

# 確率システムの推定

片山 徹

## 1. はじめに

制御工学，システム工学の分野では，工業プロセス，飛しょう体，経済システムなどさまざまなシステムを対象とする．多くの場合このような実システムは確率システムとして捉えなければならぬが，それは主として次の理由による．

- 1) どのような数学モデルも完全ではなく，未知パラメータを含む．
- 2) システムは予測不可能な外乱を受ける．
- 3) システムの状態測定には必ず観測誤差が存在する．

本稿では Kalman フィルタを中心に，線形離散時間確率システムの状態および未知パラメータの推定について解説する．2. では Kalman フィルタに関する基礎的な事項，また3. では Kalman フィルタの数値的安定性について述べる．4. では確率システムのパラメータ同定について述べ，最後に 5. では応用例について簡単なサーベイを試みる．

Kalman フィルタについてはすでに成書も多いが [1]—[3]，興味ある読者は Kalman の論文 [4]—[6]を一読されることをお勧めする．

## 2. 離散時間 Kalman フィルタ

### 2.1 問題の定式化

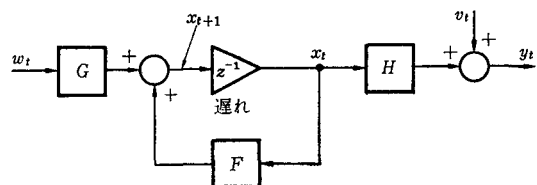


図 1 基本システム

線形離散時間システム

$$x_{t+1} = Fx_t + Gw_t \quad (1)$$

$$y_t = Hx_t + v_t, \quad t=0, 1, \dots \quad (2)$$

について考察する(図1)．ここに  $x_t$  は  $n$  次元状態ベクトル， $y_t$  は  $p$  次元観測ベクトル， $F, G, H$  はそれぞれ  $n \times n, n \times m, p \times n$  行列である．またシステム雑音  $w_t$ ，観測雑音  $v_t$  はそれぞれ  $m$  および  $p$  次元の正規性白色雑音ベクトルで，

$$\begin{aligned} E\{w_t\} &= 0, \quad E\{v_t\} = 0 \\ E\{w_t w_{\tau}^T\} &= Q \delta_{t\tau}, \quad E\{v_t v_{\tau}^T\} = R \delta_{t\tau} \\ E\{w_t v_{\tau}^T\} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

および  $t \geq \tau, \tau=0, 1, \dots$  に対して，

$$E\{w_t x_{\tau}^T\} = 0, \quad E\{v_t x_{\tau}^T\} = 0 \quad (4)$$

を満足するものとする．ただし， $Q$  は  $m \times m$  非負定値対称行列， $R$  は  $p \times p$  正定値対称行列， $\delta_{t\tau}$  は Kronecker の記号<sup>註1)</sup>， $T$  は行列あるいはベクトルの転置， $E$  は期待値を表わす．初期状態  $x_0$  は平均値  $\bar{x}_0$ ，共分散行列  $P_0$  の正規性確率ベクトルである．

さて時刻 0 から  $t$  までの観測データの集合を，

$$Y^t = \{y_0, y_1, \dots, y_t\} \quad (5)$$

かたやま とおる 京都大学 工学部

とおくとき、状態推定問題は次のように述べることができる。

**基本問題：**  $Y^t$  にもとづいて、評価関数

$$J = E\{\|x_{t+\alpha} - \hat{x}_{t+\alpha/t}\|^2\} \quad (6) \text{注2)}$$

を最小にする、状態  $x_{t+\alpha}$  の最適推定値  $\hat{x}_{t+\alpha/t}$  を与えるフィルタを設計せよ。

推定問題は  $\alpha > 0$  のとき予測(prediction),  $\alpha = 0$  のとき汜波(filtering), また  $\alpha < 0$  のとき平滑(smoothing)とよばれている。

周知のように(6)式を最小にする  $\hat{x}_{t+\alpha/t}$  は、 $Y^t$  にもとづく  $x_{t+\alpha}$  の条件つき期待値

$$\hat{x}_{t+\alpha/t} = E\{x_{t+\alpha} | Y^t\} \quad (7)$$

により与えられる。また推定誤差を、

$$\tilde{x}_{t+\alpha/t} = x_{t+\alpha} - \hat{x}_{t+\alpha/t} \quad (8)$$

とおき、推定誤差の共分散行列を、

$$P_{t+\alpha/t} = E\{\tilde{x}_{t+\alpha/t} \tilde{x}_{t+\alpha/t}^T\} \quad (9)$$

と表わす。

Kalman [4], [6]により推定値  $\hat{x}_{t/t}$  ( $\hat{x}_{t/t-1}$ ) および推定誤差共分散行列  $P_{t/t}$  ( $P_{t/t-1}$ ) を逐次的に計算するアルゴリズムが導かれた。このアルゴリズムを通常 Kalman フィルタとよんでいる。ここでは  $\alpha \geq 2$  の予測および  $\alpha < 0$  の平滑アルゴリズムについては述べないので、文献[3]を参照されたい。

## 2.2 Kalman フィルタ

(1), (2)式に対するシステムに対する Kalman は、次の i)—iv)にまとめられる[1]—[3]。

i) 1 段予測アルゴリズム

$$\hat{x}_{t+1/t} = F\hat{x}_{t/t} \quad (10)$$

$$P_{t+1/t} = FP_{t/t}F^T + GQG^T \quad (11)$$

ii) 汜波アルゴリズム

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t[y_t - H\hat{x}_{t/t-1}] \quad (12)$$

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - K_tHP_{t/t-1} \quad (13)$$

iii) Kalman ゲイン

$$K_t = P_{t/t-1}H^T\{HP_{t/t-1}H^T + R\}^{-1} \quad (14)$$

iv) 初期条件

$$\hat{x}_{0/-1} = \bar{x}_0, \quad P_{0/-1} = P_0 \quad (15)$$

また推定誤差  $\tilde{x}_{t/t-1}$  は平均値 0, 共分散行列

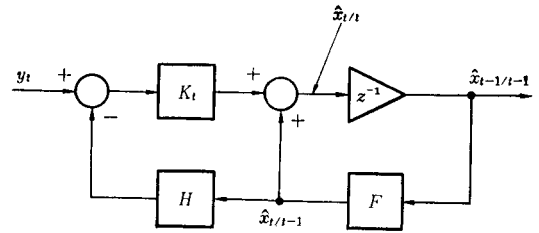


図 2 離散時間 Kalman フィルタ

$P_{t/t-1}$  の Gauss・マルコフ過程<sup>注3)</sup>となる。

図2に Kalman フィルタのブロック線図を示す。明らかに Kalman フィルタは  $y_t$  を入力、推定値  $\hat{x}_{t/t}$  ( $\hat{x}_{t/t-1}$ ) を出力とする線形ダイナミカルシステムであり、その構造は Kalman ゲインを除けば図1の基本システムと類似している。まず初期条件  $\bar{x}_0, P_0$  が与えられると、(15)式より  $\hat{x}_{0/-1}, P_{0/-1}$  が定まり、(14)式より  $K_0$  が計算される。 $t=0$  において  $y_0$  を得て、(12), (13)式より、 $\hat{x}_{0/0}, P_{0/0}$  が求まる。ついで(10), (11)式より  $\hat{x}_{1/0}, P_{1/0}$ , (14)式より  $K_1$  が計算される。 $t=1$  において、 $y_1$  を観測し、再び(12), (13)式より  $\hat{x}_{1/1}, P_{1/1}$  が求められるので、以下同様の手順で、推定値、推定誤差共分散行列が計算される。このように Kalman フィルタは、新しい観測値が得られるたびに古い推定値を修正して、新しい推定値を計算するので、デジタルコンピュータによるオンライン状態推定に適したアルゴリズムである。しかし  $P_{t/t-1}$  は観測データに依存しないので、後述の(16)式をオフラインで解いて、Kalman ゲインはあらかじめ計算しておくことも可能である。

Kalman フィルタアルゴリズムは  $F, G, H, Q, R$  が時間  $t$  の関数であってもそのまま成立する。また  $w_t, v_t, x_0$  が正規性でない場合には、基本問題を(6)式を最小にする線形フィルタの設計問題に変更すれば、(10)—(15)式は線形最小分散フィルタのアルゴリズムを与えることが知られている。

## 2.3 Riccati 方程式と定常 Kalman フィルタ

(11), (13), (14)式より  $P_{t/t}$  を消去して  $\Sigma_t \equiv P_{t/t-1}$  とおくと、離散時間型 Riccati 方程式

$$\Sigma_{t+1} = F(\Sigma_t - \Sigma_t H^T (H \Sigma_t H^T + R)^{-1} H \Sigma_t) F^T + G Q G^T$$

$$\Sigma_0 = P_0 \geq 0 \quad (16)$$

を得る<sup>註4</sup>。(16)式の解により Kalman ゲインが決定されるので、Riccati 方程式は Kalman フィルタの中で最も重要な方程式である。システム(1)，(2)式が可制御，可観測[7]であれば，(16)式の解  $\Sigma_t$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき正定値行列  $\bar{\Sigma}$  に収束し， $\bar{\Sigma}$  は定常 Riccati 方程式

$$\Sigma = F(\Sigma - \Sigma H^T (H \Sigma H^T + R)^{-1} H \Sigma) F^T + G Q G^T \quad (17)$$

を満足する。さらに(10)，(12)式で  $\hat{x}_{t/l}$  を消去し， $K_t = \bar{K} \equiv \bar{\Sigma} H^T (H \bar{\Sigma} H^T + R)^{-1}$  とおいた定常 Kalman フィルタ

$$\hat{x}_{t+1/l} = F(I - \bar{K}H) \hat{x}_{t/l-1} + F \bar{K} y_t \quad (18)$$

は漸近安定，すなわち行列  $F(I - \bar{K}H)$  の固有値は単位円内に存在することが知られている[8]。フィルタの最適性は必ずしも安定性を保障しないので，この結果は応用上非常に重要である。Kalman フィルタの安定性に対しては，最初連続時間システムに対して[5]，[6]に与えられた。またより鋭い結果が[9]，[10]に得られている。

定常 Kalman フィルタを用いる場合には，(17)式の定常 Riccati 方程式を代数的に解いて  $\bar{\Sigma}$  を求めれば，ゲイン  $\bar{K}$  が定まる。定常 Riccati 方程式の高速解法についても多くの研究がある[11]。

### 3. 平方根フィルタ

本節では，Kalman フィルタアルゴリズムの数値的不安定性を克服する平方根フィルタについて簡単に述べる[12]，[13]。

(10)，(15)式で  $\hat{x} = \hat{x}_{t/l}$ ， $\bar{x} = \hat{x}_{t/l-1}$ ， $\hat{P} = P_{t/l}$ ， $\bar{P} = P_{t/l-1}$  とおくと，Kalman フィルタアルゴリズムは FORTRAN 形式で，

$$\bar{x}, \bar{P}: \text{初期条件} \quad (19)$$

$$u := \bar{P} H^T \quad (n \times 1) \quad (20)$$

$$\alpha := H u + R \quad (\text{スカラー}) \quad (21)$$

$$K := u \alpha^{-1} \quad (n \times 1) \quad (22)$$

$$\hat{x} := \bar{x} + K(y - H \bar{x}) \quad (n \times 1) \quad (23)$$

$$\hat{P} := \bar{P} - K u^T \quad (n \times n) \quad (24)$$

$$\bar{x} := F \hat{x} \quad (n \times 1) \quad (25)$$

$$\bar{P} := F \hat{P} F^T + G Q G^T \quad (n \times n) \quad (26)$$

となる。ただし観測はスカラー ( $p=1$ ) と仮定している。ベクトル観測の場合には， $R$  が対角であれば  $y$  の成分ごとに(20)―(24)式を  $p$  回繰り返し適用すればよい。ただし(20)式にもどるとき  $\bar{x} := \hat{x}$ ， $\bar{P} := \hat{P}$  としなければならない。また  $R$  が対角でなければコレスキー分解により  $R = V V^T$  を満足する  $R$  の平方根行列  $V$  を求め， $y := V^{-1} y$ ， $H := V^{-1} H$ ， $R := I$  とおけばよい[12]。

上のアルゴリズムを実行すると， $\hat{P}$ ， $\bar{P}$  の対称性あるいは非負定値性がくずれることがある[12]，[13]。このため Kalman ゲインの値が信頼できないものとなり，場合によっては推定値が発散することもある。この原因は，(24)式右辺が2つの非負定値対称行列の差となっているために，桁落ちが生じ  $\hat{P}$  の精度が悪くなることにある。

このようなフィルタの数値的不安定性を緩和するために，経験的に次のような方法がとられている。

- (a) 初期値  $P_0$  をあまり大きくしない。
- (b)  $R$  をあまり小さくしない。
- (c) スケーリングにより，各変数のダイナミックレンジをなるべく均等にする。
- (d) 倍精度の演算を行なう。
- (e) (24)，(26)式のアルゴリズムを対称な

$$\bar{P} := F(I - KH) \bar{P} (I - KH)^T F^T + G Q G^T \quad (27)$$

に変更する。

(a)，(c)はどんな場合でも実行可能である。しかし  $y$  の中にほとんど雑音に乱されない成分があるとき，(b)により  $R$  を故意に実際より大きくする必要があるが，これには抵抗があるであろう。また(d)の倍精度計算はハードウェアに対する制約からかなりきびしい要求であり，実現できない場合も多い。さらに(27)式のアルゴリズムも最近の研究

では、必ずしも数値的にすぐれてはいないことが明らかになっている。

したがって数値的に安定な高度のアルゴリズムが必要となる。飛しょう体の軌道推定には特にこの要求が強く、1963年に発表された Potter による平方根フィルタが契機となり、この分野の研究が非常に発達した。基本的にはこれらのアルゴリズムは、最小 2 乗推定問題を数値的に精度よく解くためのハウスホルダー法、コレスキー分解法、 $UDU^T$  分解法などを利用して、(24) 式のステップを数値的に安定なアルゴリズムに改良したものである。紙面の都合で具体的なアルゴリズムは述べないので、文献を参照されたい[12], [13]。なお、特別な型の平方根フィルタについては次節を参照されたい。

#### 4. 確率システムのパラメータ推定

確率システムのモデルとしては、(1), (2) 式のような状態空間モデル以外に入出力関係を直接表現した、

$$y_t = \sum_{i=1}^n a_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^m b_i u_{t-i} + e_t + \sum_{i=1}^p c_i e_{t-i} \quad (28)$$

もよく用いられる。ここに  $y_t$  は出力、 $u_t$  は入力、 $e_t$  は白色雑音、 $a_i, b_i, c_i$  はシステムパラメータである。

$b_i=0, i=1, \dots, m$  のとき、(28) 式は時系列解析で用いられる AR モデルとなる。計量経済の分野では、 $y_t$  は内生変数、 $u_t$  は外生変数といい、(28) 式は ARMAX モデルとよばれている。また適当な状態ベクトル  $x_t$  をとれば、(31) 式のモデルは (1), (2) 式の状態空間モデルとして表わすことができる[14]。

以下本節では、与えられた入出力データ  $\{u_t, y_t\}$  にもとづいてシステムパラメータ  $\theta^T = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$  を推定する逐次アルゴリズムについて述べる。ただし、簡単のために  $c_i=0, i=1, \dots, p$  とし、 $r=n+m$  とおく。

さて、 $r$  次元横ベクトル

$$\phi_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-n}, u_{t-1}, \dots, u_{t-m}) \quad (29)$$

を定義すると、(28) 式は、

$$\theta_{t+1} = \theta_t, \quad \theta_0 = \theta \quad (30)$$

$$y_t = \phi_t \theta_t + e_t \quad (31)$$

と表わされる。 $F=I, G=0, Q=0, H=\phi_t, x_t=\theta_t, v_t=e_t$  とおくと、(30), (31) 式は (1), (2) 式と同一であることがわかる。明らかに、

$$\hat{\theta}_t \equiv E\{\theta_t | Y^t\} = E\{\theta | Y^t\} \quad (32)$$

であるから、(30), (31) 式に対する Kalman フィルタは未知パラメータ  $\theta$  の最小分散推定値を与える ( $e_t$  が正規性でなければ線形最小分散推定値)。よって (10)–(14) 式から、次のアルゴリズムを得る：

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + K_t [y_t - \phi_t \hat{\theta}_{t-1}], \quad \hat{\theta}_0 = 0 \quad (33)$$

$$K_t = P_t \phi_t^T / (R + \phi_t P_t \phi_t^T) \quad (34)$$

$$P_{t+1} = P_t - P_t \phi_t^T \phi_t P_t / (R + \phi_t P_t \phi_t^T) \quad (35)$$

(33)–(35) 式のアルゴリズムの数値的安定性をよくするには Potter の平方根アルゴリズムを用いることができる：

$$f^T = \phi S \quad (1 \times r) \quad (36)$$

$$\alpha = R + f^T f \quad (\text{スカラー}) \quad (37)$$

$$\gamma = (\alpha + \sqrt{\alpha R})^{-1} \quad (\text{スカラー}) \quad (38)$$

$$K = S f \quad (r \times 1) \quad (39)$$

$$S = S - \gamma K f^T \quad (r \times r) \quad (40)$$

$$\hat{\theta} = \hat{\theta} + K(y - \phi \hat{\theta}) / \alpha \quad (r \times 1) \quad (41)$$

ここで  $S$  は  $P$  の平方根行列 ( $P = SS^T$ ) である。初期値は  $P_0$  が対角行列でなければ、 $P_0$  をコレスキー分解することにより求められる。

逆行列に関する公式

$$(P^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} = P - PH^T [HPH^T + R]^{-1} HP \quad (42)$$

を用いると、(35) 式は、

$$P_{t+1}^{-1} = P_t^{-1} + \phi_t^T \phi_t / R \quad (43)$$

となる。よって  $R=1, P_0^{-1} \equiv 0$  とおくと、(33)–(35) 式は (28) 式 (ただし  $c_i=0$ ) に対する逐次形最小 2 乗推定アルゴリズムと同一である [14]。

$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = 0$  となれば、 $\hat{\theta}_t$  は  $\theta$  に 2 乗平均収束する。このためには、(43) 式より、

$$P_t^{-1} = P_0^{-1} + \sum_{k=0}^{t-1} \phi_k^T \phi_k / R \quad (44)$$

となるから,

$$\frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \phi_k^T \phi_k \rightarrow \text{正定値行列} \quad (45)$$

が成立すれば十分である.  $u_i$  の定常性を仮定して,  $u_i$  の共分散関数を,

$$\psi_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k u_{k+\tau} \quad (46)$$

とおき, さらに,

$$A(z^{-1}) = 1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_n z^{-n} \quad (47)$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}$$

とおくと次の結果を得る.

$\theta_i$  が  $\theta$  に 2 乗平均収束するためには,

$$i) \quad \Psi_n = \begin{bmatrix} \psi_u(0) & \psi_u(1) & \dots & \psi_u(m-1) \\ \psi_u(1) & \psi_u(0) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \psi_u(m-1) & \dots & \dots & \psi_u(0) \end{bmatrix} \quad (m \times m \text{ 行列}) \quad (48)$$

が存在して正定となる.

ii)  $A(z^{-1})$  は安定, すなわち  $A(z^{-1})=0$  の根は単位円内に存在する.

iii)  $A(z^{-1})$  と  $B(z^{-1})$  は既約である. (これはシステムの可制御, 可観測条件である)

が成立すればよい[14], [15].

条件 i) は無限列  $u_0, u_1, u_2, \dots$  が少なくとも  $m$  個の 1 次独立な部分系列を含むことを要請している.  $u_i$  が白色雑音であると  $\Psi_u = \psi_u(0)I$  となるので, もし入力が自由に選択できるとすれば白色雑音(あるいは  $M$  系列)が理想的である.

また (28) 式で  $c_i$  が 0 でない ARMAX モデルのパラメータ同定についても多くの研究がある[16].

## 5. 応用例に関する若干のサーベイ

Kalman フィルタの応用に関しては[17]—[19]にくわしい. [17]では基礎的な解説に続いて, 軌道推定問題, 社会システムへの応用, 経済予測, および洪水予測の例が紹介されている. [18]では展望, 飛しょう体システム, 河川における水質予測, 原子炉制御システム, およびハカリへの応用が述べてある. また[19]では Kalman フィルタ応用の現状と将来についてのサーベイのあと, 各

論として宇宙システム, 電力ネットワーク, 地層構造の推定, 鉄鋼プロセス, 画像処理への応用, およびフィルタの有限語長実現に関する問題が論じられた. その他にも故障検知[20], 信号処理[21], 通信[22], 交通流[23]への応用がある. 紙面の都合で原論文はほとんど引用できなかったので, 必要に応じて[17]—[21]の引用文献を参照されたい.

デジタル技術の進歩とともに, Kalman フィルタは今後ますます多くの分野で応用されてゆくであろう.

## 参考文献

- [1] 有本 卓: カルマンフィルター, 産業図書, 1977
- [2] A. H. Jazwinski: *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic, 1970
- [3] B. D. O. Anderson and J. B. Moore: *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, 1979
- [4] R. E. Kalman: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem. *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Ser. D, vol. 82(1960), 35-45
- [5] R. E. Kalman and R. S. Bucy: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Ser. D, vol. 83(1961), 95-108
- [6] R. E. Kalman: New Methods in Wiener Filtering Theory. *Proc. First Symp. Applications of Random Function Theory and Probability* (J. L. Bogdanoff & F. Kozin, Eds.), Wiley, 1963, 270-388
- [7] 坂和愛幸: 線形システム制御論, 朝倉書店, 1979
- [8] P. E. Caines and D. Q. Mayne: On the Discrete Time Matrix Riccati Equation of Optimal Control. *Int. J. Control*, vol. 12, no. 5 (1970), 785-794; A Correction. *ibid.*, vol. 14, no. 1(1971), 205-207
- [9] V. Kucera: A Contribution to Matrix Quadratic Equations. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-17, no. 3(1972), 344-347

- [10] 西村敏充, 狩野弘之: 離散周期系の Riccati 方程式の代数的解法と可検出性, 可安定性. 計測自動制御学会論文集 **14**, 5(1978), 486-493
- [11] M. Jamshidi: An Overview on the Solutions of the Algebraic Matrix Riccati Equation and Related Problems. *Large Scale Systems*, vol.1(1980), 167-192
- [12] G. J. Bierman: *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*. Academic, 1977
- [13] C. L. Thornton and G. J. Bierman: UDU<sup>T</sup> Covariance Factorization for Kalman Filtering. *Control and Dynamic Systems* (C. T. Leondes, Ed.), vol.16(1980), 727-736
- [14] 相良節夫, 秋月影雄, 中溝高好, 片山 徹: システム同定. 計測自動制御学会, 1981
- [15] J. B. Moore: On Strong Consistency of Least Squares Identification Algorithms. *Automatica*, vol.15, no.5(1978), 505-509
- [16] T. Söderström, L. Ljung and I. Gustavsson: A Theoretical Analysis of Recursive Identification Methods. *Automatica*, vol.15, no.3 (1978), 231-244
- [17] 特集カルマン・フィルタ. オペレーションズ・リサーチ **22**, 11(1977), 628-656
- [18] カルマン・フィルタ理論の応用特集号: システムと制御 **22**, 1(1978), 2-44
- [19] カルマンフィルタ応用の現状と将来 (招待セッション). 第20回学術講演会予稿集, 計測自動制御学会(1981), 715-728
- [20] 中溝高好, 秋月影雄, 添田 喬: システムの統計的故障検知法. 計測と制御 **18**, 6 (1979), 471-480
- [21] A. S. Willsky: *Digital Signal Processing and Control and Estimation Theory*. MIT Press, 1979
- [22] D. Godard: Channel Equalization Using a Kalman Filter for Fast Data Transmission. *IBM Res. & Dev.*, vol.18(1974), 267-273
- [23] N. E. Nahi: Freeway-Traffic Data Processing. *Proc. IEEE*, vol.61, no.5 (1973), 537-541
- [注]
- 1)  $\delta_{it} = \begin{cases} 1, & t=\tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases}$
  - 2)  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  とすると,  $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .
  - 3)  $\{\xi_i, i=0, 1, \dots\}$  をマルコフ過程とする. 任意の  $(j, k, \dots, l)$  に対して,  $(\xi_j, \xi_k, \dots, \xi_l)$  の結合分布が正規性となるとき,  $\{\xi_i\}$  をガウス・マルコフ過程という.
  - 4)  $P_0 \geq 0$  は  $P_0$  が非負定値対称行列であることを意味する.

## 研究部会報告



### ●経営コンサルタント●

●第27回 日時: 6月5日(土) 4:00~17:00

場所: 東京都勤労福祉会館 テーマ「これからの経営の糧として老子を読む」発表者 上田亀之助 (上田イノベーション研究所)

高度成長期などで先行が明るい時にはトップマネジメントの方たちは孔子の「論語」を愛読される。すこし雲行きがおかしくなると「孫子の兵法」などを、そして、どうにもこうにも、むずかしい事態が迫ってくると「老

子」を熟読される由。人間世界の複雑な森羅万象を簡単で明快な字句で解説し、人の心の深層に迫る「老子」とはそのような古典である。一読をおすすめする。

### ●OR/MSとシステム・マネジメント●

●第2回 (5月例会)

日時: 5月8日(土) 場所: 東京工業大学 (長津田キャンパス) 出席者: 15名

OR/MSがシステムのマネジメントにどのような影響を与えるかを研究するための最初の手がかりとして、以下の論文の紹介, 討議を行なった。

David Dery: "Bureaucratic Side of Computers: Memory, Evocation and Management Information" *OMEGA*, pp.25~32, Vol.9, No.1 (1981).

報告者: 山田善晴 (産能大)