マトロイド理論の基礎(10)

大山　達雄

6.　マトロイドの分割と被覆と詰合せ

6.1　マトロイドの分割

マトロイド理論を用いると，組合せ問題においてこれまでに得られているいくつかの結果をより単純な形で証明することができたり，あるいはさらに一般的な形の新しい結果を得るのに役立ったりすることがたびたびある．この節および次節で述べるマトロイドの分割，被覆，詰合せ等の理論は，そのような意味での典型的な例であると言うことができる．

[Edmonds の定理]

マトロイドは，前にも述べているように，ある有限集合Eの上で定義される概念である．この節では，有限集合Eがある種の条件を満足するような部分集合によって分割(partitioning)できるための必要十分条件を与えるという問題を考えることにする．まず次のような問題を考えてみよう．

任意の実数係数を有する行列が与えられた時に，その列ベクトルを要素とする集合をEとする．集合Eをできるだけ少ないグループ(たとえばk個)に分割し，かつ各グループの要素がそれぞれ1次独立であるようにできるための必要十分条件は何であろうか．

あるいはまた任意のグラフが与えられた時，その弧の集合をEとすると，Eをできるだけ少ないグループ(たとえばk個) に分割し，かつ各グループ内の弧の集合が閉路を含まないようにできるための必要十分条件は何であろうか．

このような問題に答えるのが，1965年に J. Edmonds [1]によって与えられた次の定理である．なお次の定理において，Mは有限集合E上で定義されたマトロイドであって階数関数$r(A)$, $A\subseteq E$, を有するとする．

定理 6.1　マトロイドMの要素集合Eがk個のそれぞれがMにおいて独立な部分集合に分割されるための必要十分条件は

$$|A|\leqq k\cdot r(A),\quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.1}$$

が成立することである．

上の定理の証明を与える前に，定理の実際的意味を明らかにするために例題を掲げよう．ここで3.4節に紹介した横断マトロイドの例を再度思いおこしてみよう．そこでは P. Hall によって提起された“結婚問題”として，「m 人の青年男性と n 人の青年女性との知り合いの関係が与えられている場合，m 人の男性が知り合いの女性と“結婚”できるためには，彼らの知り合い関係はどのような条件を満たさなければならないであろうか？」を考えた．そして上の質問に対する答えとしては，定理3.2(Hall)に与えられているように，

「m 人の男性が知り合いの女性と結婚できるための必要十分条件は，m人の男性のうちの任意の k 人，$1\leqq k\leqq m$，の男性が少なくとも k 人の女性と知り合いであること」であった．この“結婚問題”と上の定理6.1との関連を考えてみよう．

まず3.4節の“結婚問題”の例題に対して，男性の集合を$\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$，女性の集合を$\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$としてグラフの各頂点に対応させ，男性 m_i と女性 w_j との知り合い関係をグラフの弧(m_i, w_j)で表わすことによって2部グラフ$G=(V_1, V_2, A)$が図6.1のように得られる．

図6.1のようにして構成された2部グラフをもとにして，マトロイドを以下のように定義しよう．なお以下に定義される横断マトロイドは，3.4節の最後に述べたように，有限集合 E とその部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ が与えられた時に $\mathscr{S}$ の添字集合 $I=\{1, 2, \cdots, m\}$ 上で構成されるものである．したがってこの横断マトロイドにおいては，$J\subseteq I$ が独立集合であるということは部分集合族 $\mathscr{S}_J=\{S_j, j\in J\}$ が横断を有することである．

有限集合 E を図6.1の2部グラフの片側の頂点集合 $E=\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ とし，集合 E 上の横断マトロイド

おおやま　たつお　埼玉大学

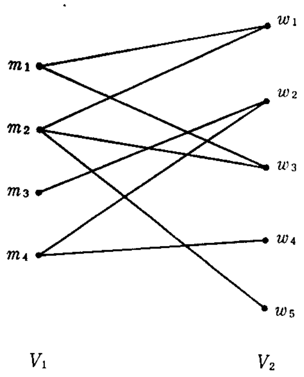

図 6.1　2部グラフ$G=(V_1, V_2, A)$

を考える．集合 $W=\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ の部分集合族を $\mathscr{M}=\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ とする．ただし $M_i, 1\leqq i\leqq 4$, は男性 m_i と知り合い関係にある女性の集合とする．したがって図6.1の例では $M_1=\{w_1, w_3\}$, $M_2=\{w_1, w_3, w_5\}$, $M_3=\{w_2\}$, $M_4=\{w_2, w_4\}$ となる．この時 $\mathscr{M}$ の部分集合族のうちで横断を有するものの集合を独立集合とするような横断マトロイドが定義される．たとえばEの部分集合 $\{m_1, m_2\}$, $\{m_1, m_2, m_3\}$ は，それぞれ部分集合族 $\{M_1, M_2\}$, $\{M_1, M_2, M_3\}$ が横断 $\{w_1, w_3\}$, $\{w_1, w_2, w_3\}$ を有するので，E 上の横断マトロイドの独立集合となる．

定理6.1において $k=1$ とすると，E が独立集合であるための必要十分条件は

$$|A|\leqq r(A),\quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.2}$$

が成立することである．なお前述のように定義された横断マトロイドにおいては，階数関数 $r(A)$はA の部分族のうちで横断をもつものの中の最大のもの，つまりAの部分横断のうちの最大の個数を有するものの要素数であると言うことができる．

一方，定理3.2の式(3.6)を用いると，集合Eが独立集合であるための必要十分条件は，E の任意の部分集合Aに対してAの要素に対応する$\mathscr{M}$の部分集合族の和集合に含まれる相異なる要素数を $\rho(A)$ で表わした時に

$$|A|\leqq \rho(A),\quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.3}$$

が成立することである．なお集合Aが図6.1のような2部グラフの頂点集合 V_1 の任意の部分集合である場合には，(6.3)の $\rho(A)$が系3.3の式(3.12)にある $|\varphi(X)|$ と同じであることは明らかである．

(6.2)と(6.3)の等価性を示そう．(6.2)が成立するとすれば，(6.3) が成り立つことは明らかである．したがって逆方向のみを以下に示そう．

いまある $A\subseteq E$ に対して $|A|>r(A)$ となったとする．ここで König の定理(たとえば[2]，[3]，[4]など参照)を用いると，部分集合Aに対応する部分横断のうちの最大の個数，つまりAとそれに隣接する弧および頂点から成る2部グラフの最大マッチングの弧の数は対応する2部グラフの頂点被覆 (node cover) のうちの最小個数に等しい．したがって部分集合Aから得られる2部グラフの頂点被覆を $A_1\cup A_2$ (ここで $A_1\subseteq A\subseteq V_1$, $A_2\subseteq V_2$) とすると，König の定理より次式が成立する．

$$r(A)=|A_1|+|A_2|. \tag{6.4}$$

$\bar{A}_1=A\backslash A_1$ とすると，$\bar{A}_1$ に含まれる頂点と隣接している弧はすべて A_2 に接続するので，次の関係が成り立つ．

$$|\varphi(\bar{A}_1)|=\rho(\bar{A}_1)\leqq|A_2|. \tag{6.5}$$

したがって(6.4)，(6.5)から

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1|&=|A|-|A_1|\\ &>r(A)-|A_1|=|A_2| && ((6.4)\text{より})\\ &\geqq\rho(\bar{A}_1). && ((6.5)\text{より})\end{aligned}$$

つまり $|\bar{A}_1|>\rho(\bar{A}_1)$ となり矛盾が生ずる．以上から(6.2)，(6.3)の条件の等価性が示されたことになる．このようにして定理3.2あるいは系3.3の形で与えられるHall の定理がマトロイドの分割に関する定理6.1 (Edmonds) の特別な場合 ($k=1$ に対応) であることがわかる．

定理6.1 (Edmonds) のより一般的な形をその証明とともに紹介しよう．有限集合 E 上で k 個のマトロイド M_i, $1\leqq i\leqq k$, が定義され，それぞれのマトロイド $M_i=(E, \mathscr{I}_i)$に対して独立集合族を$\mathscr{I}_i$，階数関数を$r_i(A)$, $A\subseteq E$, とすると，次の定理が成り立つ．

定理 6.2 (Edmonds and Fulkerson) 有限集合Eが$\{I_i\in\mathscr{I}_i,\ 1\leqq i\leqq k\}$ なる部分集合族に分割されるための必要十分条件は

$$|A|\leqq\sum_{i=1}^{k}r_i(A),\quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.6}$$

が成立することである．

上の定理において k 個のマトロイドM_i, $1\leqq i\leqq k$, がすべて同一である，つまり $M_i=M$, $r_i(A)=r(A)$, $A\subseteq E$, $1\leqq i\leqq k$, とすると，定理6.1が得られることはただちにわかる．

証明　必要性は容易に得られる．いま $\{I_i,\ 1\leqq i\leqq k\}$ がEの分割であるとすると，$I_i\in\mathscr{I}_i$, $1\leqq i\leqq k$, よりEの任意の部分集合Aに対して次の関係が成立することから明らかである．

$$|A|=\sum_{i=1}^{k}|A\cap I_i|=\sum_{i=1}^{k}r_i(A\cap I_i)\leqq\sum_{i=1}^{k}r_i(A). \tag{6.7}$$

十分性を示そう．十分性は定理にある分割を構成するアルゴリズム (マトロイド分割アルゴリズム (matroid partitioning algorithm) と呼ばれる) を示すことによ

って与えられる．いま $\{I_i | I_i \in \mathscr{I}_i,\ 1 \leqq i \leqq k\}$ はそれぞれ互いに排反する独立集合族であって，E の要素 e は

$$e \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} I_i \tag{6.8}$$

を満たすとする．この時要素 e を I_i, $1 \leqq i \leqq k$, のいずれかにいかにして集合族 $\{I_i\}$ が互いに排反する独立集合族であることを維持しつつ加えるかを示すことにする．このことが示されれば，この操作をくり返すことによって集合 E が定理にあるような独立集合族 $\{I_i\}$ に分割されることになる．

$S \subseteq E$ なる集合 S に対して $e \in S$ とすると，$|I_i \cap S| < r_i(S)$ なる i が存在する．なぜならば，そうでないとすると

$$\begin{aligned} |S| &\geqq \left| \bigcup_{i=1}^{k} (I_i \cap S) \cup \{e\} \right| \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{k} |I_i \cap S| \\ &> \sum_{i=1}^{k} r_i(S) \end{aligned} \tag{6.9}$$

となって矛盾が生ずるからである．したがって $S_0 = E$, $j=1$ から始まって j を増加させていくと，ある j に対して $e \in S_{j-1}$ の時に

$$|I_{i(j)} \cap S_{j-1}| < r_{i(j)}(S_{j-1}) \tag{6.10}$$

なる独立集合 $I_{i(j)}$, $1 \leqq i(j) \leqq k$, が存在する．そこで S_j を，$I_{i(j)} \cap S_{j-1}$ を含みかつ階数が $r_{i(j)}(I_{i(j)} \cap S_{j-1})$ と同じであるような最大の集合，言い換えると S_{j-1} に含まれる $I_{i(j)} \cap S_{j-1}$ のマトロイド $M_{i(j)}$ に関するスパン $\sigma(I_{i(j)} \cap S_{j-1}) = S_j$ とする．この時(6.10)からもわかるように

$$r_{i(j)}(S_j) < r_{i(j)}(S_{j-1})$$

であるから $S_j \subsetneqq S_{j-1}$ となる．このようにして $e \notin S_h$ かつ $0 \leqq j < h$ に対して $e \in S_j$ なる集合 S_h が得られる．

$\{e\} \cup I_{i(h)} \in \mathscr{I}_{i(h)}$ であるとすると，要素 e は $I_{i(h)}$ に追加されるので終了する．そうでなければ $\{e\} \cup I_{i(h)}$ はマトロイド $M_{i(h)}$ に関して唯一のサーキット C を含む．また上の S_h の定義から集合 $(\{e\} \cup I_{i(h)}) \cap S_{h-1}$ はマトロイド $M_{i(h)}$ で独立となる．そこで $0 < m \leqq h-1$ なる m で $(\{e\} \cup I_{i(h)}) \cap S_m$ が $M_{i(h)}$ で独立集合となるような最小の整数値 m をとると，$e' \in C \setminus S_m$ であってかつ $\{e\} \cup I_{i(h)} \setminus \{e'\}$ がマトロイド $M_{i(h)}$ で独立集合となるような要素 e' が存在する (図 6.2 参照)．したがって $I_{i(h)}$ を $\{e\} \cup I_{i(h)} \setminus \{e'\}$ で置き換えることができる．

そこで今度は要素 e' をどうすればよいかを考えるわけである．いま $\{e\} \cup (I_{i(h)} \cap S_{j-1})$ はすべての j, $1 \leqq j \leqq m$, に対してマトロイド $M_{i(h)}$ において従属であるから $e' \in C \subset S_{j-1}$ となる．そこで集合の組 $(I_{i(j)}, S_j)$, $1 \leqq j \leqq m$, を順次考えてみよう．いま集合 S_{j-1} が要素 e と e' を交換しても変化しないとする．ここで $I_{i(j)} \neq I_{i(h)}$ とすると，$(I_{i(j)}, S_j)$ には変化がないことになる．また $I_{i(j)} = I_{i(h)}$ とすると，$I_{i(j)}$ において e と e' が交換されたとしても S_j の定義から $\{e\} \cup \{e'\} \subset C \subset S_{j-1}$ であるので，S_j には変化はない．したがって $(I_{i(j)}, S_j)$, $1 \leqq j < m$, なる集合の組の列は要素 e と e' を交換しても，$(I_{i(j)}, S_j)$, $1 \leqq j \leqq h$, なる集合の組の列と同一の構成を有していることがわかる(ただし $m < h$)．ここで要素 e を e_0, e' を e_1, さらに h を h_0 とし，$\{e_0\} \cup I_{i(h_0)}$ に含まれる唯一のサーキットを C_0 とすると

$$e_0 \notin S_{h_0}, \quad e_0 \in S_{h_0-1}$$
$$e_1 \in C_0 \subseteq \{e_0\} \cup I_{i(h_0)}$$

となる．集合 $I_{i(h_0)}$ の要素 e_1 を e_0 と交換していくという上述の操作を順次くり返していくと

$$e_0 \notin S_{h_0},\ e_0 \in S_{h_0-1},\ e_1 \notin S_{h_1},\ e_1 \in S_{h_1-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,\ e_j \notin S_{h_j},\ e_j \in S_{h_j-1},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

なおここで $h_0 > h_1 > \cdots\cdots > h_j > \cdots\cdots$ である．さらに

$$e_1 \in C_0 \subseteq \{e_0\} \cup I_{i(h_0)},\ e_2 \in C_1 \subseteq \{e_1\} \cup I_{i(h_1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots,\ e_j \in C_{j-1} \subseteq \{e_{j-1}\} \cup I_{i(h_{j-1})},\ \cdots\cdots\cdots$$

が成立する．したがってこの操作をくり返すと $h_0 > h_1 > \cdots\cdots$ であるから，ある h_k に対して $\{e_k\} \cup I_{i(h_k)}$ がマトロイド $M_{i(h_k)}$ において独立とならなければならない．この時集合 $I_{i(h_k)}$ を $\{e_k\} \cup I_{i(h_k)}$ とすることによって要素 e_k の割り当てを決定できる．このようにしてマトロイド分割を構成するアルゴリズムによって定理の十分性が証明される． ☒

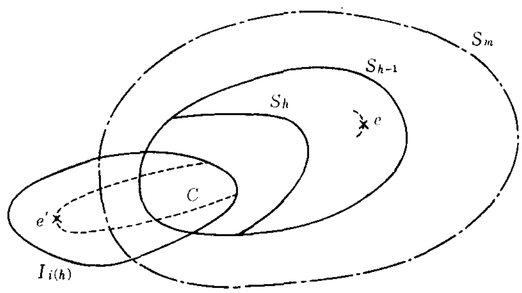

図 6.2

なお上の定理 6.1 あるいは定理 6.2 の十分性の証明を与えるマトロイド分割アルゴリズムについては，Edmonds [5]，[6] あるいは Edmonds and Fulkerson [1]，Lawler [3] などを参照されたい．

[Edmonds の定理の応用]

定理 6.1 (あるいは 6.2) の応用として，定理からただちに得られる結果を紹介しよう．なおこの結果は Nash-Williams [7] がグラフの森への分解原理として与えたものであるが，定理 6.1 におけるマトロイド M として閉

路マトロイドを適用することによって得られる．

系 6.3 (Nash-Williams)　グラフ G の弧が，G のどの閉路も同一色にならないようにしつつ k 色で彩色できるための必要十分条件は，G の頂点集合の任意の部分集合 U に対して，G の弧の集合で両端の頂点がいずれも U に含まれるものを E_u とした場合に

$$|E_u| \leqq k(|U|-1) \tag{6.11}$$

が成立することである．

グラフ G に対する閉路マトロイド $M(G)$ において，G の弧の集合の任意の部分集合 A に対する階数 $r(A)$ は，集合 A から成る G の部分グラフ G_A に含まれる頂点の数から G_A の連結成分の個数を差し引いたものとして与えられる(3.3節参照)．このことを用いると定理6.1の条件 (6.1) と上の条件(6.11)とが等価であることがわかる．

定理 6.2 からただちに得られる応用結果を紹介しよう．有限集合 E 上で独立集合族 $\mathscr{I}$ を用いて定義されたマトロイドを $M=(E, \mathscr{I})$ とし，互いに排反な独立集合族 $\{J_i,\ 1\leqq i\leqq k\}$ が与えられているとする．マトロイド M の階数関数を $r(A)$, $A\subseteq E$, さらに $E'=E\backslash \bigcup_{i=1}^{k} J_i$ とすると次の系が得られる．

系 6.4　集合 E が k 個の集合から成る独立集合族 $\{I_i | I_i \in \mathscr{I},\ J_i \subseteq I_i,\ 1\leqq i\leqq k\}$ に分割できるための必要十分条件は

$$|A| \leqq \sum_{i=1}^{k} \{r(A\cup J_i)-r(J_i)\}, \quad {}^{\forall}A\subseteq E' \tag{6.12}$$

が成立することである．

上の系の証明は，マトロイド M から J_i, $1\leqq i\leqq k$, を縮約して，J_i 以外の $E\backslash E'$ に含まれるすべての要素をとり除くことによって得られるマトロイドをそれぞれ M_i, $1\leqq i\leqq k$, と定義した上で定理 6.2 を適用すると容易に得られる．式(6.12)における $r(A\cup J_i)-r(J_i)$ がマトロイド M_i, $1\leqq i\leqq k$, の階数関数であることは縮約マトロイドの定義からも明らかである．

6.2　マトロイドの被覆と詰合せ

J. Edmonds によって得られた，独立集合によるマトロイドの分割に関する定理6.2(あるいは6.1)は，前節の応用結果からもわかるように非常に有用な定理である．そこでこれらの結果を用いて得られる，マトロイドの独立集合による被覆 (covering)，あるいは基底，独立集合の詰合せ (packing) に関する結果を紹介しよう．

［被覆定理］

マトロイド $M=(E,\mathscr{I})$ とその階数関数 $r(A)$, $A\subseteq E$, および非負整数 n_i, $1\leqq i\leqq k$, ただし $n_i\leqq r(E)$, が与えられた時，有限集合 E がそれぞれ大きさ n_i, $1\leqq i\leqq k$, の独立集合族 $\{I_i,\ 1\leqq i\leqq k\}$ で被覆可能であるための必要十分条件は次の定理のように与えられる．

定理 6.5　マトロイド M の要素集合 E がそれぞれ大きさ n_i, $1\leqq i\leqq k$, の独立集合族 $\{I_i | I_i\in\mathscr{I},\ 1\leqq i\leqq k\}$ によって被覆できるための必要十分条件は

$$|A| \leqq \sum_{i=1}^{k} \min\{n_i, r(A)\}, \quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.13}$$

が成立することである．

上の定理は，マトロイド M の n における打切りマトロイドを $M_{(n)}$ とすると，その階数関数 $r_{(n)}(A)$ が

$$r_{(n)}(A)=\min\{n, r(A)\}, \quad A\subseteq E \tag{6.14}$$

で与えられること，および前述の定理 6.2 を用いると容易に証明できる．つまりマトロイド M の n_i, $1\leqq i\leqq k$, における打切りマトロイドを $M_{(n_i)}$, $1\leqq i\leqq k$, とすると，定理 6.5 は有限集合 E を各マトロイド $M_{(n_i)}$ において独立な集合族 $\{I_i,\ 1\leqq i\leqq k\}$ に分割できるための必要十分条件を求めることと等価となる．したがって各打切りマトロイドの階数関数形(6.14)を定理 6.2 に適用することによって(6.13)が得られる．なおここで n_j^*, $1\leqq j\leqq k$, が n_j, $1\leqq j\leqq k$, の中で $n_j\geqq j$ を満たす整数の個数を表わすとすると，式(6.13)は次のようにも書くことができる．

$$|A| \leqq \sum_{j=1}^{r(A)} n_j^*, \quad {}^{\forall}A\subseteq E. \tag{6.15}$$

(6.13)と(6.15)の等価性は，次の関係が成立することを利用して示すことができる．

$$\min_{0\leqq s\leqq k}\left[(k-s)r(A)+\sum_{j=1}^{s} n_j\right]=\sum_{j=1}^{r(A)} n_j^*.$$

［詰合せ定理］

マトロイドの詰合せに関する結果を紹介しよう．有限集合 E 上でマトロイド $M_i=(E, \mathscr{I}_i)$, $1\leqq i\leqq k$, が与えられているとする．$r_i(A)$, $1\leqq i\leqq k$, をそれぞれマトロイド M_i の階数関数とすると，集合 E の中に相互に排反な基底 I_i, $1\leqq i\leqq k$, が存在するための必要十分条件は次のように与えられる．

定理 6.6　有限集合 E 上でマトロイド $M_i=(E, \mathscr{I}_i)$, $1\leqq i\leqq k$, が与えられている．この時それぞれのマトロイド M_i の互いに排反な基底 I_i, $1\leqq i\leqq k$, が集合 E に含まれるための必要十分条件は

$$|A| \geqq \sum_{i=1}^{k} \{r_i(E)-r_i(\bar{A})\}, \quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.16}$$

が成立することである．

証明　次のような打切りマトロイド $M_0=(E, \mathscr{I}_0)$ を考える．ここで $\mathscr{I}_0$ はマトロイド M_0 の独立集合族であって，E の部分集合のうちで要素数が $|E|-\sum_{i=1}^{k} r_i(E)$ を

こえないような集合族を表わすとする．したがって集合E中に互いに排反な基底I_i, $1\leqq i\leqq k$, が存在するということは，言い換えると集合EがI_0, I_i, $1\leqq i\leqq k$, ここで$I_0\in\mathscr{F}_0$, $I_i\in\mathscr{F}_i$, $1\leqq i\leqq k$, から成る集合族に分割できることと等価であることがわかる．そこで前述の定理6.2を用いると，そのようなマトロイド分割が可能であるための必要十分条件は

$$|E|\leqq\min\{|E|-\sum_{i=1}^{k}r_i(E),|A|\}+\sum_{i=1}^{k}r_i(A),\ {}^{\forall}A\subseteq E$$

で与えられる．したがって上の条件を書き直すと，以下のようにして(6.16)が得られる．

$$|A|\leqq|E|-\sum_{i=1}^{k}r_i(E)+\sum_{i=1}^{k}r_i(A),\quad {}^{\forall}A\subseteq E$$

$$|\bar{A}|\geqq\sum_{i=1}^{k}\{r_i(E)-r_i(A)\},\quad {}^{\forall}A\subseteq E.\qquad\boxtimes$$

定理6.6を用いると，その特殊形として次の系が得られることは明らかである．ただしマトロイドMの階数関数を$r(A)$, $A\subseteq E$, とする．

系 6.7　有限集合E上のマトロイドMがk個の相互に排反な基底を有するための必要十分条件は

$$|A|\geqq k\{r(E)-r(\bar{A})\},\quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.17}$$

が成立することである．

なおここで上の系は以下のようにも解釈できる．4.4節でマトロイドの合成について述べたが，マトロイドMをk個合成したマトロイド$M^{(k)}$を考えると，集合E上のマトロイドMがk個の相互に排反な基底を有するということは合成マトロイド$M^{(k)}$が少なくとも$k\cdot r(E)$なる階数を有することと等価であることがわかる．したがってそのことはマトロイド$M^{(k)}$の階数が$k\cdot r(E)$であることと等価となるので，定理4.18を用いると

$$k\cdot r(A)+|\bar{A}|\geqq k\cdot r(E),\quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.18}$$

が成立しなければならない．このようにして(6.17)が得られる．

また一方，マトロイドMが集合Eを被覆するk個の基底を有するということは，合成マトロイド$M^{(k)}$の階数が$|E|$であること（(6.18)における右辺の$k\cdot r(E)$が$|E|$となることに相当）と等価である．したがってこの場合にも定理4.18を用いると，定理6.1を“被覆”によって解釈した次のような定理が得られる．

定理 6.8　集合E上のマトロイドMがEを被覆するk個の独立集合を有するための必要十分条件は

$$|A|\leqq k\cdot r(A),\quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.19}$$

が成立することである．

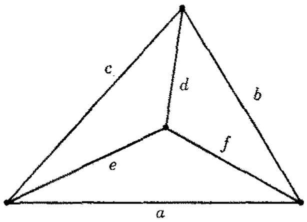

図 6.3　グラフ G_1

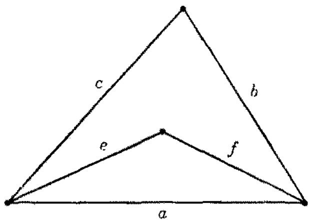

図 6.4　グラフ G_2

グラフ上で定義された閉路マトロイドの例を考えてみよう．図6.3, 6.4のグラフG_1, G_2の弧の集合$E_1=\{a,b,c,d,e,f\}$, $E_2=\{a,b,c,e,f\}$上で定義された閉路マトロイド$M(G_1)$, $M(G_2)$を考える．

$M(G_1)$, $M(G_2)$のいずれのマトロイドにおいても$k=2$に対して(6.19)が成立する．つまりE_1およびE_2はそれぞれマトロイド$M(G_1)$, $M(G_2)$における2個の独立集合に分割でき，それらがE_1, E_2の被覆をなしていると言うことができる．たとえばグラフG_1においては

$I_1=\{a,b,d\}$, $I_2=\{c,e,f\}$

グラフG_2においては

$I_1=\{a,c,e\}$, $I_2=\{b,f\}$

などがそのような独立集合である．ところが(6.17)の条件に関しては，$M(G_1)$においては満たされるが，$M(G_2)$においては満たされない．たとえば$M(G_2)$に対しては，集合Aとして$A=E_2=\{a,b,c,e,f\}$とすると次の関係が成り立つ．

$5=|A|<2\cdot r(E_2)=6.$

したがってグラフG_1においては，たとえば

$I_1=\{a,b,d\}$, $I_2=\{c,e,f\}$

として2個の相互に排反な基底が存在するのに対して，グラフG_2においてはそのような基底は存在しない．

［被覆定理と詰合せ定理の応用］

定理6.6を用いると，次のようなより一般的な結果が得られる．

定理 6.9　マトロイドMの要素集合Eが相互に排反なそれぞれ大きさn_iの独立集合I_i, $1\leqq i\leqq k$, ただし$n_i\leqq r(E)$, を有するための必要十分条件は

$$|A|\geqq\sum_{j=r(\bar{A})+1}^{r(E)}n_j{}^*=\sum_{i=1}^{k}[n_i-\min\{n_i,r(\bar{A})\}],\quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.20}$$

が成立することである．

証明　有限集合E上に次のようなマトロイドを考える．各マトロイドM_i, $1\leqq i\leqq k$, はマトロイドMのn_iにおける打切りマトロイドとする．この時M_iの階数関数は

$$r_i'(A)=\min\{n_i,r(A)\},\quad {}^{\forall}A\subseteq E \tag{6.21}$$

で与えられる．したがって定理にあるように大きさn_iの

独立集合 I_i, $1\leqq i\leqq k$, が存在するということは，集合 E の中にマトロイド M_i, $1\leqq i\leqq k$, の基底が存在することと等価であることがわかる．そこで E 上にマトロイド M_i, $1\leqq i\leqq k$, の各基底が存在するための必要十分条件は定理6.6で与えられるので(6.16)の $r_i(A)$ に(6.21)の $r_i'(A)$ を代入すると

$$|A|\geqq \sum_{i=1}^{k}\{r_i'(E)-r_i'(\bar{A})\},\quad \forall A\subseteq E$$

となる．したがって以下のように書くことができるので(6.20)が得られる．

$$\begin{aligned}|A|&\geqq \sum_{i=1}^{k}\min\{n_i, r(E)\}-\sum_{i=1}^{k}\min\{n_i, r(\bar{A})\}\\&\geqq \sum_{i=1}^{k} n_i-\sum_{i=1}^{k}\min\{n_i, r(\bar{A})\}\\&\geqq \sum_{i=1}^{k}[n_i-\min\{n_i, r(\bar{A})\}]\\&\geqq \sum_{j=r(\bar{A})+1}^{r(E)} n_j^*,\quad \forall A\subseteq E.\end{aligned}$$ ⊠

定理6.6の応用をひとつ紹介しよう．系6.4の場合と同様に有限集合 E 上のマトロイド $M=(E,\mathscr{I})$ において相互に排反な独立集合族 $\{J_i|J_i\in\mathscr{I}, 1\leqq i\leqq k\}$ が与えられているとする．この時定理6.6を用いると次の系がただちに得られる．

系 6.10 すべての i, $1\leqq i\leqq k$, に対して $J_i\subset I_i$ を満たす相互に排反な M の基底の集合族 $\{I_i, 1\leqq i\leqq k\}$ が存在するための必要十分条件は，$E'=E\backslash\bigcup_{i=1}^{k}J_i$ に対して

$$|A|\geqq\sum_{i=1}^{k}\{r(E)-r((E'\backslash A)\cup J_i)\},\quad \forall A\subseteq E' \tag{6.22}$$

が成立することである．

系6.4の場合と同様にマトロイド M_i, $1\leqq i\leqq k$, をそれぞれ M から J_i, $1\leqq i\leqq k$, を縮約して J_i 以外の $E\backslash E'$ に含まれるすべての要素をとり除くことによって得られたマトロイドとする．この時 M_i の階数関数 $r_i(A)$ は次式で与えられる．

$$r_i(A)=r(A\cup J_i)-r(J_i),\quad 1\leqq i\leqq k. \tag{6.23}$$

上の系のような独立集合族が存在することは，E' 中に各マトロイド M_i の相互に排反な基底 J_i' が存在することと等価である．したがって定理6.6を適用することができ，(6.23)を(6.16)に代入すると次の関係が得られる．

$$|A|\geqq\sum_{i=1}^{k}\{r(E'\cup J_i)-r((E'\backslash A)\cup J_i)\},\ \forall A\subseteq E'. \tag{6.24}$$

いまある i に対して $r(E'\cup J_i)<r(E)$ とすると，M のどの基底も $E'\cup J_i$ には含まれないことになるので，系のような基底は存在しない．したがって各 i, $1\leqq i\leqq k$, に対して $r(E'\cup J_i)=r(E)$ となり，(6.24)から(6.22)が得られる．この時 M_i の基底 J_i' に対して $J_i\cup J_i'$ が M の基底となることは明らかであろう．

［交叉定理］

マトロイドの被覆，詰合せと並んで応用範囲の広いマトロイドの交叉定理 (intersection theorem, Edmonds[8]) を紹介しよう．この定理は，有限集合 E 上で2つのマトロイド M_1, M_2 が与えられた時に，両マトロイドにおいて独立な集合(M_1, M_2 の共通独立集合(common independent set)という)であって大きさ k の集合が存在するための必要十分条件を与える．

定理 6.11 集合 E 上のマトロイド M_1, M_2 がそれぞれ階数関数 r_1, r_2 を有するとする．この時 M_1, M_2 が大きさ k の共通独立集合を有するための必要十分条件は

$$r_1(A)+r_2(E\backslash A)\geqq k,\quad \forall A\subseteq E \tag{6.25}$$

が成立することである．

証明 まずマトロイド M_1, M_2 が大きさ k の共通独立集合を有することと合成マトロイド $M_1\vee M_2^*$ (ただし M_2^* は M_2 の双対マトロイド) の階数が少なくとも $k+r_2^*(E)$ (ただし r_2^* はマトロイド M_2^* の階数関数) であることが等価であることを示そう．

いま M_1, M_2 の共通独立集合を I とすると，$E\backslash I$ はマトロイド M_2^* の基底を含むので，合成マトロイド $M_1\vee M_2^*$ の階数は $|I|+r_2^*(E)$ より小さくはならない．

また一方，合成マトロイド $M_1\vee M_2^*$ の階数関数を r として

$$r(E)\geqq k+r_2^*(E) \tag{6.26}$$

が成り立っているとする．この時 M_2^* の基底 B^* (合成マトロイド $M_1\vee M_2^*$ における独立集合) に対して，$E\backslash B^*$ の部分集合 X のうちでマトロイド M_1 で独立であって (X は M_2 における独立集合である) かつ X に含まれる要素数が k 以上のものが存在することになる．

以上から M_1, M_2 の共通独立集合で大きさが k のものが存在するということと合成マトロイド $M_1\vee M_2^*$ の階数関数 r に対して (6.26) が成立することとは等価である．(6.26)を(4.36)の関係を用いて書き直すと

$$r_1(A)+r_2^*(A)+|E\backslash A|\geqq k+r_2^*(E),\quad \forall A\subseteq E \tag{6.27}$$

が成立しなければならない．ここで双対マトロイドの階数関数

$$r_2^*(A)=|A|-r_2(E)+r_2(E\backslash A)$$
$$r_2^*(E)=|E|-r_2(E)$$

を(6.27)に代入すると(6.25)が得られる． ⊠

定理6.11の例を掲げよう．集合 $E=\{1,2,3\}$ 上で2つの横断マトロイド M_1, M_2 を次のように定義する．マト

ロイド M_1 は E の部分集合族 $\mathscr{S}_1=\{S_1^1, S_2^1\}$, $S_1^1=S_2^1=\{1,2\}$, に対して $\mathscr{S}_1$ の部分横断を独立集合とするマトロイドとする．また M_2 は E の部分集合族 $\mathscr{S}_2=\{S_1^2, S_2^2\}$, $S_1^2=S_2^2=\{2,3\}$, に対して $\mathscr{S}_2$ の部分横断を独立集合とするマトロイドとする．この時 $\mathscr{S}_1$ と $\mathscr{S}_2$ の共通横断が存在しないことから，M_1 と M_2 に対する大きさ2の共通独立集合は存在しないことがわかる．このことは，(6.25)において $A=\{3\}$ (あるいは $\{2,3\}$) とすると

$$1=r_1(A)+r_2(E\backslash A)<k=2$$

となり，(6.25)が満たされないことから確認される．

定理6.11に関連して，「マトロイド $M_a=(E,\mathscr{F}_a)$, $M_b=(E,\mathscr{F}_b)$ が与えられた時に，それらの共通独立集合のうちで要素数が最大のものを求める問題」を考えてみよう．

定理6.11の証明にあるように合成マトロイド $M_a\vee M_b^*$ (M_b^* は M_b の双対マトロイドであって，$M_b^*=(E,\mathscr{F}_b^*)$ と表わす) の独立集合 $J=J_a\cup J_b^*$ (ただし $J_a\in\mathscr{F}_a$, $J_b^*\in\mathscr{F}_b^*$) のうちで $|J|$ が最大となるものを J_0 とする．ここで $J_0=J_a\cup J_b^*$ に対して，J_b^* を拡張して J_0 における M_b^* の基底，つまり $r_b^*(J_0)=r_b^*(J_1)$ となるように $J_1(\supseteq J_b^*)$ をとる．この時 $J=J_0\backslash J_1$ が M_a, M_b の共通独立集合のうちで要素数最大のものとなることを示そう．

まず $J\in\mathscr{F}_a$ は明らかである．次に J_1 が集合 E における M_b^* の基底でもあることは，そうでないとすると J_1 を拡張して $J_1'\in\mathscr{F}_b^*$ とすることによって $|J_a\cup J_1'|>|J_0|$ となり，矛盾が生ずることから得られる．したがって $r_b^*(E\backslash J)=r_b^*(E)$ となり，$J\in\mathscr{F}_b$ であるから J は M_a, M_b の共通独立集合となる．

いま M_a, M_b の共通独立集合のうちで $|J'|>|J|$ なるものがあるとすると，集合 $J_1\in\mathscr{F}_b^*$ はマトロイド M_b^* に関して $E\backslash J'$ の基底であってかつ E の基底でもあるから，$|J'\cup J_1|>|J_0|$ となりやはり矛盾が生ずる．以上から上のようにして求められた J は要素数最大の共通独立集合となる．

これまでの議論から，階数関数 r_a, r_b を有する任意の2つのマトロイド $M_a=(E,\mathscr{F}_a)$, $M_b=(E,\mathscr{F}_b)$ に対して次の関係が成立することがわかる．

$$\max\{|J|\,|\,J\in\mathscr{F}_a,\ J\in\mathscr{F}_b\}$$
$$=\min\{r_a(A)+r_b(E\backslash A)\,|\,A\subseteq E\}. \quad (6.28)$$

この節では2つのマトロイドについてのみある大きさの共通独立集合が存在するための必要十分条件を与えたが，3つのマトロイドについての同様の条件は得られていない．この未解決の問題はグラフにおけるハミルトン経路を求める問題を含めて多くの組合せ問題とも密接な関連を有していることをつけ加えておこう．

参考文献

[1] J. Edmonds and D. R. Fulkerson: "Transversals and Matroid Partition", *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, Vol. 69B, 1965, pp. 147-153

[2] D. J. A. Welsh: *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976

[3] E. L. Lawler: *Combinatorial Optimization—Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976

[4] L. R. Ford and D. R. Fulkerson: *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, 1962

[5] J. Edmonds: "Minimum Partition of a Matroid into Independent Subsets", *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, Vol. 69B, 1965, pp. 67-72

[6] J. Edmonds: "Matroid Partition", *Lectures in Applied Mathematics*, Vol. 11 (Mathematics of the Decision Sciences), 1967, pp. 335-346

[7] C. St. J. A. Nash-Williams: "Decomposition of Finite Graphs into Forests", *J. London Math. Soc.*, Vol. 39, No. 2, 1964

[8] J. Edmonds: "Submodular Functions, Matroids and Certain Polyhedra", *Proc. Int. Conf. on Combinatorics* (Calgary), Gordon and Breach, New York, 1970, pp. 69-87