

マトロイド理論の基礎 (9)

大山 達雄

5.2 双対性

任意のマトロイド M に対して, その双対マトロイド M^* が唯一に定義され, M^* の独立集合, 従属集合, 基底あるいは階数関数がそれぞれ M の対応する集合, 階数関数等を用いて表現できることを前章の 4.2 節に述べた. ここではマトロイドにおける双対性とグラフにおける双対性との関連性, およびマトロイドにおけるひとつの重要な特性としてのグラフ的, 双対グラフ的という概念とそれらの関連等について述べることにする.

[幾何的双対グラフと抽象的双対グラフ]

グラフ G が与えられた時に, その双対グラフ (dual graph) として幾何的双対グラフと抽象的双対グラフの 2つを以下のように定義する.

まず平面グラフ (plane graph) G に対して, その幾何的双対 (geometric dual) グラフ G^* は次の 2 段階の操作によって得られる.

- (i) グラフ G のそれぞれの面 (face) F_i に対して頂点 v_i^* をとり, これらをグラフ G^* の頂点の集合とする.
- (ii) G のそれぞれの弧に対して, その弧の隣接する 2 つの面に対応する頂点 v_i^*, v_j^* を連結して得られる弧の集合をグラフ G^* の弧の集合とする.

例として図 5.4 と 図 5.5 に平面グラフ G とその幾何的双対グラフ G^* とを示す.

これに対して, 任意のグラフ (平面グラフに限らない) G の抽象的双対 (abstract dual) グラフ G^* とは, G の弧の集合と G^* の弧の集合の間で 1 対 1 対応が存在し, しかも G の閉路を構成する弧の集合が G^* のカットセットを構成する弧の集合と 1 対 1 に対応するようなグラフをいう.

図 5.6 および図 5.7(A), (B) にグラフ G とその抽象的双対グラフ G^* の例を掲げる. これらのグラフにおける弧 a, b, c, \dots, h および $a^*, b^*, c^*, \dots, h^*$ はそれぞれ 1 対 1 に対応する.

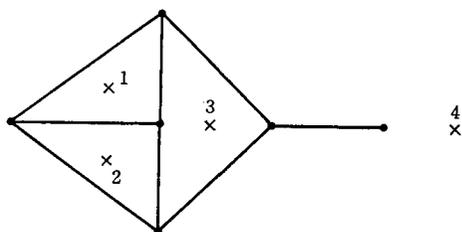


図 5.4 平面グラフ G

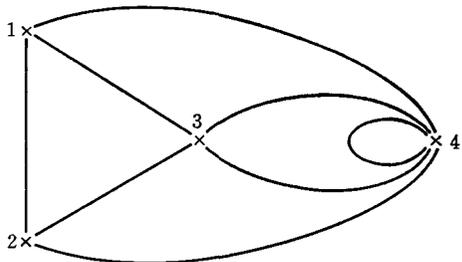


図 5.5 幾何的双対グラフ G^*

上の定義から, 平面グラフ G の幾何的双対グラフ G^* が抽象的双対グラフであることは容易にわかる. しかしながら抽象的双対グラフは幾何的双対グラフよりは一般的な概念であって, すべての抽象的双対グラフが幾何的双対グラフと同様にして得られるとは限らない. たとえば図 5.7(B) の抽象的双対グラフ G^* は幾何的双対グラフと同様にして得られるが, (A) のグラフはそれと同型

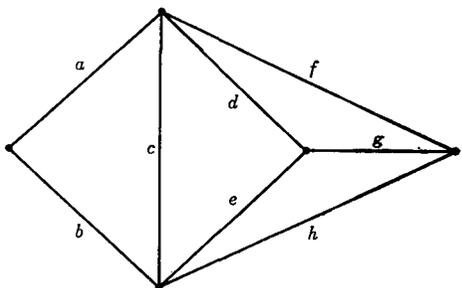


図 5.6 グラフ G

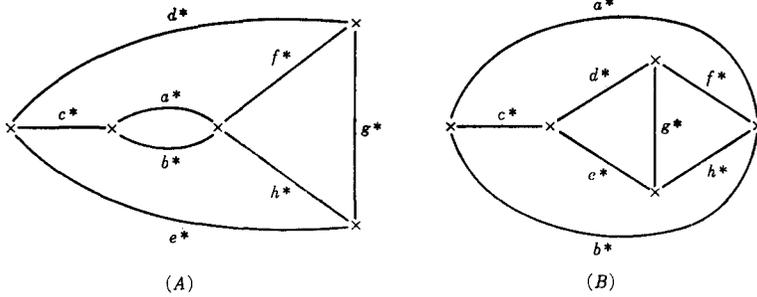


図 5.7 抽象的対偶グラフ G^*

なグラフである。

幾何的対偶グラフの有する特徴を掲げよう。

- (i) グラフ G が連結な平面グラフであれば、 G とその幾何的対偶グラフの幾何的対偶グラフ G^{**} とは同型である。
- (ii) グラフ G_1 と G_2 とが同型であっても、それらの幾何的対偶グラフ G_1^* と G_2^* とが同型であるとは限らない。

(i) に関しては、 G の幾何的対偶グラフの作成手順から、その逆操作が可能であることは明らかである。また G^* のそれぞれの面が G の頂点を必ず 1 個含むか 2 個以上含みえないということは、 G の頂点数と G^* の面の数とが等しいことから得られる。このようにして G^* の幾何的対偶グラフ G^{**} と G は同型となる。

(ii) に関しては、たとえば図 5.8 にあるような 2 つの同型グラフ G_1, G_2 を考えれば、それらの幾何的対偶グラフが同型とならないことは容易に確認できる。

抽象的対偶グラフに関しては、次の定理が存在する。

定理 5.17 グラフ G_2 を G_1 の抽象的対偶グラフとする。 G_1 においてある弧の集合が閉路であるならば、 G_2 においてそれに対応する弧の集合はカットセットである。また G_2 においてある弧の集合がカットセットであるならば、 G_1 においてそれに対応する弧の集合は閉路である。

証明 G_1 のひとつの閉路に含まれる弧の集合を C とする。 C に含まれる弧に対応する G_2 の弧の集合を D^* とすると、 D^* はカットセットであるかまたは弧を共有しないカットセットの合併集合である。

次に G_2 の弧の集合 D^* に含まれる弧に対応する G_1 の弧の集合を考えると、これらは C に含まれる閉路または互いに弧を共有しない閉路の合併集合でなければならない。閉路の部分集合が互いに弧を共有しない閉路の合併集合となることはないから、 D^* に対応する弧の集合は G_1 の閉路でなければならない、したがって D^* はカットセットでなければならない。

定理の後半の証明もほぼ同様である。 □

定理 5.18 グラフ G_2 を G_1 の抽象的対偶グラフとする。 G_1 においてある弧の集合がカットセットならば、それに対応する G_2 の弧の集合は G_2 の閉路である。また G_2 においてある弧の集合が閉路ならば、それに対応する G_1 の弧の集合は G_1 のカットセットである。

証明 G_1 のカットセットに含まれる弧の集合を D とする。 D に含まれる弧に対応する G_2 の弧の集合を D^* とすると D は G_1 の任意の閉路と偶数個の弧を共有するから、 D^* は G_2 の任意のカットセットと偶数個の弧を共有する。したがって D^* は G_2 の閉路であるかまたは弧を共有しない閉路の合併集合である。

次に D^* に対応する G_1 の弧の集合を考えると、これらは D の部分集合であって、カットセットであるかまたは弧を共有しないカットセットの合併集合である。 D の部分集合が弧を共有しないカットセットの合併集合となることはないので、 D^* は閉路でなければならない。

定理の後半もほぼ同様にして証明できる。 □

上の定理から次の定理が得られることは明らかである。

定理 5.19 グラフ G の抽象的対偶グラフを G^* とすると、 G は G^* の抽象的対偶グラフである。

2 つのグラフが 2-同型 (2-isomorphic) であるという概念を定義しよう。2 つのグラフ G_1 と G_2 とが以下の操作の一方あるいは両方をくり返し適用することによって同型となる時、 G_1 と G_2 は 2-同型であるという。

- (i) 関節点 (連結グラフにおいて、ある頂点を切断除去することによってそのグラフを非連結グラフにできる時、その頂点を関節点という) を切断することによって、グラフを 2 つ以上の連結成分に分離する。
- (ii) グラフが 2 個の頂点を共有する 2 つの互いに素な部分グラフに分けられる時、部分グラフの一方においてこれらの 2 つの頂点に関して部分グラフを反転させ、

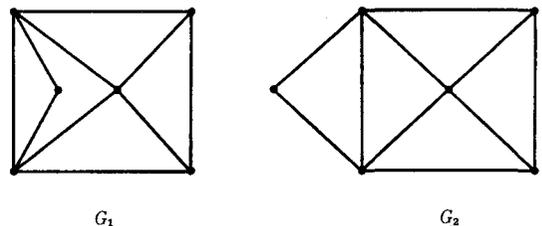
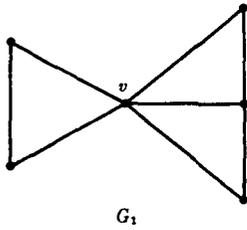
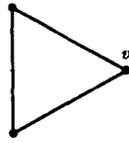


図 5.8 同型グラフ G_1, G_2

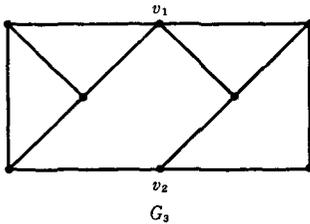


G_1

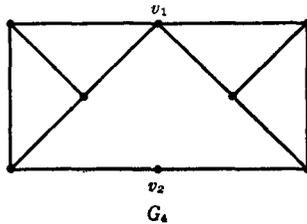


G_2

図 5.9 2-同型グラフ G_1, G_2



G_3



G_4

図 5.10 2-同型グラフ G_3, G_4

再び两部分グラフをこれらの2頂点のところで結合させる。

たとえば図5.9, 図5.10において, グラフ G_1 と G_2 , および G_3 と G_4 はそれぞれ2-同型である。図5.9のグラフ G_1, G_2 においては, G_1 の関節点 v で G_1 を分離し, また図5.10のグラフ G_3, G_4 においては, 共通の頂点 v_1, v_2 に関してグラフを切断し, その一方の部分グラフを反転し, 再びそれらを共通の頂点 v_1, v_2 のところで結合している。

グラフの2-同型性を用いると, 抽象的対偶グラフに関して次の定理が得られる。

定理5.20 2つのグラフ G_1, G_2 に関して, G_2 が G_1 のひとつの抽象的対偶グラフであってかつ G_2' が G_2 に2-同型であるならば, G_2' もまた G_1 のひとつの抽象的対偶グラフである。

証明 2-同型グラフの作成手順から, G_2 と G_2' の弧の間には1対1対応が存在する。さらにはこの手順によって G_2 の閉路が新しく加わったり除去されたりはしないので, G_2 の閉路と G_2' の閉路は同一要素から成る。したがって G_2 の弧の集合と G_2' の弧の集合の間の1対1対応はすべての閉路を保存するので, G_2' の弧の集合が閉路をなす場合には, それに対応する G_1 の弧の集合はカットセットを構成し, その逆もまた真である。 □

平面グラフは幾何的対偶グラフを有するから, 抽象的対偶グラフをも有する。これに関しては逆も真であって, 抽象的対偶グラフを有するグラフは平面グラフでなければならない。次の定理はこの結果を与え, 平面グラフのひとつの特性化を与えるものである。証明は煩雑であるので, 概略のみを紹介する。

定理5.21 グラフが平面的であることと, 抽象的対偶グラフを有することとは等価である。

上の定理の必要性は明らかである。したがって証明を要するのは十分性であって, グラフ G が抽象的対偶グラフ G^* をもてば G が平面的(planar)であるという部分である。

グラフが平面グラフであるための必要十分条件は次に紹介する Kuratowski の定理(たとえば [1], [2], [3] 等参照)によって与えられた。

定理5.22 (Kuratowski) グラフ G が平面グラフであるための必要十分条件は, G が $K_{3,3}$ あるいは K_5 (図5.11参照) に位相同型な部分グラフを含まないということである。

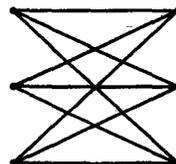
ここで2つのグラフが位相同型(homeomorphic)であるとは, これらの2つのグラフのうちの一方が他方のグラフの弧上に次数2の頂点を追加あるいは除去することによって得られる場合をいう。たとえば図5.12にあるグラフ G_1 と G_2 とは位相同型である。

Kuratowski の定理を用いると, グラフ G が抽象的対偶グラフ G^* をもつ場合には G は $K_{3,3}$ あるいは K_5 に位相同型な部分グラフを含まないことを示すことによって定理5.21を証明することができる。

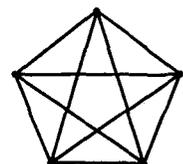
まず $K_{3,3}$ あるいは K_5 が抽象的対偶グラフをもたないことを示そう。たとえば K_5 が抽象的対偶グラフをもたないことは, 次のようにして理解されるであろう。

K_5 が抽象的対偶グラフ K_5^* をもつとすると, K_5 の閉路は長さが少なくとも3であって, またカットセットは少なくとも4本の弧から成る。したがって K_5^* は閉路が少なくとも長さが4であって, すべての頂点は少なくとも次数が3であるので, 最低 $8 \times 3 \times 1/2 = 12$ 本の弧を有する。これは K_5 が10本の弧を有することから矛盾である。

$K_{3,3}$ の場合も抽象的対偶グラフが存在しないことは同様にして示すことができる。



$K_{3,3}$



K_5

図 5.11 $K_{3,3}$ および K_5

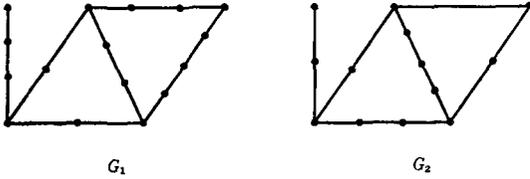


図 5.12 位相同型グラフ G_1, G_2

次に G が抽象的対称グラフをもてば、 G に位相同型なグラフ G' も抽象的対称グラフをもつことがわかる。このことは G の弧の上に次数 2 の頂点を追加あるいは除去することがグラフ G^* において平行弧を追加あるいは除去することと等価であることから明らかである。

またグラフ G が抽象的対称グラフをもつならば、 G の部分グラフも抽象的対称グラフを有することは、次のようにして理解される。グラフ G の 1 本の弧 e を除去することは G^* において e に対応する弧 e^* を短絡 (あるいは縮約 (contract) ともいう) することに対応する。このプロセスをくり返すことによって、 G の任意の部分グラフが抽象的対称グラフを有することがわかる。したがってグラフ G が抽象的対称グラフ G^* を有する場合には、 G の部分グラフも抽象的対称グラフを有する。しかしながら $K_{3,3}$ および K_5 は抽象的対称グラフをもたないので、 G の部分グラフの抽象的対称グラフもこれらのグラフ $K_{3,3}$ および K_5 を含まないことになる。以上の議論から定理 5.21 の証明の概略は明らかとなるであろう。

[対称グラフと対称マトロイド]

グラフにおける対称性とマトロイドにおける対称性との関連について述べよう。以下に掲げる定理および系は、グラフ G の抽象的対称グラフあるいは幾何的対称グラフ上の閉路マトロイドとグラフ G 上の閉路マトロイドの対称マトロイドとの関連を示すものである。

定理 5.23 グラフ G の抽象的対称グラフ G^* に対して、 G^* 上の閉路マトロイド $M(G^*)$ は G 上の閉路マトロイド $M(G)$ の対称マトロイド $M^*(G)$ と同型である。つまり次の関係が成り立つ。

$$M(G^*) = M^*(G). \quad (5.10)$$

証明 抽象的対称グラフの定義から、グラフ G^* のカットセットとグラフ G の閉路は 1 対 1 に対応する。したがってマトロイド $M(G)$ のサーキットはマトロイド $M(G^*)$ の対称サーキットに対応するので、定理 4.3 の (4.18) の関係を用いると、 $M(G^*)$ と $M^*(G)$ の間の同型性が得られる。 □

上の定理と幾何的対称グラフの定義から、次の系がただちに得られる。

系 5.24 グラフ G を連結な平面グラフとし、 G の幾何的

対称グラフを G^* とする。 G^* 上の閉路マトロイド $M(G^*)$ は G 上の閉路マトロイド $M(G)$ の対称マトロイドと同型である。

前にも述べたように、平面グラフはいくつかの異なる (互いに 2-同型な) 対称グラフを有する。一方、マトロイドは唯一の対称マトロイドしかもちえない。このことは、定理 5.23 および系 5.24 から、グラフの対称グラフが異なってもそれらの上の閉路マトロイドはすべて同型であることによって説明されることになる。任意の 2 つのグラフ G_1, G_2 が互いに 2-同型であるということと、それらに対応する閉路マトロイド $M(G_1), M(G_2)$ が同型であるということは等価であることをつけ加えておこう。

[グラフ的マトロイドと対称グラフ的マトロイド]

マトロイド M がグラフ G 上で定義される閉路マトロイド $M(G)$ と同型となる時、つまりそのようなグラフ G が存在する時、 M をグラフ的 (graphic) マトロイドと呼ぶことは 3.3 節に述べた。また一方、 M の対称マトロイド M^* がグラフ的である時、 M を対称グラフ的 (cographic) マトロイドと呼ぶ。

それではあるマトロイド M がグラフ的であるとしたら、 M は同時に対称グラフ的であろうか? 答えは NO である。なぜならば、図 5.11 に示したようなグラフ $K_{3,3}$ あるいは K_5 を考えれば容易にわかるであろう。前述のように、たとえばグラフ $K_{3,3}$ 上の閉路マトロイド $M(K_{3,3})$ に対しては、 $K_{3,3}$ が抽象的対称グラフをもたないこと (幾何的対称グラフをもたないことはもちろんである) から、対称マトロイド $M^*(K_{3,3})$ はグラフ的ではない。グラフ K_5 に対しても同様に、対称マトロイド $M^*(K_5)$ はグラフ的ではない。

逆にまたマトロイド M が対称グラフ的であってかつグラフ的ではないような例としては、 $M(K_{3,3})$ あるいは $M(K_5)$ の対称マトロイド $M^*(K_{3,3})$ あるいは $M^*(K_5)$ を考えればよいことになる。したがって次の定理が成り立つ。なおこの定理は、マトロイドのマイナーを用いて後に再度述べられる。

定理 5.25 マトロイド M がグラフ的であって同時に対称グラフ的であるための必要十分条件は、 M がある平面グラフ G の閉路マトロイド $M(G)$ と同型であることである。

なお上の定理に関連して、マトロイド M がグラフ的かつ対称グラフ的である場合には、 M を平面的 (planar) であると呼ぶ。またグラフ的でも対称グラフ的でもないマトロイドの例としては、一様マトロイド $U_{2,4}$ 、Fano マトロイド $M(\text{Fano})$ およびその対称マトロイド $M^*(\text{Fano})$ などがある。

マトロイドがグラフ的であるということについて、もう少し考えてみよう。たとえばどのような条件が満たされればマトロイド M はグラフ的であろうか？ 任意のマトロイド M がグラフ的であるための必要条件については、すでにわれわれはいくつかのことを知っている。まずマトロイド M がグラフ的であるとすると、 M と同型の閉路マトロイド $M(G)$ が存在し、それに対応するグラフ G が存在する。したがって M は $GF(2)$ 上で表現可能なマトロイド、つまり2値マトロイドであることは明らかであろう。

あるいはまた前述のように、マトロイド M がグラフ的であれば、 $M^*(K_{3,3})$, $M^*(K_5)$ あるいは $M(\text{Fano})$, $M^*(\text{Fano})$ のようなマトロイドに同型なマイナーを含まないこともわかる。

マトロイド M がグラフ的であるための必要十分条件は、1958年に Tutte [4] によって次の定理のように与えられた。

定理5.26 マトロイド M がグラフ的であるための必要十分条件は、 M が2値マトロイドであって同時に $M^*(K_{3,3})$, $M^*(K_5)$, $M(\text{Fano})$ および $M^*(\text{Fano})$ に同型なマイナーを含まないことである。

上の定理は、前述の定理5.13にある正則マトロイドの特性を用いると、次のようにも書くことができる。

系5.27 正則マトロイド M がグラフ的であるための必要十分条件は、 M が $M^*(K_{3,3})$, $M^*(K_5)$ に同型なマイナーを含まないことである。

また定理5.26においてマトロイド M を M^* とすると、マトロイドが双対グラフ的であるための必要十分条件を与える次の定理が得られる。

定理5.28 マトロイド M が双対グラフ的であるための必要十分条件は、 M が2値マトロイドであって同時に $M(K_{3,3})$, $M(K_5)$, $M(\text{Fano})$ および $M^*(\text{Fano})$ に同型なマイナーを含まないことである。

この場合にも上と同様に定理5.13を用いると、次のように書くことができる。

系5.29 正則マトロイド M が双対グラフ的であるための必要十分条件は、 M が $M(K_{3,3})$, $M(K_5)$ に同型なマイナーを含まないことである。

以上の議論から、マトロイド M がグラフ的であってかつ双対グラフ的であるための必要十分条件、つまりマトロイド M がある平面グラフの閉路マトロイドであるための必要十分条件は次の定理で与えられる。

定理5.30 マトロイド M がグラフ的であってかつ双対グラフ的であるための必要十分条件は、 M が正則マトロイドであって同時に $M(K_{3,3})$, $M(K_5)$ およびそれらの双対マトロイド $M^*(K_{3,3})$, $M^*(K_5)$ に同型なマイナー

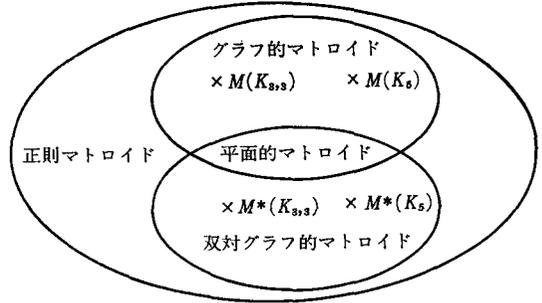


図 5.13 正則マトロイドの構成

を含まないことである。

上の定理を定理5.13を用いて言いかえると、2値マトロイドが平面グラフの閉路マトロイドであるための必要十分条件が与えられる。

系5.31 2値マトロイド M が平面グラフの閉路マトロイドとなるための必要十分条件は、 M が $M(K_{3,3})$, $M(K_5)$, $M(\text{Fano})$ およびそれらの双対マトロイド $M^*(K_{3,3})$, $M^*(K_5)$, $M^*(\text{Fano})$ をマイナーとして含まないことである。

ここで述べた事柄を5.1節の図5.3にあるように模式的に整理すると、図5.3の正則マトロイドの内部が図5.13のようになる。

5.3 付向可能性

[サーキット行列と双対サーキット行列]

2値マトロイド M が n 個の要素から成る集合 E 上で定義されているとする。そこで n 次元ベクトル空間 V において、 M のサーキットの接続ベクトル (incidence vector) によって張られる V の部分空間をサーキット空間 (circuit space), また M の双対サーキットの接続ベクトルによって張られる V の部分空間を双対サーキット空間 (cocircuit space) と呼ぶことにする。この時基本サーキットのベクトルはすべて線形独立であって、また2値マトロイド M の任意のサーキット C は基本サーキットのベクトルの線形結合の形で表わすことができる。したがって次の定理が成立する。

定理5.32 2値マトロイド M のサーキット空間の次元は $n - \rho(M)$ ($= \rho(M^*)$), ただし $\rho(M)$ は M の階数) であって、また M の任意の基底から得られる基本サーキットの集合の接続ベクトルはそのサーキット空間の基底をなす。

上の定理においてマトロイド M を双対マトロイド M^* と置きかえると、定理5.32の双対表現が次のように得られる。

系5.33 2値マトロイド M の双対サーキット空間の次元は $\rho(M)$ ($= n - \rho(M^*)$) であって、 M の任意の双対基

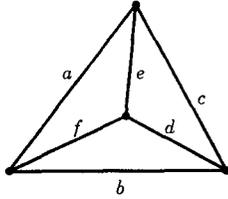


図 5.14 グラフ K_4

底の基本双対サーキットの集合の接続ベクトルは双対サーキット空間の基底をなす。

図5.14にあるようなグラフ K_4 を例としてとりあげてみよう。

グラフ K_4 の弧の集合 $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ を対象として定義された閉路マトロイド $M(K_4)$ が $GF(2)$ 上で表現可能なマトロイド、つまり2値マトロイドであることは前に述べたことから明らかである。そこでマトロイド $M(K_4)$ のサーキットと E の要素との接続行列を $C(M)$ とし、 $C(M)$ をサーキット行列 (circuit matrix) と呼ぶことにする。また $M(K_4)$ の双対サーキットと E の要素との接続行列を $C^*(M)$ とし、 $C^*(M)$ を双対サーキット行列 (cocircuit matrix) と呼ぶことにする。図5.14のグラフ K_4 上の閉路マトロイド $M(K_4)$ に対する $C(M)$ および $C^*(M)$ は図5.15および図5.16のように書くことができる。

なおここで一般にマトロイド M の双対サーキットが M の双対マトロイド M^* のサーキットであることから、次の関係が成立することは明らかである。

$$C^*(M) = C(M^*). \quad (5.11)$$

図5.14のグラフ K_4 の弧に対して、たとえば図5.17にあるような方向づけを行なうとする。

この時グラフ K_4 の任意の閉路、つまりマトロイド $M(K_4)$ のサーキットにおいて、閉路を構成する要素に対して時計方向の要素の係数を +1、逆方向の要素の係数を -1 とするようなサーキット行列を作る。また双対閉路、つまりカットセットに対しては、一定方向の要素の係数を +1、それらと異なる方向を有する要素の係数を -1 とするような双対サーキット行列を作る。

上のような操作を行なうと、図5.17の有向グラフ K_4 に対する閉路マトロイドのサーキット行列 $C_d(M)$ および双対サーキット行列 $C_d^*(M)$ は図5.18および図5.19のように書くことができる。

[マトロイドの付向可能性]

図5.18、図5.19にあるサーキット行列 $C_d(M)$ および双対サー

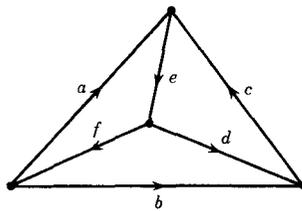


図 5.17 有向グラフ K_4

$$C(M) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ C_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ C_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ C_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ C_6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C_7 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

図 5.15 サーキット行列 $C(M)$

$$C^*(M) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ C_1^* & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ C_2^* & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ C_3^* & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C_4^* & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ C_5^* & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C_6^* & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ C_7^* & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

図 5.16 双対サーキット行列 $C^*(M)$

サーキット行列 $C_d^*(M)$ において、 $C_d(M)$ の任意の行ベクトルと $C_d^*(M)$ の任意の行ベクトルとの内積は 0 となる。このように2値マトロイドのサーキット行列と双対サーキット行列の任意の行ベクトルの内積が常に 0 になるように行列の非零要素に負の符号をつけることができる場合に、このような操作を方向づけ (orientation) と呼び、その2値マトロイドは付向可能 (orientable) であるという。

上に述べた符号化操作は、任意のグラフ的マトロイドに対して適用可能であることが以下のようにしてわかる。連結グラフ G の閉路を C 、グラフ G を2つの連結成分 U および V に分離する双対閉路を C^* とする。ここで整数の集合 Z 上でグラフ G の弧の集合 E を対象として鎖 f および f^* を次のように設定する。

$$C_d(M) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ C_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C_2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ C_3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ C_4 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ C_5 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ C_6 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ C_7 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

図 5.18 サーキット行列 $C_d(M)$

	a	b	c	d	e	f
C_1^*	1	0	1	0	-1	0
C_2^*	1	1	0	0	0	-1
C_3^*	0	1	-1	1	0	0
$C_4^*(M) = C_4^*$	0	0	0	1	-1	1
C_5^*	0	1	-1	0	1	-1
C_6^*	-1	-1	0	-1	1	0
C_7^*	1	0	1	-1	0	-1

図 5.19 双対サーキット行列 $C_d^*(M)$

$$f(e) = \begin{cases} +1 & e \in C, \text{ 弧 } e \text{ は } C \text{ において時計方向} \\ -1 & e \in C, \text{ 弧 } e \text{ は } C \text{ において反時計方向} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (5.12)$$

$$f^*(e) = \begin{cases} +1 & e \in C^*, \text{ 弧 } e \text{ は } U \text{ から } V \text{ への向き} \\ -1 & e \in C^*, \text{ 弧 } e \text{ は } V \text{ から } U \text{ への向き} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (5.13)$$

この時 $C \cap C^*$ が偶数個の弧から成り、それらが

$$\sum_{e \in C \cap C^*} f(e)f^*(e) = 0$$

を満足することから次の関係が得られる。

$$\sum_{e \in E} f(e)f^*(e) = 0. \quad (5.14)$$

したがってグラフ的マトロイドの付向可能性が示されるので、次の定理が成立する。

定理5.34 グラフ的マトロイドは付向可能である。

いまマトロイド M が付向可能であるとすると、その双対マトロイド M^* もまた付向可能であることは定義から明らかである。逆もまた正しいことは明らかであるので M と M^* の付向可能性は等価であることがわかる。

また一方、集合 E 上で定義されたマトロイド M が付向可能であるとすると M の方向づけは $T \subseteq E$ なる E の部分集合 T への M の限定マトロイド $M \cdot T$ の方向づけとなる。したがって $M \cdot T$ が付向可能となるので、上に述べた双対マトロイドの付向可能性と定理4.11の関係(4.20)を用いると、 M の任意のマイナーが付向可能となる。

2値マトロイドの中でもグラフ的マトロイドが付向可能であることは定理5.30に述べたとおりであるが、それではすべての2値マトロイドが付向可能であろうか？ 答えはNOである。たとえばFanoマトロイド $M(\text{Fano})$ がそのような例である。つまり2値マトロイドの中で付向可能でない最小のマトロイドは $M(\text{Fano})$ および $M^*(\text{Fano})$ である。

[付向可能性と正則性]

集合 E 上のマトロイド M が付向可能であるとすると、 M は $M(\text{Fano})$ および $M^*(\text{Fano})$ をマイナーとして含まないことは上に述べたとおりである。したがって

マトロイド M は付向可能であれば正則であるということが出来る。

また逆に、マトロイド M は正則であるとしよう。この時 M は、補題5.10にあるように整数の集合上の鎖群 N を用いて $M = M(N)$ と書くことができる。したがって任意の M のサーキット C に対して $\|f\| = C$ なる原始鎖 f が存在する。 M のサーキット行列において原始鎖の係数の正負にしたがって ± 1 を与えることによって M の方向づけが得られる。双対サーキットに対する方向づけも同様にして得られる。つまり鎖群 $N \subseteq \mathcal{E}(E, F)$ (ただし F は体とする) に対して、双線形写像 $\beta: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow F$

$$\beta(f, g) = \sum_{e \in E} f(e)g(e) \quad (5.15)$$

に関する直交鎖群を N^\perp とすると、 $M = M(N)$ の双対マトロイド M^* は $M^* = M(N^\perp)$ で表される。このことは定理5.9の解説で述べたことから理解される。このようにしてマトロイド M のサーキット行列および双対サーキット行列の方向づけが得られる。したがってマトロイド M が正則であれば、 M は付向可能である。以上の議論から次の定理が得られる。

定理5.35 マトロイドが正則であることと付向可能であることは等価である。

なおマトロイドの有向可能性に関しては、より詳細な議論さらにはその線形計画法におけるシンプレクス法への応用等について R. G. Bland による [5], [6], [7] などを参照されたい。

参考文献

- [1] R. J. Wilson: *Introduction to Graph Theory*, Academic Press, New York and London, 1972
- [2] F. Harary: *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, U. S. A., 1972
- [3] C. Berge: *Graphs and Hypergraphs*, North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1973
- [4] W. T. Tutte: "A homotopy theorem for matroids I and II", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88, 1958, pp. 144-174
- [5] R. G. Bland: "Complementary orthogonal subspaces of R^n and orientability of matroids", Ph. D dissertation, School of IE and OR, Cornell University, U. S. A., 1974
- [6] R. G. Bland: "A combinatorial abstraction of linear programming", *J. Combinatorial Theory*, Ser. B, Vol. 23, 1977, pp. 33-57
- [7] R. G. Bland and M. Las Vergnas: "Orientability of matroids" *J. Combinatorial Theory*, Ser. B, Vol. 24, 1978, pp. 94-123