確率システム理論の基礎的局面

砂原 善文

1. 確率システムの数学モデル

システム状態が時間の経過とともに不確定変動をするとき，そのシステムを確率システムという．なぜ確率システムというか．すべての現象は時間 t の経過とともに進展してゆくから，単に変動の大きさに注目するにとどまらず，その現象を不確定時間関数 $z(t,\omega)$[1] とし把握しようという確率過程論の立場に加えて，$z(t,\omega)$がベクトル確率過程であり，しかもそれがひとつのシステムの状態変数であることから，確率システムという言葉が誕生した．上述の $z(t,\omega)$ がシステムの状態変数であるということは，$z(t,\omega)$がシステム数学モデルである微分方程式の解過程であるということに他ならない．したがって常微分方程式でモデル化される集中定数システムと，偏微分方程式で表現される分布定数システムとの2種類に大別されるであろうということは直ちに思い浮かぶであろう．

1.1 確率集中定数システム

図1のような非常に簡単な力学系を考えてみる．この系の運動方程式は質量mの錘りの変化を$z(t)$とすると，次式のようになる[2]．

(1.1) $\ddot{z}(t)+c\dot{z}(t)+k(z)=f(t)$

ここで $z=z_1$, $\dot{z}_1=z_2$ とおくと，(1.1)式は，

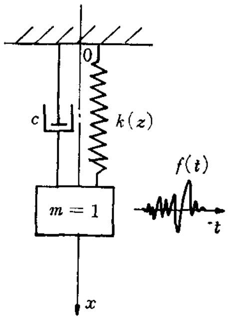

図 1 簡単な力学系

(1.2) $\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -k(z_1)/z_1 & -c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}f(t)$

となる．改めて，

(1.3) $z=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$, $f(z)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -k(z_1)/z_1 & -c\end{bmatrix}$, $I=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

のように表現すれば，(1.2)式は，

(1.4) $\dot{z}(t)=f(z)z+If(t)$

のようなベクトル微分方程式となる．そこで，図1の力学系への強制力$f(t)$ が不確定変動をするものとし，これを$f(t,\omega)$ のように表現すれば，当然（変位，速度）からなる状態変数，すなわち

1） ω は確率空間 Ω の生成点で，$\omega\in\Omega$ である．したがって $z(t,\omega)$ と書けば，これが確率過程 $Z(t,\omega)=\{z(t,\omega):t\in T\}$ の見本過程であることを意味する．しかし前後の記述の関係から，明らかに確率変数あるいは確率過程であると判断される場合は ω の記述を省略する．

2） “・” は d/dt を意味する．

すなはら よしふみ 京都工芸繊維大学

(1.4) 式の解過程も確率過程 $z(t,\omega)$ となる．さらに (1.4) 式から，システムパラメータ α を加えて，

(1.5)　$\dot{z}(t,\omega)=f[t,z(t,\omega);\alpha]+\gamma(t,\omega)$

のような一般的表現を行なっても記述に飛躍は認められないであろう．(1.5) 式における不確定変動要素は $\gamma(t,\omega)$ である．もうひとつの形は，

(1.6)　$\dot{z}(t,\omega)=f[t,z(t,\omega);\alpha(t,\omega)]$

のように，システムのパラメータが不確定変動をするという場合の数学モデルである．たとえば図1において，減衰係数 c の値が不確定変動をする場合と考えればよい．

もちろん (1.5) 式および (1.6) 式の混合型も存在するが，いずれにしても物理的考察の援助のもとに，n 次元ベクトル値非線形関数 f の具体的な形がわかり，$\gamma(t,\omega)$ あるいは $\alpha(t,\omega)$ の不確定変動の確率的性格が定められればシステムの数学モデルは完成する．

1.2　確率分布定数システム

最近，時間 t についての変動のみならず，場所ごとの変動をも無視できないシステムに対する関心が高まってきている．

すなわち図2のように空間的な拡がりを考慮する必要のあるシステムで，これを分布定数システムという．

このようなシステムの状態変数は，時間 t と場所 x の関数 $u(t,x)$ のように表現され，当然のことながらこれはひとつの偏微分方程式の解として定められる．

このようなシステムに対する不確定要素は，集中定数システムの場合と同じように，(i) システムへの加法的雑音，(ii) システムパラメータの不確定変動という場合の他に(iii)システム境界の不確定変動という分布定数システム独特の場合がある．以上のことを考慮しながら確率分布定数システムの数学モデルのいくつかを紹介してみる．

偏微分方程式には放物形，双曲形および楕円形

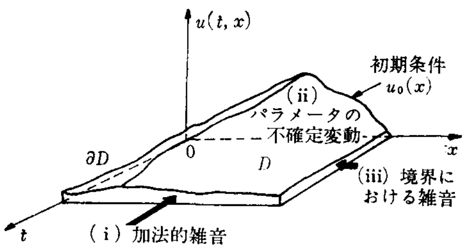

図 2　確率分布定数システムの挙動

という3種類の形式があることは周知のとおりである．それぞれの型に上述の (i)～(iii) のような不確定性を考慮すれば，確率分布定数システムの数学モデルは完成する．いま便宜上，図2に示したように，初期時刻を0とし，場所をあらわす x の範囲を D，その境界を ∂D と書くことにする．ひとつの例として，状態変数 $u(t,x)$を温度とし，これが周囲の不確定な温度変化の影響を受けるものとすると，

(1.7)　$\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\mathscr{L}u(t,x)+G(t,x)\gamma(t,x)$

のような数学モデルができあがる．ただし $\gamma(t,x)$ は不確定外乱，$G(t,x)$ は既知関数である．また(1.7)式の $\mathscr{L}$ は線形微分作用素で，

(1.8)　$\mathscr{L}(\cdot)\triangleq c^2\dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}$

とすれば (1.7) 式は熱伝導システムとなり，熱伝導における抵抗を考慮すれば，$\mathscr{L}$ は，

(1.9)　$\mathscr{L}(\cdot)\triangleq a_2\dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}+a_1\dfrac{\partial(\cdot)}{\partial x}$

という形になる．

次に (ii) のような不確定性を考慮する．一般に偏微分方程式の係数は分布定数システムのパラメータであるが，これが不確定変動をする場合が非常に多い．たとえば (1.8)式で熱伝導係数 c^2 が一定であると考えるのは，きわめて理想的な場合を設定しているのであって，事実 $c^2(\omega)$ のように不確定変動パラメータとして取り扱わねばならない場合が非常に多い．(1.9)式の場合でも a_1 が定数ではなく，$a_1(\omega)$ のように不確定変動をするシステムが最近注目されるようになってきた．化学反

応炉内の温度分布，大気中の汚染物質の拡散など具体例は非常に多い．

上述のように分布定数システムの数学モデルの作成は，集中定数システムの場合より手間のかかるものである．ここで図2を再び見ることにする．時間変数 t は通常 $0<t<t_f$ のように有限区間で考え，変数 x はある定まった領域 D の中で変化する．たとえば x を1次元とし，うまく変数の規格化を行なって D を0と1との間とすれば $0<x<1$ となる．これらの設定を一般に $t=]0,t_f[$, $x \in D$ と表現している，$t=0$ においては初期条件が示され，たとえば，

$$(1.10)\quad u(0,x)=u_0(x),\quad x\in D$$

のような関係が，また $x=0$, $x=1$ というような境界 ∂D では，

$$(1.11)\quad B_\xi u(t,\xi)=0,\quad t\in T, \xi\in\partial D$$

のような境界条件が設定されるものとする．ただし B_ξ はすべて零でない確定係数をもち境界 ∂D 上で定義される作用素である．

ここで(iii)に移ろう．(1.7)式および(1.8)式で表わされるシステムの境界が不確定な外部熱条件のもとにあるならば，(1.11)式の一例として，

$$(1.12)\quad u(t,\xi)+\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial\nu}=B(t,\xi)\,\nu(t,\xi)$$

が境界条件となる．ただしここで $B(t,\xi)$ は既知関数で，$\partial/\partial\nu$ は ∂D の外向き法線方向の微分で，これは作用素 $\mathscr{L}$ の形に関連して定義される．このように境界におけるシステムの状態を考慮しなければならないということは分布定数システムの宿命であるが，これに関連した新しい仕事がわれわれの手許で発生する．

確率分布定数システムの数学モデルとしては上述の例の他にまだ数多くの型式がある．双曲型偏微分方程式で表わされるものもあれば，不確定要素の存在も既述の(i)～(iii)の混合型，たとえばシステムおよびその境界におけるパラメータがともに不確定変動をするという場合もある．このときは当然(ii)としての数学モデルに(iii)の境界条件が設定されることになって，理論的取扱いは相当面倒なものになる．

確率分布定数システムとしての取扱いは，最近ではさらにその領域が拡がってきたようである．そのひとつは人工地震波による地下資源探査システムで，これはパラメータの値が場所に依存するような数学モデルになる．もうひとつは関節筋肉の運動を考察する場合で，このときは境界状態が領域 D 外の状態の影響をうけるので，境界に半透壁を設定した数学モデルがつくられている．さらにもうひとつの例として境界状態が一定ではなく時間の経過とともに変化するシステムがある．これはステファン問題とよばれているが，図2において システムの領域 D を氷，領域外の部分を水と考えれば，問題の把握は容易であろう．[1]～[3]

2. 確率システムの特性解析

前章で呈示した種々の数学モデルによる確率システムの特性解析のための種々の手法に興味をもつことも有意義であるが，最も重要なことは不確定要素の存在によってシステム特性がどのような影響をうけるかを知ることである．

2.1 確率集中定数システム

前節において，われわれは確率システムに対しては，(i)システム特性および(ii)不確定要素の確率的性格を設定しなければならないことを知った．理解の便宜上，(i)に対応して(1.5)式をスカラ線形微分方程式

$$(2.1)\quad \dot z(t)=az(t)+z(t)\gamma(t),\quad z(0)=z_0>0$$

としてみる．ただし上式で a は定数である．(2.1)式の解は，

$$(2.2)\quad z(t)=z_0\exp\{at+\int_0^t\gamma(s)\,ds\}$$

となるが，$\gamma(t)$ が不確定時間関数であるから，計算できない．そこで(ii)に対応して $\gamma(t)$ を正規性白色雑音とすると，(2.1)式を形式的に，

$$(2.3)\quad dz(t)=az(t)dt+z(t)dw(t), z(0)=z_0>0$$

という伊藤型確率微分方程式に書き改めて解を求めると次式のようになる．

(2.4) $z(t)=z_0 \exp\left\{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+w(t)\right\}$

ただし $w(t)$ はブラウン (Brown) 運動過程で (2.1)式から $w(t)=\int_0^t \gamma(s)ds$ という関係によって (2.3) 式に導入されたもので, $E\{dw\}=0$, $E\{(dw)^2\}=\sigma^2 dt$ (σ：定数) という性質をもっている. $w(t)\equiv 0$ のとき当然 $\sigma^2=0$ であるから, (2.2)式の不確定要素はなくなり, $a<0$ ならばその確定システムは安定である. ところが $w(t)\neq 0$ という白色雑音で駆動される確率システムにおいては, $w(t)$—過程は $(t\log t)^n$ という時間尺度で成長するので, $t\to\infty$ では $a<(\sigma^2/2)$ ならば $z(t)\to 0$ となり, システムは安定である. すなわち(2.3)式における不確定性は時間経過 t の間に発散した拡散量の平均値 $\sigma^2 t/2$ の形になって, システム状態量の変化に影響をおよぼしている. しかし(2.4)式のように, 確率微分方程式の解が求められる場合はきわめて稀であるので, たとえば安定性解析については確率的リアプノフ関数法を導入するなど, その問題に応じて適当な方法を考えねばならない.

2.2 確率分布定数システム

すでに示した (1.7) 式で定められる状態変数 $u(t,x)$は, $0<t<t_f$ に対して, xについての連続関数であるから, $x=0$ と $x=1$ との間に適当に $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$ をとって $\{u(t,x_1), u(t,x_2),\cdots,u(t,x_n)\}$ という状態変数の値がわかったとしても, これは近似である. より精度を高めようとすれば n の値を大きくとることであるが, $u(t,x)$ を正確に知るには $n\to\infty$ としなければならない. つまり分布定数システムは無限次元システムであることが特徴である. このような特徴をもつ分布定数システムに不確定要素が存在すると, どういう事態がおきるかを調べてみよう.

まず(1.7)式において, $\gamma(t,x)\equiv 0$ とし, (1.8)式の作用素 $\mathscr{L}$ を採用して,

(2.5) $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$

という確定システムに対する復習から始めよう. (2.5) 式は熱伝導方程式といわれているもので, 偏微分方程式論では十分に研究がゆき届いた形式のひとつである. すなわち $x=0$ および π で2つの平面に囲まれた等質な厚さの板を考え, 熱はこの方向にだけ移動するとすれば, $D\equiv]0,\pi[$ である. 初期条件は(1.10)式で, また境界条件は上述の仮定から, (1.11)式の最も簡単な場合である,

(2.6) $u(t,0)=u(t,\pi)=0, (t>0)$

となる. このような初期条件および境界条件をもって (2.5) 式の解を求める方法はすでによく知られているように, $u(t,x)=v(t)z(x)$ とおいて,

(2.7) $\dfrac{z''(x)}{z(x)}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{v'(t)}{v(t)}=\lambda$

のような x および t に関する常微分方程式を解く. ただし(2.7)式において “′” はそれぞれの変数について1階の微係数を表わすものである. また定数 λ は固有値とよばれるもので, この場合は

(2.8) $\lambda=-n^2 \ (n=1,2,\cdots)$

である. 解 $u(t,x)$は最終的に次式のようになる.

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)(\phi_n(x),u_0(x))\exp(-n^2c^2t)$$

ただし上式で $\phi_n(x)$ は固有関数とよばれるもので, この場合は $\phi_n(x)=\sin nx$ で,

(2.9)$_1$ $(\phi_n(x),u_0(x))=\int_D \phi_n(x)u_0(x)dx$

(2.9)$_2$ $\int_D \phi_m(x)\phi_n(x)dx=\delta_{mn}$

である. ただし $\delta_{mn}=1(m=n), \delta_{mn}=0(m\neq n)$ である.

次に1.2(i)の場合, すなわちシステムに加法的雑音が印加される場合を, (2.5) 式の数学モデルを再び使用した,

(2.10) $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+\gamma(t,\omega)$

について考察してみる. (2.10)式の解は容易に次式のように求められる.

(2.11) $$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\phi_n(x)(\phi_n(x),u_0(x))\exp(-n^2c^2t)+\int_0^t\phi_n(\phi_n,\gamma(t,\omega))\exp\{-n^2c^2(t-s)\}ds\Big]$$

このように, とにかく解の形は求められる.

ここまでの展望を総括してみる．不確定要素が加法的雑音であると考えられる場合は，確率集中定数システムでも，確率分布定数システムでも，確定システム理論と類似の手法の確立は可能で，これによって状態および未知パラメータの推定，確率的最適制御，システムの確率安定，確率的可観測性および可制御性，観測器の最適配置問題等に多彩な研究が展開され理論の体系化がかなり進んでいる．これについてはすでに筆者が別の機会にしばしば展望を試みたので，たとえば文献[3][4]を参照願いたい．また分布定数システムの数学モデルをヒルベルト空間における常微分方程式として表現し，半群を用いてその解を求めるという方法も開発されている[5][6].

ところが 1.2(ii) の場合のように，システムパラメータの不確定性を考慮すると，特に確率分布定数システムに対して事情は一変し，不確定固有値問題という事態が発生する．

3. 不確定固有値問題

最も簡単な例として，(2.10)式に類似の

$$(3.1)\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=c^2(\omega)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

という確率偏微分方程式でモデル化される分布定数システムを取り扱ってみる．これは熱伝導係数というパラメータが不確定変動をするシステムであるが，たとえば $c^2(\omega)=1/\{1+\zeta(\omega)\}$ として，(2.7)式から $z(x)$ についての常微分方程式をつくると，

$$(3.2)\quad z''(x)-\lambda\{1+\zeta(\omega)\}z(x)=0$$

となって，パラメータに確率変数をもつ確率定微分方程式が導かれる．したがって (3.2) 式の解 $z(x)$ は確率過程，よって(2.7)式から当然 λ も確率変数となる．この問題は不確定固有値問題とよばれ，まだ非常に多くの未解決の問題が山積しており，これからの研究分野である．

上述のように(1.7)式の作用素 $\mathscr{L}$ が不確定要素を含む場合には非常にむずかしい問題となるが，最近10年くらいの間に，確率分布定数システムの数学モデルを，確率集中定数システムのそれと形式的に同じ形に書くことによって，現在までにかなり体系化が進んでいる集中定数システム理論を導入して，種々の問題を解決しようと試みが続けられている．この試みの理論的背景は関数空間の概念である．以下に 1.2(iii) のシステム境界に存在する不確定要素をも考慮に入れて，確率分布定数システムの関数空間における数学モデルを確立してみる．この目的のために $\gamma(t,x)\equiv 0$ とし，作用素 $\mathscr{L}$ を (1.9) 式の形にとり，しかもパラメータ a_1 を $a_1\times\gamma(t,\omega)$ のように白色雑音過程とした，

$$(3.3)\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=a_2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+a_1\gamma(t,\omega)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$$

という不確定変動熱抵抗をもつ熱伝導システムの数学モデルから出発する．このシステムの境界にも不確定要素が存在し，境界条件は，

$$(3.4)\quad a_2\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial \xi}+b_1\gamma(t,\omega)u(t,\xi)=F(t,\xi),\quad \xi\in\partial G.$$

のように与えられるものとしよう．一般に x を n 次元ユークリッド空間で場所を与える変数とし，D 上での実数値関数を $\phi(x)$ として $\int_D|\phi(x)|^2dx<\infty$ となるものの全体を $L^2(D)$ と書く．(3.3) 式で，簡単のために x を 1 次元として，領域 D を $]0,1[$ という区間にとれば，上記の $L^2(D)$ は $L^2[0,1]$ である．

さて上述のような関数 ϕ を(3.3)式に乗じて，D 上で積分を行なうと，次式のようになる．

$$\begin{aligned}(3.5)\quad &(u(t),\phi)+\int_0^t\langle A_D u(s),\phi\rangle ds\\&+\int_0^t(A_s u(s),\phi)dw_1(s,\omega)\\&+\int_0^t(B_s u(s),\phi)_\Gamma dw_2(s,\omega)\\&=(u_0,\phi)+\int_0^t(F(s),\phi)_\Gamma ds\end{aligned}$$

ただし上式の計算は途中で部分積分を実行し，その結果に初期条件 (1.10) 式および境界条件 (3.4)式を適用している．この操作によって(3.5)式左辺の第 4 項と右辺の第 2 項が出現し，さらに

$(3.6)_1 \quad (u(t), \phi) \triangleq \int_0^1 u(t,x)\phi(x)dx$

$(3.6)_2 \quad \langle A_D u, \phi \rangle \triangleq \int_0^1 a_2 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} dx$

$(3.6)_3 \quad (A_s u, \phi) \triangleq \int_0^1 a_1 \frac{\partial u}{\partial x}\phi(x)dx$

$(3.6)_4 \quad (B_s u, \phi)_\Gamma \triangleq b_1\Big[u(s,\xi), \phi(\xi)\Big]_{\xi=0}^{\xi=1}$

$(3.6)_5 \quad (F(t), \phi)_\Gamma \triangleq \Big[F(t,\xi)\phi(\xi)\Big]_{\xi=0}^{\xi=1}$

という表現を導入している．(3.5) 式の微分形を書くと，次式のようになる．

$(3.7)_1 \quad d(u(t), \phi) + \langle A_D u(t), \phi \rangle dt$
$\quad + (A_s u(t), \phi) dw_1(t)$
$\quad + (B_s u(t), \phi)_\Gamma dw_2(t) = (F(t), \phi)_\Gamma dt$

$(3.7)_2 \quad (u(0), \phi) = (u_0, \phi)$

これは関数空間上の伊藤型確率常微分方程式である．(3.7) 式を基礎にして確率分布定数システムの状態推定，最適制御，安定性等の問題に対する研究が多彩に展開されているのが現状である．

4. 結　言

本稿では確率システム理論の基礎的な面を概説した．基礎的な面とは確立システムの数学モデルの確立と，それの数学的な妥当性に関する検討である．しかし紙数の都合上，後者について言及する余裕はほとんどなく，前者すなわち数学モデルの呈示に主眼をおかざるを得なかった．

数学モデルの呈示から理解できるように，確率集中定数システムは伊藤型確率微分方程式がその数学モデルで，確率分布定数システムも関数空間で同じ形をした確率微分方程式を数学モデルとして種々の理論を展開する方法が主流となりつつあることが認められる．

参　考　文　献

[1] Sunahara, Y.: Identification of Distributed Parameter Systems, Chapter 2 ed. by S. G. Tzafestas, Pergamon, London (to appear in 1982)

[2] Sunahara, Y: Recent Trends of the Optimal Control for Stochastic Distributed Parameter Systems, (Special Lecture), Proc. of the 10th IFIP World Congress on System Modeling and Optimization, Oct. 1981, N.Y.

[3] 砂原善文：確率システム理論—不確定性への今後の対応，システムと制御，Vol. 20, No. 3 (1982), 154–162

[4] 砂原善文，確率システム理論，電子通信学会，(1980)

[5] Curtain, R. F. and Pritchard, A. J.: An Abstract Theory For Unbounded Control Action For Distributed Parameter Systems, *SIAM J. Control and Optimigation*, Vol. 15, No. 4 (1977), 566–611

[6] Curtain, R. F. and Pritchard, A. J.: Infinite Dimensional Linear System Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences, ed. by A. V. Balakrishnan and M. Thoma, Springer-Verlag, N. Y. (1978)

●ミニミニ●　　　　　　●OR●

タラとレバ

ゴルフをする人は，終ってから，「あそこで1mのパットを外さなかったら」とか「あそこでバンカーに入れなければ」とかいろいろとかまびすしい．結局言わんとすることはスコアカードの打数よりも実力のほうが上だよということのようだ．ところがそんな人たちにかぎって，自分が得をした打数を忘れてしまっている．誰でも10mもあるパットが1発で入ったとか，バンカーからピンに50cmほどに出したとか，1ラウンドのうち得をした打数が2つや3つは大ていあるもの．平均値的に考えれば，タラとレバで損をした打数と得をした打数はほぼ相殺されると見てよかろう．

やっぱり，あなたのスコアはあなたの実力を示していると知るべきだろう．　　　(小野勝章)