもっており，都市・地域間相互の問題にも拡張されうるが，空間的相関の取扱いが欠如しているため都市・地域間相互の影響がモデルに明示的に現われていない．また，動学モデルに説明変数として含まれる変数の時間ラグの次数についても恣意的に決定される場合が多い．

なかむら　りょうへい　筑波大学

これらの欠点を解消し，空間の次元を明示的に導入する方法として，空間・時系列(spatial time series) 分析を用いたモデルがある．これは，Box-Jenkins [10] により一般化された時系列分析と Cliff-Ord[11] らによる空間系列分析とを統合した形のもので，最近約10年間イギリスを中心として発展してきたモデル分析手法である．

ここでは，都市・地域空間を対象とした空間・時系列分析のモデルについて，モデルの定式化(表現)を中心に，モデルの同定(identification)，推定の順にその概要を紹介していく．

2. 空間・時系列モデルの定式化

通常時系列分析では，大別するとモデルは次の2つの場合で表わされる．

1) 自己回帰・移動平均型；ARMA (p,q) 注1)

$$Y_t+a_1Y_{t-1}+\cdots+a_pY_{t-p}=e_t+b_1e_{t-1}+\cdots+b_qe_{t-q}$$

2) 一般的伝達関数型；TF(p,q) 注2)

$$Y_t+c_1Y_{t-1}+\cdots+c_pY_{t-p}=d_0X_t+d_1X_{t-1}+\cdots+d_qX_{t-q}$$

ここで，$\{Y_t\}$，$\{X_t\}$は時系列変数，$\{e_t\}$は攪乱項の系列，$\{a_i\}$，$\{b_i\}$，$\{c_i\}$，$\{d_i\}$はそれぞれ推定されるべきパラメータである．特に，1)において $q=0$ の場合は p 次の自己回帰モデル；AR(p)，$p=0$ の場合は q 次の移動平均モデル；MA(q)，また，2)において $p=0$ は分布ラグモデル；TF$(0,q)$，$q=1$ は自己回帰・伝達関数モデル；各々 TF$(p,$

1)と呼ばれている[8].

1)は，1つの変数のみでもって現象を記述する場合とか1つのデータ系列のみが利用可能な場合のモデルであり，2)は，システムのインプットX_tとアウトプットY_tの両方のデータ系列が，それぞれ説明変数と被説明変数として利用可能な場合のモデルである.

1)，2)では空間的相互作用は考慮されていない．しかし，都市・地域を対象とした動学（時系列）分析では，たとえ1つの都市あるいは地域を対象としても，そこには都市間の人口移動とか交易のような物理的な相互作用，あるいは隣接した都市，地域間でのスピル・オーバー効果のような空間的な相互関連性がある．そこで，都市・地域の動学(時系列)分析では，先に述べたような通常の時系列モデルに対し，空間的要素を組みこむようにモデルを拡張する必要がある.

2.1　空間・時系列モデルへの拡張—(1)—

拡張方法は，対象とする都市・地域空間のとらえ方にとってさまざまであるが，まず最も一般的に空間の次元を時系列モデルに組みこんだものについて，2地域の場合を例にとって考えてみよう.

いま，$U_t^i, Y_t^i (i=1,2; t=1,\cdots,T)$を，それぞれ時間$t$における地域$i$のインプットとアウトプットとすると，時間のラグ項を含んでない最も単純な定式化で，

$$\text{(i)}\quad \begin{bmatrix} Y_t^1 \\ Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{0(11)} & b_{0(12)} \\ b_{0(21)} & b_{0(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_t^1 \\ U_t^2 \end{bmatrix}$$

のような2地域の伝達関数型のモデルとして表わせる．これは計量経済学的には，U_t^iを説明変数，Y_t^iを被説明変数とする2地域の時系列データにもとづく回帰式の行列表現である．(i)において，$b_{0(ij)}$は推定されるべきパラメータである．特に$i \neq j$の場合，すなわち，パラメータ行列の非対角要素$b_{0(ij)}$は，j地域のインプットのi地域へおよぼす影響を示すパラメータであって，この$b_{0(ij)}$が地域間の相互作用を明示的に表わしている.

(i)において，インプットの時間ラグをq次まで導入した形は，分布ラグ・伝達関数モデルとして，

$$\text{(ii)}\quad \begin{bmatrix} Y_t^1 \\ Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{0(11)} & b_{0(12)} \\ b_{0(21)} & b_{0(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_t^1 \\ U_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1(11)} & b_{1(12)} \\ b_{1(21)} & b_{1(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{t-1}^1 \\ U_{t-1}^2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} b_{q(11)} & b_{q(12)} \\ b_{q(21)} & b_{q(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{t-q}^1 \\ U_{t-q}^2 \end{bmatrix}$$

と表わされる．これはY_t^iがU_t^iのみならず，$t-q$期までのインプット$U_{t-k}^i (k=1,\cdots,q)$のレベルにも依存して決まることを表わしたモデルである．ここで，$U_{t-1}^i = zU_t^i$, $U_{t-2}^i = z^2 U_t^i$, $\cdots$, $U_{t-q}^i = z^q U_t^i$で定義される時間ラグのオペレータzを導入すると(ii)は，

$$\text{(ii)}'\quad \begin{bmatrix} Y_t^1 \\ Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{0(11)} + b_{1(11)}z + \cdots + b_{q(11)}z^q & b_{0(12)} + b_{1(12)}z + \cdots + b_{q(12)}z^q \\ b_{0(21)} + b_{1(21)}z + \cdots + b_{q(21)}z^q & b_{0(22)} + b_{1(22)}z + \cdots + b_{q(22)}z^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_t^1 \\ U_t^2 \end{bmatrix}$$

と書き改められる．(i)の場合と同様で，(ii)，(ii)′における各パラメータ行列の非対角要素は，地域間の相互作用のレベルを表わしている.

また，過去のアウトプットの値$Y_{t-k}^i (k=1,\cdots,p)$がU_t^iとともにインプットとして現在のY_t^iを決定するような自己回帰・伝達関数型の2地域モデルは，(ii)′と同様の時間ラグ・オペレータzを用いて，

$$\text{(iii)}\quad \begin{bmatrix} Y_t^1 \\ Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1(11)}z + \cdots + a_{p(11)}z^p & a_{1(21)}z + \cdots + a_{p(21)}z^p \\ a_{1(21)}z + \cdots + a_{p(21)}z^p & a_{1(22)}z + \cdots + a_{p(22)}z^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t^1 \\ Y_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{0(11)} & b_{0(12)} \\ b_{0(21)} & b_{0(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_t^1 \\ U_t^2 \end{bmatrix}$$

と表わせる．ただし，$a_{1(11)}, \cdots, a_{p(22)}; b_{0(11)}, \cdots, b_{0(22)}$は推定されるべきパラメータである.

したがって，Y_t^iの自己回帰項とU_t^iの分布ラグ項を含む一般的な伝達関数型の2地域モデルは，(ii)′と(iii)を統合した形で，

$$\text{(iv)}\quad \begin{bmatrix} Y_t^1 \\ Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1(11)}z + \cdots + a_{p(11)}z^p & a_{1(12)}z + \cdots + a_{p(12)}z^p \\ a_{1(21)}z + \cdots + a_{p(21)}z^p & a_{1(22)}z + \cdots + a_{p(22)}z^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t^1 \\ Y_t^2 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} b_{0(11)}+b_{1(11)}z+\cdots+b_{q(11)}z^q & b_{0(12)}+b_{1(12)}z+\cdots+b_{q(12)}z^q \\ b_{0(21)}+b_{1(21)}z+\cdots+b_{q(21)}z^q & b_{0(22)}+b_{1(22)}z+\cdots+b_{q(22)}z^q \end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_t^1\\U_t^2\end{bmatrix}$$

と書ける．

(i)～(iv)は，いずれも時系列の伝達関数モデルを2地域という空間システムに拡張したものであったが，変数が Y_t^i のみの ARMAモデルも同様に多地域に拡張される．また，多変数の空間・時系列のモデルにも拡張できる [7；ch. 2].

これらのモデルの実際の地域への適用例としては，[5] [6] [7；pp. 443-446] がある．特に [7；pp. 443-446] は，失業者数の時系列データに関して，イギリスを北西部 (Y_t^1) とそこを除くイギリス全土 (Y_t^2) の2地域に分け，2地域の空間システムを，

$$\begin{bmatrix} 1+a_{1(11)}z+a_{2(11)}z^2+a_{3(11)}z^3 & 0 \\ a_{0(21)}+a_{1(21)}z+a_{2(21)}z^2+a_{3(21)}z^3 & 1+a_{1(22)}z+a_{2(22)}z^2+a_{3(22)}z^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_t^1\\Y_t^2\end{bmatrix}=0$$

と定式化している．これは，2地域の自己回帰型モデルの例である．

2.2 空間・時系列モデルへの拡張―(2)―

上述の (i)～(iv) のようなモデルは，容易にN地域多変数モデルへ拡張でき，それだけ一般的ではあるが，方程式の変数が多い場合とか対象地域の数Nが大きい場合には，モデルの特定化の手続きが複雑になり，同時に推定すべきパラメータの数も多くなって推定の際に自由度を大きく減じてしまうという欠点がある．

このような欠点を解消するための1つの方法としては，都市・地域間の空間的位置関係に着目し空間的なつながり（隣接状況）を1つの空間系列 (spatial series) としてとらえ，時系列における時間ラグに対応する概念を空間系列においても定義することが考えられる[11].

いま空間系列についてのラグ，空間ラグを，ある地域に着目してその地域と共通の境界線を有し

			3			
		3	2	3		
	3	2	1	2	3	
3	2	1	◎	1	2	3
	3	2	1	2	3	
		3	2	3		
			3			

図 1 空間ラグの例

隣接している地域を1次の空間ラグ，あいだに1つの地域を介してつながっている地域を2次の空間ラグ，という具合に定めていくとする．図1は，メッシュで区切られた49地域に対して，◎印の地域を中心に見た空間ラグの次数を3次まで各メッシュに示した例である．

ここでわかるように，時間ラグは一方向性であって，時間 t，地域 i のある変数 Y_t^i の k 次の時間ラグは Y_{t-k}^i だけなのに対して，Y_t^i の s 次の空間ラグは1つの地域だけとは限らない．そこで，ある地域 i に対して s 次の空間ラグでつながっている地域 j が J_s 地域あるとすると，これらの地域を1つにまとめるため，

$$\sum_{j \in J_s} w_{ij}=1 \qquad (1)$$

で与えられる外生的なウエイト w_{ij} を定義する注3)．時系列のラグ・オペレータと同様に，L^s を s次の空間ラグを示すラグ・オペレータとすると，(1)を用いて地域 i に対して s 次の空間ラグでつながっている地域の Y_t^i は，

$$L^s Y_t^i=\sum_{j \in J_s} w_{ij} Y_t^j \quad (L^0 Y_t^i=Y_t^i) \qquad (2)$$

と表わされる．

理解を容易にするため，図2で示したような4つの地域(都市)の場合を例にとって考えてみる．ここで，時間 t における地域 $i(i=1,\cdots,4)$のインプット U_t^i が実質所得水準，アウトプット Y_t^i が $[t, t+1]$ 間の人口の社会増加率を表わすものとす

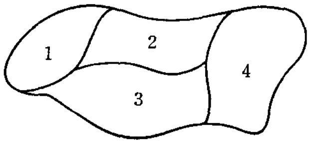

図 2　4地域の例

る．このように変数を定義すると，$Y_t^i(i=1,\cdots,4)$を説明するモデルの定式化としては，人口の社会増加率 Y_t^i がその地域のみの過去の増加率とか実質所得によって決まるという定式化より，むしろ周辺地域のそれらのレベルとの相互関係によって Y_t^i が決まるようなモデルの定式化のほうがより自然といえよう．すなわち，空間的な地域間の相互作用により $Y_t^i(i=1,\cdots,4)$のレベルが決まるものと考えられる．

このような考えで，(2)の空間ラグの概念を用いて図2の各地域についてモデルを定式化する．ただし，簡単化のため時間ラグは1次のみとし，空間ラグ s 次のウエイト w_{ij} は s 次でつながっている地域の数 J_s で1を割った均等なウエイトを与えるものとする．

まず，地域1については，

$$\begin{aligned}Y_t^1 &= a_{10}^1 Y_{t-1}^1 + a_{11}^1\left(\tfrac{1}{2}Y_{t-1}^2+\tfrac{1}{2}Y_{t-1}^3\right)+a_{12}^1 Y_{t-1}^4\\ &\quad + b_{10}^1 U_{t-1}^1 + b_{11}^1\left(\tfrac{1}{2}U_{t-1}^2+\tfrac{1}{2}U_{t-1}^3\right)+b_{12}^1 U_{t-1}^4\\ &= a_{10}^1 Y_{t-1}^1 + a_{11}^1(L^1 Y_{t-1}^1)+a_{12}^1(L^2 Y_{t-1}^1)\\ &\quad + b_{10}^1 U_{t-1}^1 + b_{11}^1(L^1 U_{t-1}^1)+b_{12}^1(L^2 U_{t-1}^1)\end{aligned} \tag{3}$$

地域2に対しても同様に，

$$\begin{aligned}Y_t^2 &= a_{10}^2 Y_{t-1}^2 + a_{11}^2\left(\tfrac{1}{3}Y_{t-1}^1+\tfrac{1}{3}Y_{t-1}^3+\tfrac{1}{3}Y_{t-1}^4\right)\\ &\quad + b_{10}^2 U_{t-1}^2 + b_{11}^2\left(\tfrac{1}{3}U_{t-1}^1+\tfrac{1}{3}U_{t-1}^3+\tfrac{1}{3}U_{t-1}^4\right)\\ &= a_{10}^2 Y_{t-1}^2 + a_{11}^2(L^1 Y_{t-1}^2)+b_{10}^2 U_{t-1}^2\\ &\quad + b_{11}^2(L^1 U_{t-1}^2)\end{aligned} \tag{4}$$

と表わせる．また，地域3は(4)式と，地域4は(3)式とそれぞれ同じ形になる．ここで，a_{ij}^k, b_{ij}^k $(i=1;j=0,1,2;k=1,\cdots,4)$ は，時間ラグ，空間ラグ，そして各地域にとって固有のパラメータである．

上の例で示した定式化は，地域の数が N, Y_t^i, U_t^i の時間ラグの次数がそれぞれ p, q で，空間ラグの次数が s であるような一般的な定式化に拡張できて，空間・時間の伝達関数モデルとして，

$$Y_t^i = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{S} a_{ks}^i (L^s Y_{t-k}^i) + \sum_{k=1}^{q}\sum_{s=0}^{S} b_{ks}^i (L^s U_{t-k}^i) \tag{5}$$

と表わされる．同様に，空間・時間の ARMA モデルも，$\{c_{ks}^i\}, \{d_{ks}^i\}$ をパラメータとして，

$$Y_t^i = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{S} c_{ks}^i (L^s Y_{t-k}^i) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{S} d_{ks}^i (L^s e_{t-k}^i) + e_t^i \tag{6}$$

と書ける．ただし，e_{t-k}^i は地域 i，時間 $t-k$ の攪乱項，r はモデルに含まれる e_t^i の時間ラグの次数である．

(5)のように定式化したモデルによって，各地域の固有のパラメータを推定した実証例としては，[16] があげられる．[16] は外国人労働者数 (Y_t^i) の空間・時間的な広がりについて労働需要数 (X_t^i) との関係を，オランダの11の行政地域に対し，各々28個の時系列データ(1967—1974)を用いて，(7)式のモデルによって実証を行なっている．

$$Y_t^i = a_{02}^i Y_{t-2}^i + a_{12}^i (L^1 Y_{t-2}^i) + b_{02}^i X_{t-2}^i \tag{7}$$
$(i=1,\cdots,11)$

3.　空間・時系列モデルの同定

モデルを特定化する際の重要な問題として，システムのラグ構造の推定，言い換えると，どこまでのラグをモデルに含めるかというシステム同定の問題があげられる[注4)]．都市地域の動学分析でのラグの次数は先験的あるいは恣意的に与えられる場合が多いが，空間・時系列分析では，ラグの構造は時系列分析の場合と同様にデータ系列の値から統計的に推定される [3] [4] [10]．本節では空間・時間ラグの次数の決定方法について，相関関数を用いる時間領域のアプローチについてその概要を紹介する．詳細は，文献 [7] [16] [19] などを参照されたい．

時系列モデルにおいては，2つの変数 $X_t(t=1,\cdots,T)$ と $Y_t(t=1,\cdots,T)$ の間の時間ラグ k の相互相関係数の推定値 $r_{XY}(k)$ は，

表 1 $m(k,s;l,h)$ の空間・時間(自己)相関行列

$$
\begin{array}{cc|c}
 & \overbrace{\begin{array}{ccc} s=0 & \cdots & s=S \end{array}}^{k=1} \quad \cdots & \overbrace{\begin{array}{ccc} s=0 & \cdots & s=S \end{array}}^{k=K} \\
l=1\left\{\begin{array}{c} h=0 \\ \vdots \\ h=S \end{array}\right. & \begin{array}{ccc} m(0,0;0,0) & \cdots & m(0,S;0,0) \\ \vdots & & \vdots \\ m(0,0;0,S) & \cdots & m(0,S;0,S) \end{array} & \begin{array}{ccc} m(K,0;0,0) & \cdots & m(K,S;0,0) \\ \vdots & & \vdots \\ m(K,0;0,S) & \cdots & m(K,S;0,S) \end{array} \\
\hline
\vdots & & \\
\hline
l=K\left\{\begin{array}{c} h=0 \\ \vdots \\ h=S \end{array}\right. & \begin{array}{ccc} m(0,0;K,0) & \cdots & m(0,S;K,0) \\ \vdots & & \vdots \\ m(0,0;K,S) & \cdots & m(0,S;K,S) \end{array} & \begin{array}{ccc} m(K,0;K,0) & \cdots & m(K,S;K,0) \\ \vdots & & \vdots \\ m(K,0;K,S) & \cdots & m(K,S,K,S) \end{array}
\end{array}
$$

$$r_{XY}(k)=\sum_{t=k+1}^{T}(Y_t-\bar{Y})(X_{t-k}-\bar{X})/\{\sum(X_t-\bar{X})^2\sum(Y_t-\bar{Y})^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

と定義される．また，Y_t の時間ラグ k の自己相関係数の推定値 $r_{YY}(k)$ は，

$$r_{YY}(k)=\sum_{t=k+1}^{T}(Y_t-\bar{Y})(Y_{t-k}-\bar{Y})/\sum_{t=k+1}^{T}(Y_t-\bar{Y})^2 \tag{9}$$

と定義される．ただし，$\bar{X}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_t$, $\bar{Y}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}Y_t$.

(8)とか(9)は時系列モデルの相関構造を把握するためのものであるが，これのアナロジーで空間的な相関を調べるための係数についてもいくつか研究がなされている([12][14][20]など).

空間的相関係数とは，たとえば，変数 $Y_t^i(i=1,\cdots,N)$ が空間的に有意な関係にあるかどうかを調べるもので，都市・地域間の相互関連性を見るのに大いに役に立つ係数である．

代表的な空間的自己相関係数に，Moran [20] の隣接係数と呼ばれているものがある．Moran の s 次の隣接(空間ラグ)係数 $m_{YY}(s)$ は，前節で定義した空間ラグ・オペレータ L^s を用いて，

$$m_{YY}(s)=\sum_{i=1}^{N}(Y_t^i-\bar{Y}_t)(L^sY_t^i-\bar{Y})/\sum_{i=1}^{N}(Y_t^i-\bar{Y}_t)^2 \tag{10}$$

ここで N は対象地域の数で，$\bar{Y}_t=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_t^i$ である．

空間・時系列モデルにおいては，(9) と (10)を統合して空間・時間自己相関係数なるものを定義する必要がある．これは，Martin-Oeppen [19], Hordijk-Nijkamp [14] らによってあらゆる空間時間ラグの組合せにまで一般化された形で，時間ラグ k，空間ラグ s と時間ラグ l と空間ラグ h との間の空間・時間自己相関係数 $m_{YY}(k,s;l,h)$ は，

$$m_{YY}(k,s;l,h)=\sum_{t=v+1}^{T}\sum_{i=1}^{N}(L^sY_{t-k}^i-\bar{Y})(L^hY_{t-l}^i-\bar{Y})/\{[\sum_{t=v+1}^{T}\sum_{i=1}^{N}(L^sY_{t-k}^i-\bar{Y})^2]^{1/2}\times[\sum_{t=v+1}^{T}\sum_{i=1}^{N}(L^hY_{t-l}^i-\bar{Y})^2]^{1/2}\} \tag{11}$$

と定義されている．ただし，$v=\max(k, l)$ で，$\bar{Y}=\frac{1}{T}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}Y_t^i$ である．また，(11) で $L^hY_{t-l}^i-\bar{Y}$ を $L^hX_{t-l}^i-\bar{X}$, $\bar{X}=\frac{1}{T}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}X_t^i$ と置き換えると，Y_t^i と X_t^i の間の空間・時間相互相関係数が得られる．

空間・時系列モデルの空間ラグ，時間ラグの次数は，(11)を要素とする行列(表 1)において，要素 $m(k,s;0,0)$ の余因子 $c(k,s;0,0)$ によって，

$$\phi(k,s;0,0)=-c(k,s;0,0)/\{c(0,0;0,0)\times c(k,s;k,s)\}^{1/2}$$

と定義される偏相関係数 ϕ の値に基づき時間ラグの次数は $k=1, 2, \cdots$，空間ラグの次数は $s=1,2,\cdots$，とした場合，それぞれ ϕ の値が急速に減衰する直前の s, k の値をラグの次数として決定する注5).

$k=1,2,\cdots;s=1,2,\cdots$，とした偏相関係数の値が減衰しない場合は，元の時系列とか空間系列のデータに非定常性が存在している可能性がある．特に，トレンドとか周期変動のような非定常性の場

合は，通常時間ないしは空間の差分をとることが行なわれる注6).

4. 空間・時系列モデルの推定［1］

2節の定式化において示したような都市・地域の空間・時系列モデルにおいては，都市・地域に固有のパラメータを求めるため，モデルは同時の連立方程式体系となり，推定は各都市・地域の時系列データにもとづいて行なわれる．

いま，推定すべき同時連立体系の方程式が，識別可能で，各方程式の右辺をモデルの先決変数のみで表現した誘導形によって，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_t^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_t^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boldsymbol{x}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^N \end{bmatrix} \qquad (12)$$

と表わされているものとする．ここで，Nは対象地域の数，$\boldsymbol{y}_t^i(i=1, \cdots, N)$は従属変数の$(T\times 1)$の観測値ベクトル，$\boldsymbol{x}^i(i=1, \cdots, N)$は方程式内に含まれる$M$個の先決変数についての$(T\times M)$の行列である．また，$\boldsymbol{\beta}^i$, $\boldsymbol{e}^i$は，各々未知パラメータのベクトルと撹乱項のベクトルである．

(12)において，各方程式の撹乱項が平均ゼロの均一分散で一定値σ_{ii}であり，系列相関がない，すなわち，

$$E[\boldsymbol{e}^i]=0$$

$$E[\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^{i\prime}]=\sigma_{ii}\boldsymbol{I}^{\text{注7)}} \quad \text{for all } i \qquad (13)$$

であるならば，通常の最小二乗法は$\boldsymbol{\beta}^i$の最良線形不偏推定量を与える．さらに，$E[\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^{j\prime}]=0(i\neq j)$の場合には，$i=1, \cdots, N$に各々最小二乗法を適用して$\boldsymbol{\beta}^i(i=1, \cdots, N)$を推定でき，同時に推定してもより良い効率性は得られない．

しかしながら，$E[\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^{j\prime}]\neq 0$の場合，すなわち地域$i$と地域$j$との間に空間的自己相関が存在している場合には，Zellner［23］によって提示された“一見無関係な回帰式”における推定方法を用いて同時推定を行なったほうが，より高い効率をもつ$\boldsymbol{\beta}^i$の推定値が得られる．

(13)の下で，$\boldsymbol{e}$の分散・共分散行列は，

$$E(\boldsymbol{ee}')=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots\cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & & \\ \sigma_{N1} & \cdots\cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{I}$$

$$=\Sigma \otimes \boldsymbol{I} \qquad (14)$$

となる．ただし，⊗はクロネッカー積を表わす．

(14)を用いて(12)に一般化最小二乗法を適用すると，$\boldsymbol{\beta}$のより効率的な最良線形不偏推定量（エイトキン推定量）

$$\boldsymbol{\beta}=[\boldsymbol{x}'(\Sigma^{-1}\otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}]^{-1}\boldsymbol{x}'(\Sigma^{-1}\otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{y}$$

が得られる．実際の推定では(14)が未知なため，各方程式に通常の最小二乗法を適用して計算された残差が(12)の成分を推定するのに利用される．

以上，一般化最小二乗法を連立方程式体系に拡張したZellnerの効率推定法の適用について簡単に示した．特に，(12)の仮定をはずした場合については，Hordijk-Nijkamp［16］によってZellnerの方法のより一般形が提示されている．またここでは触れられなかったが，最尤法によるアプローチがOrd［21］，Heppel［15］らによって，特に空間系列データの推定問題において示されている．

5. おわりに

本稿では，モデルの推定までを述べるに留まってしまい，実証分析の結果をのせるまでにはいたらなかったが，実際にこのような都市・地域の空間・時系列モデルを政策決定に生かせるようにするためには，引続いて予測の作業を行なう必要がある．また都市計画に際しては，土地利用規制など種々の規制が行なわれており，ここでのモデルに対応させて考えると，これは目的関数をもった空間・時系列の制御の問題に帰着できよう．これらについての詳細は［7］［9］などを参照されたい．

最後に，空間・時系列モデルを用いて都市・地域問題のような社会・経済現象を分析していくには，今後，都市・地域経済学の理論から出発したモデルとの対応づけが望まれよう．

参考文献

［1］ Arora, S. S. and Brown, M.: Alternative

Approaches to Spatial Autocorrelation. *International Regional Science Review*, 2 (1977), 67–78

[2] Battay, M.: Modelling Cities as Dynamic Systems. *Nature*, 231(1971), 425–428

[3] Bennett, R. J.: Process Identification for Time Series Modeling in Urban and Regional Planning. *Regional Studies*, 8(1974), 157–174

[4] Bennett, R. J.: The Representation and Identification of Spatiotemporal Systems. *Trans. Inst. of British Geographers*, 66(1975), 73–94

[5] Bennett, R. J.: Dynamic Systems Modelling of The North-west Region: 1. Spatio-temporal representation and identification. *Environment* and Planning A, 7 (1975), 525–538

[6] Bennett, R. J.: Dynamic Systems Modelling of The North-west Region: 2. Estimation of the spatio-temporal policy model. *Environment and Planning A*, 7(1975), 539–566

[7] Bennett, R. J.: *Spatial Time Series*, Pion, London, 1978

[8] Bennett, R. J.: Space-Time Models and Urban Geographical Research, in *Geography and The Urban Environment* (Vol. 2), Eds. Herbert, D. T. and Johnston, R. J., Wiley New York, 1979

[9] Bennett, R. J. and Chorley, R. J.: *Environmental Systems: Philosophy, Analysis and Control*, Methuen, London, 1978

[10] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M.: *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, 1970

[11] Cliff, A. D. and Ord, J. K.: *Spatial Autocorrelation*, Pion, London, 1973

[12] Fisher, W. D.: Econometric Estimation with Spatial Dependence. *Regional and Urban Economics*, 1(1971), 19–40

[13] Forrester, J. W.: *Urban Dynamics*, M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1968

[14] Geary, R. C.: The Contiguity Ratio and Statistical Mapping. *Incorporated Statistician*, 5(1954), 115–145

[15] Heppel, L. W.: A Maximum Likelihood Model for Econometric Estimation with Spatial Series, in *Theory and Practice in Regional Science*, Ed. Masser, I.. Pion, Londo (1976)

[16] Hordijk, L. and Nijkamp, P.: Dynamic Models of Spatial Autocorrelation. *Environment and Planning A*, 9(1977), 505–519

[17] Lowry, I. S.: *A Model of Metropolis*, Land Corporation, Santa Monica, 1964

[18] Lowry, I. S.: *Seven Models of Urban Development: A structual comparison*, Land Corporation, Santa Monica, 1967

[19] Martin, R. J. and Oeppen, J. E.: The Identification of Regional Forecasting Models using Space-time Correlation Functions. *Trans. Inst. of British Geographers*, 66(1975), 95–118

[20] Moran, P. A. P.: Notes on Continuous Stochastic Phenomena. *Biometrica*, 37(1950), 17–23

[21] Ord, J. K.: Estimation Methods for Models of Spatial Interaction. *Journal of the American Statistical Association*, 70(1975), 120–126

[22] Stetzer, F.: Specifying Weights in Spatial Forecasting Models : The results of some experiments. *Environment and Planning A*, 14(1982), 571–584

[23] Zellner, A.: An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias. *Journal of American Statistical Association*, 57(1962), 348–368

注)

1) ARMA; Autoregressive Movingaverage.

2) TF; Transfer Function.

3) 外生的ウエイト w_{ij} は，均等割合とか地域間 (i,j) の時間距離とかにもとづいて決められる方法がよく用いられる[22].

4) 同定(identification)は，適切なモデルを選択し，そのラグの次数を定めることを意味するが，ここでは後者のほうに着目する.

5) どこまでのラグが有意であるかを調べるこの方法は，Yule-Walker 方程式を用いた偏相関係数よりも一般的である．しかしながら，両者とも分析者の先験的知識や主観に負うところが多い．Bennett[4]は，これに代替する方法を紹介している.

6) 非定常性の特徴およびその分析方法については Bennett [7] の5章に詳しく解説されている.

7) 以下，$\boldsymbol{I}$ は $(T\times T)$ の単位行列を示す.