マトロイド理論の基礎 (11・最終回)

大山 達雄

7. ポリマトロイド

7.1 ポリマトロイドの定義

ポリマトロイドの定義を与える前に，それに必要とされるいくつかの記法上の定義を与えておこう．有限集合 E から R_+(非負実数の集合)への写像の全体を R_+^E と表わす．つまり R_+^E は添字集合 E 上の非負実数値ベクトルの集合を表わすとも言うことができる．

いま要素 $x \in R_+^E, E$ の部分集合 A に対して，R_+^E における x の e 番目の要素，つまり $e \in E$ の写像を $x(e)$ と表わし

$$x(A)=\sum_{e\in A} x(e), \quad A\subseteq E \tag{7.1}$$

と定義する．またベクトル $x\in R_+^E$ の大きさ(modulus) $|x|$ を

$$|x|=x(E)=\sum_{e\in E}|x(e)| \tag{7.2}$$

と表わすことにする．2つのベクトル $x,y\in R_+^E$ および要素 $e\in E$ に対して，x と y の間の和 $\vee$ と積 $\wedge$ を次のように定義する．

$$(x\vee y)(e)=\max\{x(e),y(e)\}, e\in E$$

$$(x\wedge y)(e)=\min\{x(e),y(e)\}, e\in E.$$

またベクトル $x,y\in R_+^E$ に対して

$$x(e)\geqq y(e), \forall e\in E$$

が成り立つ時，$x\geq y$ と表わすことにし，この時 y を x の部分ベクトル(subvector)と呼ぶことにする．このようにして集合 R_+^E 上の要素に対して順序関係を定義することができる．

[ポリマトロイドの定義とその例]

有限集合 E のベキ集合 2^E から R_+ への関数 ρ が以下の (i)―(iii) を満足する時，ρ を β-関数(β-function, [1] 参照)と呼ぶ．

(i) $\rho(\phi)=0$

(ii) $A\subseteq B\subseteq E$ ならば，$\rho(A)\leqq\rho(B)$

(iii) 任意の部分集合 $A,B\subseteq E$ に対して

$$\rho(A\cup B)+\rho(A\cap B)\leqq\rho(A)+\rho(B).$$

おおやま たつお 埼玉大学

上の条件 (i)―(iii) から ρ は単調非減少な劣モデュラー関数であると言うことができる．2.2節で与えた階数関数にもとづくマトロイドの公理系と比較されたい．このようにして定義される有限集合 E と β-関数 ρ との対 (E,ρ) がポリマトロイド(polymatroid)である．ポリマトロイド $P=(E,\rho)$ に対して，集合 E を基礎集合(ground set)，β-関数 ρ を基礎集合階数関数 (ground set rank function)と呼ぶ．

集合 R_+^E の要素ベクトル $x\in R_+^E$ が

$$x(A)\leqq\rho(A), \quad \forall A\subseteq E \tag{7.3}$$

を満たす時，x をポマトロイド $P=(E,\rho)$ の独立ベクトル(independent vector) と呼ぶ．またポリマトロイド P の独立ベクトルは，ベクトル間の順序関係に関して極大である時，P の基底と呼ばれる．ベクトル $a\in R_+^E$ に対して，a のベクトル階数(vector rank) $r(a)$ は

$$r(a)=\min_{X\subseteq E}\{a(X)+\rho(E\backslash X)\} \tag{7.4}$$

で与えられる．

もうひとつのポリマトロイドの定義を与えよう．基礎集合 E に対して，R_+^E の要素から成る独立ベクトルの集合 $\mathscr{I}_p$ とは，R_+^E の部分集合のうちで以下の条件 (I_p1), (I_p2) を満たすような空でないコンパクトな集合の族であるとする．

(I_p1) 独立ベクトルの任意の部分ベクトルは独立ベクトルである．

(I_p2) 任意のベクトル $a\in R_+^E$ に対して，a のすべての極大独立部分ベクトル x は同じ大きさ(ベクトル階数 $r(a)$ で与えられる)を有する．

なお上の (I_p2) の“極大”とは，a の部分ベクトルであって $y>x$ となるような独立ベクトル y が存在しないことを意味するものとする．

このようにして定義される基礎集合 E と独立ベクトルの集合族 $\mathscr{I}_p$ の対 $(E,\mathscr{I}_p)$ をポリマトロイドという．

上の定義からは，$|E|=2$ なる2次元ベクトル空間 R_+^E においては，ポリマトロイドの独立ベクトルの集合の一般形として図7.1の斜線部分のような3種類があることがわかる．

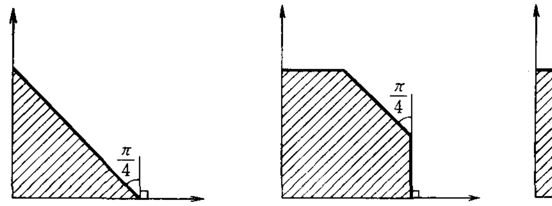

図 7.1　2次元ポリマトロイドの例

また$|E|=3$なる3次元ベクトル空間R_+^Eにおけるポリマトロイドの最も一般的な形としては，図7.2の太い実線部分で囲まれたような形で考えられることがわかる．

独立ベクトルによるポリマトロイドの定義の(I_p2)のかわりに，次のような(I_p2')とすることも可能である．なお(I_p1), (I_p2')のようにして得られる独立ベクトルの集合族を$\mathscr{I}_p'$とする．

(I_p2')　$u, v\in\mathscr{I}_p'$であってかつ$|v|>|u|$とすると

$$u<w\leq u\vee v$$

を満たすベクトル$w\in\mathscr{I}_p'$が必ず存在する．

ポリマトロイドの独立ベクトルによる定義(I_p1), (I_p2)と(I_p1), (I_p2')との関係が，2.1節に紹介したマトロイドの独立性の公理$(I1)$, $(I2)$, $(I3')$と$(I1)$, $(I2)$, $(I3)$との関係に対応していることを確認されたい．ここに掲げた3種類のポリマトロイドの定義の等価性の証明はここでは省略する．証明の詳細については Welsh [2], (pp.338-340)などを参照されたい．

[ポリマトロイドと劣モデュラー関数]

ポリマトロイドと劣モデュラー関数との関係について述べよう．独立ベクトルを用いたポリマトロイドの定義(I_p1), (I_p2')から次の定理が得られる．

定理 7.1　ポリマトロイドの独立ベクトルの集合はR_+^Eにおける凸多面体をなす．

上の定理のようにして構成されたポリマトロイドの多面体を独立多面体 (independence polytope) と呼ぶ．そこで基礎集合E, 独立ベクトルの集合P, 基礎集合階数関数ρによって定義されるポリマトロイドを(E, P, ρ)と記すことにすると，ポリマトロイド(E, P, ρ)の独立多面体は次のような不等式系で定義されるR_+^Eの領域として与えられる．

$$x(A)\leqq\rho(A),\quad \forall A\subseteq E. \tag{7.5}$$

基礎集合階数関数ρが単調非減少な劣モデュラー関数であることは前述のとおりであるが，任意の非負劣モデュラー関数を用いてポリマトロイドを次のように定義することもできる．

定理 7.2　有限集合Eの部分集合に対して，包含関係$\subset$および演算$\wedge$, $\vee$によって順序関係が定義されている束を$\mathscr{L}$とする．この時写像$\mu:\mathscr{L}\to R_+$が$\mathscr{L}$上で劣モデュラーである，すなわち任意の$A, B\in\mathscr{L}$に対して

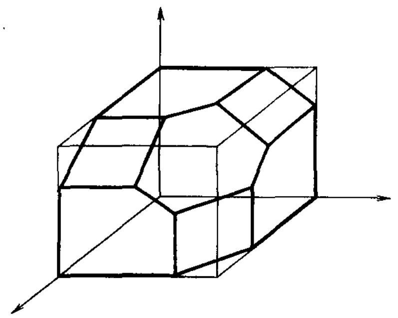

図 7.2　3次元ポリマトロイドの例

$$\mu(A\vee B)+\mu(A\wedge B)\leqq\mu(A)+\mu(B) \tag{7.6}$$

が成り立つとすると，次のような半空間の共通集合

$$\begin{cases} x(A)\leqq\mu(A), & \forall A\in\mathscr{L} \\ x\geqq 0 \end{cases} \tag{7.7}$$

によって定義されるR_+^Eの領域$P(E, \mu)$はポリマトロイドの独立多面体となる．またこのポリマトロイドの階数関数は，すべての$a\in R_+^E$に対して次式で与えられる．

$$r(a)=\min_{X\in\mathscr{L}}\ \{\mu(X)+a(E\backslash X)\}. \tag{7.8}$$

証明を与える前に例を掲げよう．いま$\mathscr{L}$を$E=\{1, 2, 3\}$の部分集合ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2, 3\}$から成る束とし，写像$\mu:\mathscr{L}\to R_+$を以下のように定義する．

$$\mu(\{\phi\})=0,\ \ \mu(\{1\})=2,\ \ \mu(\{2\})=3,$$
$$\mu(\{3\})=5,\ \ \mu(\{1, 2, 3\})=7.$$

この時μは$\mathscr{L}$上の劣モデュラー関数であって，以下のような不等式体系で与えられる多面体はR^3におけるポリマトロイドとなる(図7.2参照)．

$$\begin{cases} x_1 \leqq 2 \\ x^2 \leqq 3 \\ x_3\leqq 5 \\ x_1+x_2+x_3\leqq 7 \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqq 0. \end{cases}$$

証明(定理7.2)　(7.7)で定義されるR_+^Eの領域$P(E, \mu)$がポリマトロイドの独立ベクトルの公理(I_p1), (I_p2)を満たすことを示す．

まず$P(E, \mu)$のコンパクト性は明らかである．いま$a\in R_+^E$に対してaの部分ベクトルの集合を

$$C(a)=\{z\,|\,z\leq a\}$$

とし，$P(E, \mu)\cap C(a)$の基底をx, yとする．これらの基底が同じ大きさである，つまり$|x|=|y|$であることを示そう．

いま$|x|>|y|$と仮定する．ここで

$$\mathscr{L}(y)=\{A\,|\,A\in\mathscr{L}, y(A)=\mu(A)\} \tag{7.9}$$

とすると，$A, B\in\mathscr{L}(y)$に対して

$$\mu(A)+\mu(B)=y(A)+y(B)$$
$$=y(A\cap B)+y(A\cup B)$$
$$\leqq\mu(A\wedge B)+\mu(A\vee B). \quad (7.10)$$

(束 $\mathscr{L}$ においては，$A\cap B=A\wedge B, A\cup B\subseteq A\vee B$)

関数 μ が劣モデュラーであることから，(7.10)においては等号が成立しなければならない．つまり

$$\mu(A\wedge B)=y(A\cap B)$$
$$\mu(A\vee B)=y(A\cup B).$$

したがって $A, B\in\mathscr{L}(y)$ に対して，$A\wedge B, A\vee B\in\mathscr{L}(y)$となる．

次に $E\notin\mathscr{L}(y)$を示す．いま

$$D=\vee\{A|A\in\mathscr{L}(y)\}$$

とすると，上の結果から $D\in\mathscr{L}(y)$となる．そこで$E\in\mathscr{L}(y)$とすると

$$|y|=y(E)=\mu(E)\geqq x(E)=|x|>|y|$$

となり矛盾が生ずるので，$D\neq E$ でなければならない．

一方，

$$x(D)\leqq\mu(D)=y(D) \text{ かつ } |x|>|y|$$

であるから，$x(e)>y(e)$ なる要素 $e\in E\backslash D$ が存在しなければならない．

そこで次のようにδを定める．

$$\gamma=\min_{A\notin\mathscr{L}(y)}\{\mu(A)-y(A)\}$$
$$\delta=\min\{\gamma, x(e)-y(e)\}.$$

いまベクトル $z\in R_+{}^E$ が上の δ を用いて

$$\begin{cases} z(e)=y(e)+\delta \\ z(e')=y(e'),\ e'\neq e \end{cases} \quad (7.11)$$

のように与えられたとすると，$z\in P(E,\mu)$ となることを示す．

E の任意の部分集合 $A\in\mathscr{L}(y)$ に対して，$e\notin A$ であってかつ

$$z(A)=y(A),\ A\in\mathscr{L}(y)$$

である．一方，もし $A\notin\mathscr{L}(y)$ ならば，(7.11)より

$$z(A)\leqq y(A)+\delta\leqq\mu(A)$$

となる．このようにして $z\in P(E,\mu)$が得られる．

ここで $z(e)\leqq x(e)$, $e'\neq e$ なる e' に対して $z(e')\leqq y(e')$, $z\leq a$ が成り立つことから $z\in P(E,\mu)\cap C(a)$ となり，y の特性を有する y より大なるベクトルzが存在するので，y の極大性に矛盾する．このようにして $|x|=|y|$ が得られ，$P(E,\mu)$ はポリマトロイドの独立多面体となる．

次にこのポリマトロイドの階数関数を示そう．$a\in R_+{}^E$ であって $x\in P(E,\mu)\cap C(a)$であるとする．この時，任意の $A\in\mathscr{L}$ に対して

$$|x|=x(A)+x(E\backslash A)$$
$$\leqq\mu(A)+a(E\backslash A).$$

したがってある x に対して $r(a)=|x|$ であるから

$$r(a)\leqq\min_{A\in\mathscr{L}}\{\mu(A)+a(E\backslash A)\}. \quad (7.12)$$

いま (7.12) において $r(a)<\min_{A\in\mathscr{L}}\{\mu(A)+a(E\backslash A)\}$ とし，$y\in P(E,\mu)\cap C(a)$ かつ $|y|=r(a)$ であるとする．ここで $E\in\mathscr{L}(y)$ とすると $|y|=\mu(E)$ となり矛盾が生ずる．したがって $E\notin\mathscr{L}(y)$ でなければならず，$D=\vee\{A|A\in\mathscr{L}(y)\}\neq E$. そこで任意の $X\in\mathscr{L}$ に対して

$$y(E)=r(a)<\mu(X)+a(E\backslash X)$$

であるから，特に上式において $X=D$ とすると

$$y(E)<\mu(D)+a(E\backslash D)$$

が得られる．つまり

$$y(E\backslash D)<a(E\backslash D).$$

したがって $y(e)<a(e)$ なる要素 $e\in E\backslash D$ が存在する．

(7.11)の場合と同様にして y を z に拡張すると(ただし δ を決定する式の x は a に対応する)，$z\in P(E,\mu)\cap C(a)$となり，この場合も y の極大性と矛盾する．

このようにして(7.12)は等号となり，(7.8) が得られる． ⊠

7.2 ポリマトロイドと線形計画法

ポマリトロイドが束上の非負の劣モデュラー関数によって定義され，それを用いて独立多面体が定義されることを前節に述べた．そこで独立多面体を与える凸多面体の頂点を考えると，以下に述べるように，これが線形計画問題とも密接な関連を有することがわかる．このことを最初に提示したのは Edmonds [1] であるが，ポリマトロイド理論と線形計画法との関連というばかりでなく，マトロイド理論全般の応用といった観点からも興味ある問題である．

[ポリマトロイドの独立多面体]

有限集合 $E=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$，独立多面体 P, そして非減少，非負の劣モデュラー関数ρによって定義されるポリマトロイドを(E,P,ρ)と表わす．

いま E の要素の順列 $\pi=(i_1,i_2,\cdots\cdots,i_n)$ に対して

$$A_\pi{}^1=\{i_1\}$$
$$A_\pi{}^2=\{i_1,i_2\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_\pi{}^n=\{i_1,i_2,\cdots\cdots,i_n\}$$

と定義すると，次の定理が成立する．

定理 7.3 ポリマトロイド (E,P,ρ) の独立多面体 P の頂点は，E の要素の順列 π に対して $v=v(k,\pi)=(v_1,v_2,\cdots\cdots,v_n)\in R_+{}^E, k$ は $0\leqq k\leqq n$ なる整数，として

$$\begin{cases} v_{i_1}=\rho(A_\pi{}^1) \\ v_{i_2}=\rho(A_\pi{}^2)-\rho(A_\pi{}^1) \\ v_{i_3}=\rho(A_\pi{}^3)-\rho(A_\pi{}^2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{i_k}=\rho(A_\pi{}^k)-\rho(A_\pi{}^{k-1}) \\ v_{i_{k+1}}=v_{i_{k+2}}=\cdots\cdots=v_{i_m}=0 \end{cases} \quad (7.13)$$

の形に表わすことができる．

上の定理の系として，独立多面体の頂点の整数性を与える次のような結果が得られる．

系 7.4 ポリマトロイド (E, P, ρ) の基礎集合階数関数が整数値関数であれば，独立多面体 P のすべての頂点は $R_+{}^E$ における整数点である．

例を掲げよう．ポリマトロイドの独立多面体が次のように与えられているとする．

$$\begin{cases} x_1 \leqq 3 \\ x_2 \leqq 5 \\ x_3 \leqq 4 \\ x_1 + x_2 \leqq 7 \\ x_2 + x_3 \leqq 8 \\ x_1 + x_3 \leqq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqq 9 \\ x_i \geqq 0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases} \qquad (7.14)$$

いま $\{1,2,3\}$ のひとつの順列として $(1,2,3)$ をとると

$$v(3,\pi) = (3,4,2)$$

$$v(2,\pi) = (3,4,0)$$

となる．上の定理 7.3 を用いると，線形関数 $cx = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ は P 上のひとつの頂点 $v(k,\pi)$ で最大値をとることがわかる．

[線形計画問題とグリーディアルゴリズム]

ポリマトロイドと線形計画問題を関連づける次の定理を紹介しよう．なおこの定理 7.5 から前の定理 7.3 は容易に得られる．

定理 7.5 有限集合 E に対して $c \in R^E$ であって，E の要素の順列 $\pi = (i_1, i_2, \cdots\cdots, i_n)$ が次の条件を満たすとする．

$$c_{i_1} \geqq c_{i_2} \geqq \cdots\cdots \geqq c_{i_k} > 0 \geqq c_{i_{k+1}} \geqq \cdots\cdots \geqq c_{i_n}. \qquad (7.15)$$

この時 cx は P 上の頂点 $v(k,\pi)$ で最大となる．

なお上の定理 7.5 にあるような頂点 $v(k,\pi)$ を与えるアルゴリズムは，グリーディアルゴリズム (greedy algorithm) と呼ばれる．このアルゴリズムの名称としてのグリーディ (greedy, “貪欲な” の意味) が (7.15) で与える係数の大きい順にベクトル x の要素 x_i をできるだけ大きくとるという思想にもとづいていることが理解されるであろう．

グリーディアルゴリズムはポリマトロイドに限らず，一般のマトロイド理論とも密接な関連を有している．たとえばグリーディアルゴリズムによってマトロイドを定義することも可能であるし，またこのアルゴリズムを用いてマトロイドのすべての要素が重みを有する場合に重みの和が最大の独立集合を求めることも可能である．グリーディアルゴリズムとマトロイドとの関連については，たとえば Lawler [3], Edmonds [1], [4] などを参照されたい．

定理 7.5 の証明を与えよう．

証明(定理 7.5) 次のような線形計画問題を考える．

$$\max \quad cx \qquad (7.16)$$

$$\text{sub. to} \quad x(A) \leqq \rho(A), \ \forall A \subseteq E. \qquad (7.17)$$

$$c = (c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n), \ x = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)^t$$

上の線形計画問題の双対問題は，E の任意の部分集合 $A \subseteq E$ に対する変数 $y(A)$ を用いて以下のように書くことができる．

$$\min \sum_{A \subseteq E} \rho(A) y(A) \qquad (7.18)$$

$$\text{sub. to} \sum_{A,\, j \in A} y(A) \geqq c_j, \ j = 1, \cdots, n \qquad (7.19)$$

$$y(A) \geqq 0, \ \forall A \subseteq E.$$

そこで E の要素の順列 π に対して (7.13) で定義された $v(k,\pi)$ を x のところに代入すると，(7.17) が満たされることは容易に確かめられる．したがって $v(k,\pi)$ は線形計画問題の主問題 (7.16), (7.17) に対する実行可能解である．

また一方，順列 π に対して

$$\begin{cases} \hat{y}(A_\pi{}^k) = c_{i_k} \\ \hat{y}(A_\pi{}^j) = c_{i_j} - c_{i_{j+1}}, j = 1, \cdots\cdots, k-1 \\ \hat{y}(A_\pi{}^j) = 0, \ \text{その他の場合} \end{cases} \qquad (7.20)$$

のように $\hat{y}$ を定めると，$\hat{y}$ は双対問題 (7.18), (7.19) の実行可能解であることがわかる．

$v = v(k,\pi) = (v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n)$ と (7.13) から次の関係が得られる．

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \sum_{j=1}^{k-1} (c_{i_j} - c_{i_{j+1}}) \rho(A_\pi{}^j) + c_{i_k} \rho(A_\pi{}^k)$$

$$= \sum_{A \subseteq E} \hat{y}(A) \rho(A).$$

このようにして線形計画問題の主問題，双対問題の実行可能解 $v, \hat{y}$ に対してそれぞれの目的関数値が等しくなる．したがって $v(k,\pi)$ と $\hat{y}(A)$ はそれぞれ線形計画問題 (7.16), (7.17) および (7.18), (7.19) の最適解であることがわかる． ⊠

(7.14) の例に沿って，上の定理7.5の具体例を示そう．(7.14) で与えられる独立多面体上で

$$cx = 4x_3 + x_1 - 2x_2 \qquad (7.21)$$

を最大にすることを考える．定理の前提から順列を $\pi = (3,1,2)$ とすると，以下の集合が得られる．

$$A_\pi{}^1 = \{3\}$$

$$A_\pi{}^2 = \{3,1\}$$

$$A_\pi{}^3 = \{3,1,2\}.$$

そこで $k=2$ として $v(k,\pi)$ を求めると，(7.13) より

$$v(2,\pi) = (4,2,0)$$

となり，$\hat{y}(A)$ に関しては

$\hat{y}(A_x{}^2)=1$

$\hat{y}(A_x{}^1)=3$

$\hat{y}(A_x{}^3)=0$

となる．したがって上の $v, \hat{y}$ に対して次の関係が成立する．

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 4\times4+1\times2=18$$

$$\sum \hat{y}(A)\rho(A)=4\times3+6\times1=18.$$

このようにして定理 7.5 が確認される．

[整数ポリマトロイドとマトロイド多面体]

さてポリマトロイド (E, P, ρ) に対して，ベクトル a, x が整数値の時に公理 (I_p2) が整数値で成立する場合にポリマトロイドを整数ポリマトロイド (integral polymatroid) と呼ぶ．つまり整数ポリマトロイドの階数関数 r は，$R_+{}^E$ の整数格子点上で整数値をとることになる．そこで有限集合 E 上の任意のマトロイド M に対して，M の階数関数を r とする．この時関数 r は整数ポリマトロイド (E, P, r) の基礎集合階数関数となり，またその独立多面体の頂点は M の独立集合の接続ベクトル (incidence vector) となる．このようにしてマトロイド M から定義されるポリマトロイドをマトロイド多面体 (matroid polyhedron) と呼ぶ．

例を掲げよう．図 7.3 にあるグラフ H の弧の集合 E 上の閉路マトロイド M を考える．

$m\times n$ 係数行列 $A=(a_{ij})$ は M の閉じた集合と E の要素との接続行列とする．

$a_{ij}=1$　弧 e_j が閉集合 i に含まれる時

$\quad =0$　そうでない時．

また列ベクトル $r=(r_1, r_2, \cdots\cdots, r_m)^t$ において，r_i は集合 i の階数を表わすとする．

この時マトロイド多面体は

$$\begin{cases} Ax \leqq r \\ x \geqq 0 \end{cases} \tag{7.22}$$

となり，係数行列 A は次のように書くことができる．

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
$\{e_1\}$	1	0	0	0	0
$\{e_2\}$	0	1	0	0	0
$\{e_3\}$	0	0	1	0	0
$\{e_4\}$	0	0	0	1	0
$\{e_5\}$	0	0	0	0	1
$\{e_1, e_4\}$	1	0	0	1	0
$\{e_1, e_5\}$	1	0	0	0	1
$\{e_2, e_4\}$	0	1	0	1	0
$\{e_2, e_5\}$	0	1	0	0	1
$\{e_1, e_2, e_3\}$	1	1	1	0	0
$\{e_3, e_4, e_5\}$	0	0	1	1	1
$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$	1	1	1	1	1

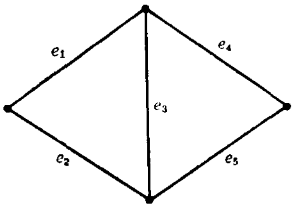

図 7.3　グラフ H

$$r=(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3)^t.$$

(7.22) で表わされる多面体の頂点は，マトロイド M の独立集合に対応している．したがってマトロイド多面体 (7.22) の頂点の座標は次のように書くことができる．

$x_j=1$　要素 e_j が頂点に対応する独立集合の要素である時

$\quad =0$　そうでない時．

たとえば $\{e_1\}$, $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_2, e_4\}$, $\{e_2, e_3, e_4\}$ などの M の独立集合に対応する x は，(7.22) で表わされるマトロイド多面体の頂点を表わしている．また (7.22) の多面体を制約領域とする線形計画問題の最適解は，x_j が整数であるという整数制約条件をつけ加えなくとも x_j が整数の点で達成されることは次の定理に述べるとおりである．

定理 7.6　任意のマトロイド M に対して，(7.22) の場合のようにして作られるマトロイド多面体

$$\begin{cases} Ax \leqq r \\ x \geqq 0 \end{cases}$$

の頂点は整数要素の解を有する．またこの多面体の頂点とマトロイド M の独立集合とは 1 対 1 に対応する．

ポリマトロイドと線形計画法あるいはグリーディアルゴリズム等との関連については，Lawler [3], Edmonds [1], [4], Welsh [5] などにそれらの紹介を含めて詳細に述べられている．また本稿では，ポリマトロイドに関する双対マトロイド，あるいは 2 つ以上のポリマトロイドに対する共通独立多面体，あるいはそれらの応用を含めた独立流れ問題等については紹介することはできなかった．これらに関しては，たとえば Iri and Fujishige [6], Fujishige [7], 藤重 [8] などを参照されたい．

あとがき

本講座ではマトロイド理論の紹介ということを目的として，マトロイド理論全般にわたって“広く浅く”これまでに得られている主要な結果の整理を行なってきた．本誌の前編集委員長の高橋磐郎教授(筑波大学)よりのご依頼の下で，“マトロイド理論の紹介”の原稿を書き始めたものの，理論の“紹介”というその意味においても各

章各節にかなり不十分な箇所があるというばかりでなく，マトロイド理論の応用可能性という点を強調するに十分であったとは思えない．オペレーションズリサーチにおける諸問題，情報理論，電気回路網理論等におけるマトロイド理論の応用に関する研究結果については機会を改めて紹介をしてもらうことにして，マトロイドの基礎理論の紹介はひとまずここで終えることにしたい．

最後になってしまいましたが，本稿の作成段階において伊理正夫教授(東京大学)に適切なご助言，ご指摘等の多大なご協力をいただいたことに対して，ここに改めて感謝の意を表します．そしてまた本誌の現編集委員長の小林竜一教授(立教大学)にも“できるだけわかりやすい解説を”というご依頼の下に原稿をていねいに読んでいただき，心から感謝する次第です．

本稿の内容につきましても，今後とも多くの人々のご助言，ご指摘が得られれば筆者として幸いと存じます．

長い間のご愛読ありがとうございました．

参 考 文 献

[1] J. Edmonds: "Submodular Functions, Matroids and Certain Polyhedra", *Proc. Int. Conf. on Combinatorics* (Calgary), Gordon and Breach (New York), 1970, pp. 69-87

[2] D. J. A. Welsh: *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976

[3] E. L. Lawler: *Combinatorial Optimization—Networks and Matroids*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1976

[4] J. Edmonds: "Matroids and the Greedy Algorithm", *Mathematical Programming* 1, 1971, pp. 127-136

[5] D. J. A. Welsh: *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976

[6] M. Iri and S. Fujishige: "Use of matroid theory in operations research, circuits and systems theory", *Int. J. Systems Sci.*, Vol. 12, No. 1, 1981, pp. 27-54

[7] S. Fujishige: "Algorithms for solving the independent flow problems", *J. of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 21, 1978, pp. 189-204

[8] 藤重 悟：マトロイド理論とそのシステム工学的諸問題への応用，システムと制御，Vol. 23, No. 1, 1979, pp. 11-20