# 確率システムの安定解析

中溝　高好

## 1.　確率システムの安定

安定性はシステムの解析・設計・予測において重要な役割を果たす性質であり，その研究の歴史は古い．周知のように，確定システムの安定性は初期時刻における擾乱の影響が時間の経過とともに消滅し，元の平衡点にもどるかどうかで定義される（零入力安定）．特にシステムが線形であれば，安定性は入力の性質に無関係にシステムの特性によってのみ定まる．したがって有界な入力に対して有界な出力が得られるシステムを安定（入出力安定）と定義しても等値である．たとえば，

(1.1)　$\ddot{x}(t)+a_2\dot{x}(t)+a_1x(t)=f(t)$

で記述されるシステムを考える．このシステムの安定性は外力$f(t)$に関係なくシステム固有の特性によって定まり，特性方程式

(1.2)　$\lambda^2+a_2\lambda+a_1=0$

の根が負の実部をもつことが必要十分条件となる．したがって$a_1, a_2>0$ならば安定であり，$f(t)=0$の場合の自由解$x(t)$は固有値$\lambda_1, \lambda_2$によって定まる動的モードで時間の経過とともに零に収束する．また$f(t)\neq 0$の場合は，それが有界であるかぎり解$x(t)$もまた有界である．外力$f(t)$が確率過程であってもこの性質は基本的には不変である．したがって自由系が安定であれば確率的にも安定である．

ところが，$f(t)$を確率過程として，

(1.3)　$\ddot{x}(t)+a_2\dot{x}(t)+[a_1+f(t)]x(t)=0$

　　$:x(0)=x_0$

で記述される確率システムを考えればかなり様子が異なってくる．上式は係数が不規則に変動する係数励振系であるが，重畳の理が成立するからシステムは線形である．しかしこのシステムの安定性は$a_1, a_2>0$のみでは十分ではない．実際$f(t)$の変動の速さや大きさによって安定であったり，不安定であったりする．一例として$a_1=9$，$a_2=0.01$と選び，$f(t)$としてバンド幅が100Hzの帯域制限擬似白色雑音を用いてアナログ計算機によって生成した(1.3)式の解$x(t)$の見本過程を図1に示した．$f(t)$の強さが0.183のとき$x(t)$は図(a)に示すように安定しているが，強さが0.19になると図(b)に示すように急に大きな動揺が現われる．このことから$f(t)$の強さが0.19くらいを境にしてシステムが不安定になっていることが予期される．確率システムの安定解析の目的はこのような安定限界を見出すことにある．

## 2.　1次系に関する考察

確率システムの安定性は解過程の定性的性質であるが，確率的安定性は解過程の集合についての普遍的性質を表現するものでなければならない．そのため安定性の議論を精密に行なうには安定の定義にもどって考え直さねばならない．確率システムの安定性は，確率変数の収束の概念に対応し

なかみぞ　たかよし　防衛大学校

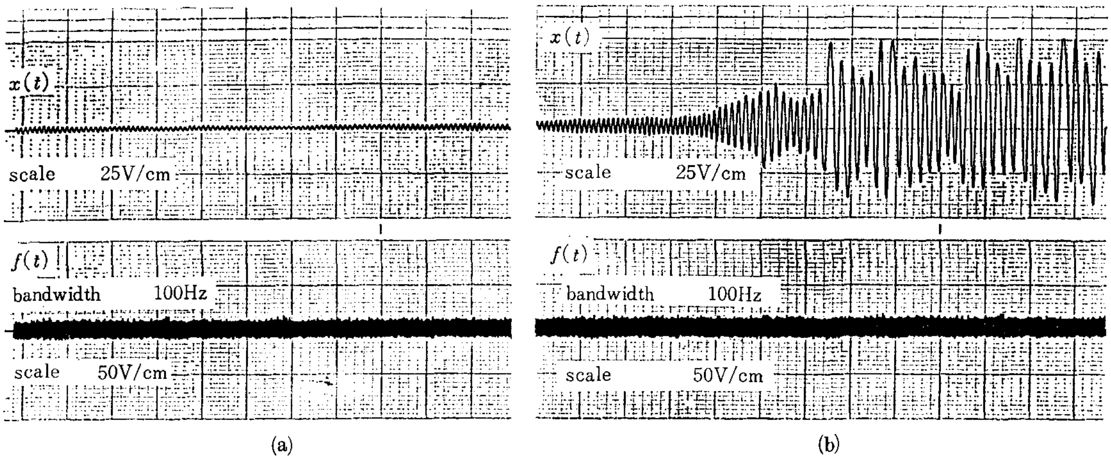


**図 1** 確率システム(1.3)式の応答波形の例

て定義され，多くの安定の定義がある［5,8］．しかしこのような定義の羅列はかえって困惑させるだけであるので，ここでは解が陽に求まる最も簡単な1次系についての考察から始める．

次のような1次系を考える．

(2.1) $\dot{x}(t)=-ax(t)+v(t)x(t) : x(0)=x_0$

上式の解はよく知られているように，

(2.2) $x(t)=x_0 \exp\left\{-at+\int_0^t v(\tau)d\tau\right\}$

と書ける．ここで $v(t)$ が白色雑音であれば，

(2.3) $w(t)=\int_0^t v(\tau)d\tau$

は Brown 運動過程である［16］．このとき(2.2)式は，

(2.4) $x(t)=x_0 \exp\{-at+w(t)\}$

となる．上式の対数をとれば，

(2.5) $\log x(t)=\log x_0-at+w(t)$

である．これに Ito の微分則［16］を適用すると，

(2.6) $dx(t)=-\left(a-\frac{1}{2}q\right)x(t)dt+x(t)dw(t)$

のような Ito 型確率微分方程式が得られる．ただし上式において $q$ は $E\{(dw)^2\}=qdt$ である．すなわち(2.1)式と(2.6)式はいずれも(2.4)式のような解をもつという意味で等価である．このことは(2.1)式の両辺に $dt$ をかけ $dw(t)=v(t)dt$ とおいた形式的表現として，

(2.7) $dx(t)=-ax(t)dt+x(t)dw(t)$

と書くのは誤っていることを示している．(2.6)式右辺に現われる $\frac{1}{2}qx(t)dt$ を Wong-Zakai の修正項という［17］．この事実は物理システムを確率微分方程式を用いてモデリングするさいの重要な問題であるが，本稿の主題ではないのでこれ以上はふれない［12］．

まず解 $x(t)$ のモーメントの収束について考える．いま $x(t)$ の $k$ 次モーメントを，

$$m_k(t)=E\{x^k(t)\}$$

と定義すると，$m_k(t)$ は(2.6)式から，

(2.8) $\frac{dm_k}{dt}=k\left(-a+\frac{k}{2}q\right)m_k$

を満たすことは容易に導ける．したがって，

$$t\to\infty \text{ で } m_k(t)\to 0$$

となるための条件は(2.8)式から直ちに，

(2.9) $2a>kq$

となる．$a$ をどのように選んでも上式を満たさない $k$ が存在する．つまり確率システムでは高次モーメントは必ず発散する．しかし，通常のシステム論は2次モーメント理論にもとづいているから $k\leqq 2$ について検討すれば十分である．たとえば $x(t)$ の1次モーメントが安定であるための条件は $a>q/2$ であり，また2次モーメントが安定であるための条件は $a>q$ である．一般に $k$-1次のモーメントが安定であることは，$k$ 次のモーメントが安定であるための必要条件であることがわかる．

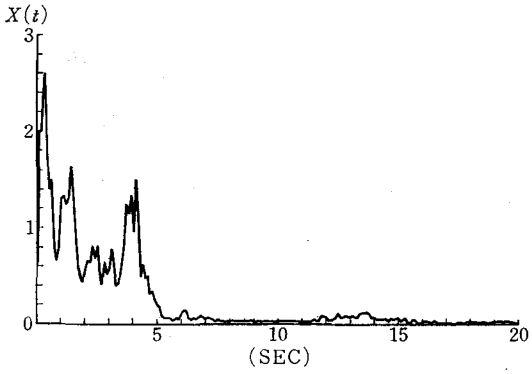


**図 2** 確率微分方程式 $dx=\frac{1}{4}xdt+dw$ の解過程の例

次に(2.4)式で表わされる解過程自身の収束について調べる．(2.5)式から，

(2.10) $\frac{1}{t}\log\frac{x}{x_0}=-a+\frac{1}{t}w(t)$

と書ける．Brown 運動過程の性質から $t\to\infty$ で $w(t)/t\to 0$ であるから，もし $a>0$ なら $t\to\infty$ で $\log x(t)\to-\infty$ すなわち $x(t)\to 0$ となる．このことは $a>0$ なら見本過程 $x(t)$ は安定（確率1で安定）であることを示している．

ここで注意しておきたいことは，モーメントの収束条件と見本過程の収束条件が一致しないことである．たとえば $q/2>a>0$ では，すべてのモーメントは発散するが見本過程自身は収束する．一例として $a=1/4$, $q=1$ とすれば(2.8)式から，

(2.11) $m_k(t)=m_k(0)\ \exp\left\{\frac{k(2k-1)}{4}t\right\}$

となり，$m_k(t)$ はすべての $k\geqq 1$ について発散する．このときの解過程をディジタル計算機で求めた．$x_0=1$ としたときの解の見本過程はすべてのモーメントが発散するにもかかわらず図2に示すように明らかに収束している．このことは一見奇異な感じを与えるかもしれないが，不変測度の存在は必ずしも期待値の存在性・有界性を保証しないのである．

最後に確率微分方程式を扱う場合の注意すべきことをもう1つ述べておこう．確率微分方程式

(2.12) $dx=-axdt+xdw$

で記述される確率システムを考える．上式の解は

(2.13) $x(t)=x_0\ \exp\left\{-\left(a+\frac{1}{2}q\right)t+w(t)\right\}$

であるから，

(2.14) $a>-\frac{1}{2}q$

なら解過程 $x(t)$ は確率1で安定である．すなわち $a<0$ であっても $0>a>-q/2$ の範囲であれば(2.12)式のシステムは安定である．一方(2.12)式で $w(t)=0$ とおいて得られる定係数システム

$$dx=-axdt$$

すなわち，

(2.15) $\dot{x}=-ax$

は $a<0$ なら明らかに不安定である．したがって上の結果は $w(t)$ が存在するために $a<0$ であっても安定となることを示しているから，もともと不安定なシステムに $xdw$ で示されるようなランダム励振を積極的に加えることによって不安定なシステムを安定化できるという興味深い事実を示しているようにみえる．

ところが，この物理的側面は次のようになる．前述のWong-Zakaiの修正項を考慮すれば(2.12)式と等値な常微分方程式は，

(2.16) $\dot{x}=-\left(a+\frac{1}{2}q\right)x+xv(t):x(0)=x_0$

と表わされる．ここに $v(t)$ は白色雑音である．すなわち(2.12)式は(2.16)式で表わされる物理系のモデルである．(2.16)式で $v(t)=0$ とおいて得られる定係数システムが安定である条件は，

$$a+\frac{1}{2}q>0$$

である．これは(2.14)式の条件と一致する．つまり(2.15)式に $xdw$ で表わされるランダム励振を付加するということは，物理的には(2.16)式のようなシステムを構成することであるから，上述の安定化に関する結論は物理的に意味をなさないことになる．

## 3. モーメント安定の解析

前章の結果を一般化して，

(3.1) $\frac{d^n x(t)}{dt^n}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k+v_k(t)\right]\frac{d^{k-1}x(t)}{dt^{k-1}}=0$

で記述される線形確率システムの2次モーメント安定について考察する．ここで $v_k(t)$ は白色雑音であるとみなせるものとすれば，(3.1)式は，

$$(3.2)\quad \begin{cases} dx_i = x_{i+1}dt : i=1,2,\cdots,n-1 \\ dx_n = -\sum_{k=1}^{n} \hat{a}_k x_k dt - \sum_{k=1}^{n} x_k dw_k(t) \end{cases}$$

のような確率微分方程式で表わされる．ただし上式において $w_k(t)$ は Brown 運動過程であり，

$$E\{dw_i(t)dw_j(t)\} = q_{ij}dt$$

のような増分特性をもつものとする．なおモデリングについて前章でも指摘したように，(3.1) 式のような物理システムを (3.2) 式のような確率微分方程式で表現するには Wong-Zakai の修正項を考慮して(3.2)式の係数は，

$$\hat{a}_k = a_k - \frac{1}{2}q_{kn}$$

で置換しなければならない．特に $v_n(t)=0$ であれば $q_{kn}=0$ であるから，このときには補正項は現われない．

さて計算の便宜上，

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} & I_{n-1} & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hdashline -\hat{a}_1 & -\hat{a}_2 & \cdots & -\hat{a}_n \end{array}\right],\quad G_i = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline 0\cdots \underset{i}{1} \cdots 0 \end{array}\right]$$

と定義すれば(3.2)式は，

$$(3.4)\quad dx(t) = Ax(t)dt - \sum_{k=1}^{n} x_i G_i dw(t)$$

のようなベクトル確率微分方程式で表示できる．

2次モーメント行列を

$$M(t) = E\{x(t)x^T(t)\}$$

と定義すれば，$M(t)$ は，

$$(3.5)\quad \dot{M}(t) = AM(t) + M(t)A^T + \Pi(M)$$

を満足する．ただし上式で，

$$(3.6)\quad \Pi(M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(t) G_i Q G_j^T$$

である．ここに $Q$ は，

$$E\{dw(t)dw^T(t)\} = Qdt$$

とおいた．

(3.5)式の平衡点 $M=0$ が漸近安定であれば，すなわち $t\to\infty$ で $M(t)\to 0$ であれば(3.2)式のシステムは2乗平均安定（2次モーメント安定）であるという．(3.5) 式は行列微分方程式ではあるが，もはや確率的ではないから確定システムの安定解析で知られた手法を用いて安定条件を導出することができる．

i) **リアプノフ法の適用**　リアプノフ関数を，$V(M)=\mathrm{tr}(MP)$ と選ぶ．このとき，

$$(3.7)\quad \dot{V}(M) = \mathrm{tr}(\dot{M}P) = \mathrm{tr}[M(PA + A^TP + \Gamma(P))]$$

となる．ただし上式で，

$$(3.8)\quad [\Gamma(P)]_{ij} = \mathrm{tr}(G_i^T P G_j Q)$$

である．したがってある正定行列 $\Omega$ に対して，

$$PA + A^TP + \Gamma(M) = -\Omega$$

を満たす正定行列 $P$ が存在すれば $V(M)>0$, $\dot{V}(M)<0$ である．また $M\to\infty$ で $V(M)\to\infty$ でもあるから大局的2乗平均漸近安定である．

(3.3)式を用いて計算すれば(3.7)式は，

$$(3.9)\quad \dot{V}(M) = \mathrm{tr}[M(PA + A^TP + p_{nn}Q)]$$

となる．いま $A$ は安定行列（これは1次モーメント安定であることを意味する）と仮定すれば，

$$(3.10)\quad PA + A^TP = -Q$$

となる正定行列 $P$ が選べる．このとき(3.9)式は，

$$(3.11)\quad \dot{V}(M) = (p_{nn}-1)\mathrm{tr}[QM]$$

であるから，安定条件は単に，

$$p_{nn} < 1$$

となる．すなわち(3.10)式を満たす行列 $P$ の $nn$ 要素 $p_{nn}$ が1より小さいことが必要十分条件である．実際(3.10)式を成分で書けば，

$$(3.12)\quad a_i p_{jn} + a_j p_{in} - p_{i-1,j} - p_{i,j-1} = q_{ij} : i,j=1,2,\cdots,n$$

となる．これは $p_{ij}$ を未知数とする $n(n+1)/2$ 元連立方程式であるから，これを解いて $p_{nn}$ を求めることができる．

たとえば $n=2$ として，

$$(3.13)\quad \begin{cases} dx_1 = x_2 dt \\ dx_2 = -\hat{a}_1 x_1 dt - \hat{a}_2 x_2 dt - x_1 dw_1 - x_2 dw_2 \end{cases}$$

で表わされる確率システムの場合，(3.12)式は，

$$(3.14)\quad \begin{bmatrix} 0 & -2\hat{a}_1 & 0 \\ 1 & -\hat{a}_2 & -\hat{a}_1 \\ 0 & 2 & -2\hat{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix}$$

となる．これを解いて，

(3.15) $p_{22}=\dfrac{q_{11}}{2\hat{a}_1\hat{a}_2}+\dfrac{q_{22}}{2\hat{a}_2}$

であるから，安定条件は $p_{22}<1$ から，

(3.16) $2\hat{a}_1\hat{a}_2>q_{11}+\hat{a}_1q_{22}$

で与えられる．安定性は $q_{12}$ に依存しない．

**ii) ラウス・フルビッツ法の適用** (3.5) 式を成分について書けば $m_{ij}(t)=E\{x_i(t)x_j(t)\}$ として，

(3.17) $$\begin{cases}\dot{m}_{ij}=m_{i+1,j}+m_{i,j+1}:i,j=1,2,\cdots,n-1\\ \dot{m}_{in}=m_{i+1,j}-\sum\limits_{k=1}^{n}\hat{a}_km_{ik}:i=1,2,\cdots,n-1\\ \dot{m}_{nn}=-2\sum\limits_{k=1}^{n}\ \hat{a}_km_{kn}+\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}q_{kl}m_{kl}\end{cases}$$

となる．上式は $m_{ij}$ に関する $n(n+1)/2$ 元連立方程式であるから，その特性方程式を求めてラウス・フルビッツの方法を適用すれば2乗平均安定が判別できる．このことは古くから多くの文献で指摘されてきたが[1～3]実はこれは冗長であって，2乗平均安定であるための必要十分条件は，1次モーメントが安定であれば特性方程式の定数項の符号のみによって完全に定まるのである[10]．

たとえば $n=3$ として，

(3.18) $$\dddot{x}+a_3\ddot{x}+[a_2+v_2(t)]\dot{x}+[a_1+v_1(t)]x=0$$

のような3階の微分方程式で記述される確率システムを考える．$v_3(t)=0$ であるから，この場合 Wong-Zakai の修正項を考慮する必要はない．まず1次モーメントが安定である条件は(3.18)式で $v_1=v_2=0$ とおいて得られる定係数系が安定であればよいから，

(3.19) $a_2a_3>a_1$

となる．これは2乗平均安定であるための必要条件である．また $n=3$ であるから2次モーメント方程式は6元連立方程式となり，その特性方程式は次のような6次の多項式となる．

(3.20) $\lambda^6+c_1\lambda^5+c_2\lambda^4+c_3\lambda^3+c_4\lambda^2+c_5\lambda+c_6=0$

ただし上式において，

$$c_1=4a_3$$
$$c_2=5(a_2+a_3^2)$$
$$c_3=7a_1+11a_2a_3+2a_3^2-2q_{22}$$
$$c_4=14a_1a_3+6a_2a_3^2+4a_2^2-2a_3q_{22}-6q_{12}$$
$$c_5=4a_1a_2+8a_1a_3^2+4a_2^2a_3-2a_2q_{22}-4a_3q_{12}-6q_{11}$$
$$c_6=8a_1(a_2a_3-a_1)-4a_3q_{11}-4a_1q_{22}$$

である．(3.20)式にラウス・フルビッツの判別法を適用して安定条件を求めることは原理的に可能であるが，その計算は相当に複雑である．しかしながら安定条件は定数項の符号のみによって定まり $c_6>0$ であればよいのである．したがって，

(3.21) $2a_1(a_2a_3-a_1)>a_3q_{11}+a_1q_{22}$

を得る．また必要条件(3.19)は(3.20)式の条件の中に含まれている．一般に4次以下のシステムに対しては1次モーメントの安定条件は定数項が正という条件の中に含まれる．

2次モーメント方程式は $n(n+1)/2$ 元連立方程式であるから $n$ が大であれば計算は急激に複雑になり，特性方程式の定数項を計算するだけでもかなり厄介である．しかし周波数領域でこれを計算する非常に簡便な方法が導出されている[11]．紙面の都合上，結果のみを掲げると，2乗平均安定であるための条件は，1次モーメントが安定であれば，

(3.22) $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}q_{kl}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(j\omega)^{k-1}(-j\omega)^{l-1}}{|(j\omega)^n+\hat{a}_n(j\omega)^{n-1}+\cdots+\hat{a}_2j\omega+\hat{a}_1|^2}d\omega<1$$

で与えられる．(3.22)式の積分は公知の積分公式[14]を用いて容易に評価できる．また $k+l=\text{odd}$ の場合，この積分の値は零であるから(3.22)式は $k+l=\text{even}$ の場合のみを考えればよい．

たとえば(3.13)式のシステムの場合は，

$$\frac{q_{11}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{|(j\omega)^2+\hat{a}_2(j\omega)+\hat{a}_1|^2}+\frac{q_{22}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{j\omega}{(j\omega)^2+\hat{a}_2(j\omega)+\hat{a}_1}\right|^2d\omega<1$$

であるから，

$$\frac{q_{11}}{2\hat{a}_1\hat{a}_2}+\frac{q_{22}}{2\hat{a}_2}<1$$

となって(3.15)式と一致する．

## 4. 確率的リアプノフ理論

本章ではさらに一般的な確率システムの安定解析について述べる．システムが非線形ベクトル確率微分方程式

(4.1)　$d\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dt+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{w}(t):\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{x}_0$

で記述される場合を考える．ここで平衡点は原点であるとする．すなわち $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ である．

(4.1)式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ について，任意の $\rho,\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在し，$\|\boldsymbol{x}_0\|\leqq\delta$ に対して，

$$P\{\sup_{0\leq t<\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|\geqq\varepsilon\}\leqq\rho$$

であるならば原点は確率的に安定であると定義する．$\rho$ は任意であるからいかほどにも小さくとれる．さらに原点の近傍内のすべての $\boldsymbol{x}_0$ に対して，

$$\lim_{T\to\infty}P\{\sup_{t\geqq T}\|\boldsymbol{x}(t)\|>\varepsilon\}=0$$

であるなら漸近的に安定であり，近傍が全空間にとれるなら大局的漸近安定であるという．

Kushner は確率システムに対するリアプノフ関数が非負優マーチンゲールであることを用いて安定定理を導いている [9]．次に示す定理は見本過程が安定であるための十分条件を与えるものであるが，確定システムにおけるリアプノフ定理の素直な言い換えになっている．

**〈安定定理〉** 次の性質を満たす連続スカラ関数 $V(\boldsymbol{x})$ が存在すれば (4.1) 式のシステムの原点は確率的に漸近安定である．

i) $V(\boldsymbol{x})>0$,　$V(\boldsymbol{0})=0$

ii) $\mathscr{L}V(\boldsymbol{x})<0$

ここに $\mathscr{L}$ は微分生成作用素であり，

$$\mathscr{L}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}f_i(x)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{GQG}^T)_{ij}$$

である．

確定システムの場合と比較すると，微分 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ の代りに $\mathscr{L}V(\boldsymbol{x})$で置き換えたところが異なるだけである．確定システムの場合と同様に，この定理を適用するためには，リアプノフ関数をどのように構成するかだけが問題である．各種の非線形システムに対する $V(\boldsymbol{x})$の構成例がKushner[8]，Ku [7] によって与えられているが，結局は確定システムの場合から類推して選定するのが常套手段である．

さて再び特別な場合として (3.4) 式の線形確率システムを考える．上の定理を適用するため，

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

と選ぶ．このとき，

$$\mathscr{L}V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}+p_{nn}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

となる．$\boldsymbol{A}$ は安定行列として $\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q}$ となるように $\boldsymbol{P}$を選ぶと，

$$\mathscr{L}V(\boldsymbol{x})=(p_{nn}-1)\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

となるから，安定条件は $p_{nn}<1$ となり 2 乗平均安定の条件と一致する．したがって 2 乗平均安定は見本過程が安定であるための十分条件となっている．

## 5. おわりに

確率システムの安定性の研究は，これまで多角的に展開されており，それらをことごとく紹介することはもとより不可能であるし，またそのためにはかなりの予備知識も必要である．なによりも本稿はサーベイが目的ではないので，基本的な問題の 1 つである白色雑音を係数に含む線形確率システムのモーメント安定解析を中心に説明した．係数が白色雑音でない場合や見本過程の確率 1 での収束を検討することは重要であるが，多くの場合その手続は非常に複雑である．それにくらべて 2 次モーメントの安定解析は比較的容易であり，また実用上からも十分有用である．一例として，

$$\ddot{x}+[a_2+v_2(t)]\dot{x}+a_1x=0:x(0)=x_0$$

で記述されるシステムについて検討した結果を示す．(3.16)式から 2 乗平均安定であるための条件は $2\hat{a}_2>q_{22}$ であるから，結局，

$$a_2>q_{22}$$

となる．この例についてアナログ計算機によるシミュレーションを行なった．2 乗平均値の時間的

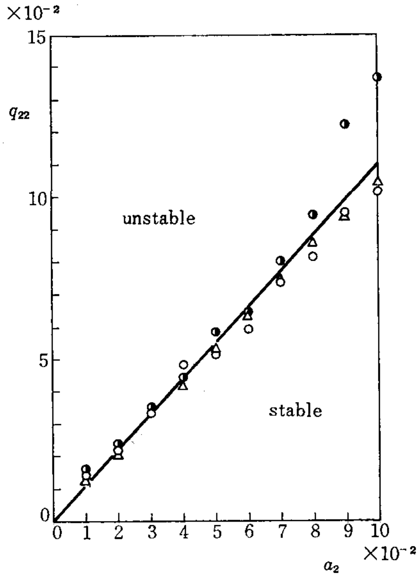


**図 3** 安定限界の測定結果

変化を測定することは困難であるので，ここでは解 $x(t)$ が発散するときを不安定とみなすことにした．$v_2(t)$ は帯域制限凝似白色雑音を用い，そのバンド幅を100，250，500Hzと選んだ場合の安定限界を測定してプロットしたのが図3である．バンド幅が狭くなると次第に理想的な白色雑音からずれる．それにともなって安定範囲がやや広がってゆく傾向がみられるが，いずれも2乗平均安定の理論的予測からあまりずれていない．このことはランダム係数のバンド幅が相対的に大きければ十分白色雑音とみなせること，また2乗平均安定解析が十分実用性があることを示していると考えられる．

## 参考文献


[1] Ariaratnam and Graefe, P. W. V.: Linear Systems with Stochastic Coefficients, I, II, *Int. J. Control*, Vol. 2 (1965) 161-169, 205-210

[2] Bogdanoff, J. L. and Kozin, F.: Moments of the Output of Linear Random Systems, *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 34 (1962) 1063-1066

[3] Gray, A. H.: Behaviour of Linear Systems with Random Parametric Excitation, *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 37 (1965) 235-239

[4] Kozin, F.: A Survey of Stability of Stochastic Systems, *Automatica*, Vol. 5 (1969) 95-112

[5] Kozin, F.: Stability of the Linear Stochastic Systems, *Lecture Note in Mathematics*, Springer, Vol. 294 (1972) 186-229

[6] Kozin, F.: On the Relation between Moment Properties and Almost Sure Lyapunov Stability for Linear Stochastic Systems, *J. Math. and Appl.*, Vol. 10 (1965) 342-353

[7] Ku, Y. H.: Stochastic Stability in Nonlinear Control Systems, *IEEE Trans.*, Vol. AC-14 (1969)

[8] Kushner, H. J.: *Stability of Stochastic Dynamical Systems*, Advances in Control Systems, 4, Academic Press (1966) 73-103

[9] Kushner, H. J.: *Stochastic Stability and Control*, Academic Press (1967)

[10] Nakamizo, T.: A Simpler Mean Square Stability Criterion for a Class of Linear Stochastic Systems, *IEEE Trans.*, Vol. AC-14 (1969) 584-585

[11] Nakamizo, T. and Sawaragi, Y.: Analytical Study of *n*-th Order Linear Systems with Stochastic Coefficients, *Lecture Note in Mathematics*, Springer, Vol. 294 (1972) 173-185

[12] 中溝高好：連続制御理論における確率過程のモデルに関する2，3の考察，制御工学，**14**，3 (1970) 166-176

[13] 中溝高好：確率システムの制御と安定性，計測と制御，**15**，6 (1976) 514-527

[14] 椹木義一，添田 喬，中溝高好：統計的自動制御理論，コロナ社 (1966)

[15] Sugimoto, S.: Relation between Sample and Moment Stability and Related Topics, *Ph. D, Thesis*, Poly. Inste., New York (1974)

[16] 砂原善文：確率システム理論，通信学会編(1979)

[17] Wong, E. and Zakai, M.: On the Relation between Ordinary and Stochastic Differential Equations, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 3 (1965) 213-229