最適制御理論の動向 (4)

坂本 実

9. 生物個体群の最適捕獲問題

これまでに述べてきた最適制御理論のいろいろの方法の応用例として，自然資源，特に，生物（魚）の最適制御問題への応用について述べることにしよう．この問題に関しては，コーリン・クラークのすぐれた教科書 [4] があることはすでに述べた．また，同著者の解説ともいえるもの [13] もある．ここでは，この解説の1つの目的であるソビエトにおける研究紹介をも考慮して，文献 [14]，[15]にもとづき，ソビエトにおける研究例について述べることにする．

9.1 個体群の成長モデル

ある一定の環境条件のもとで増殖しているある種の生物について，その個体数の時間にともなう変化を記述する方程式（個体群の成長モデル）としてよく知られたものに，いわゆるマルサス (Malthus) の法則(1780)がある．それは，次のとおりである．

$N=N(t)$ を時刻 t における個体数（個体水準ともいう．実際は，個体数密度）とするとき

$$dN/dt=\alpha N \tag{1}$$

定数 $\alpha>0$ は成長率 (growth rate，正確には，単位時間あたりの成長率）と呼ばれる．時刻 $t=0$ のときの個体数を N_0 とするとき，方程式 (1) の解は次で与えられる．このことは簡単な計算で求まる．

$$N(t)=N_0e^{\alpha t} \tag{2}$$

個体数 $N(t)$ は，$\alpha>0$ のとき指数関数的に増殖し，$\alpha<0$ のとき，指数関数的に減衰する (図1)．

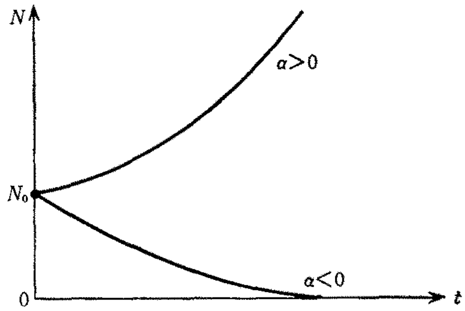

図 1 指数関数的増殖，減衰

指数的増殖は，空間的にもその他の必要資源も十分に豊富であって，成長の防げがないままに続く理想的環境でだけおこりうることであろう．このような環境はいつまでも続くものではない．個体数が増加するにしたがって，環境条件は成長率を減少させるように働くはずである．こうして，方程式 (1) の係 α は，定数ではなく，個体数 N の減小関数であろう．そのような関数の最も単純なものは，1次関数 $\alpha(N)=\alpha-\gamma N$ である．こうして，次の方程式を得る．

$$dN/dt=N(\alpha-\gamma N) \tag{3}$$

この方程式は，ロジスティック方程式 (logistic equation) と呼ばれるもので，1838年にヴェルハルスト (Verhulst, P. F.)によって見つけられたものである．

この方程式 (3) の，初期条件 $N(0)=N_0$ を満足する解は

$$N(t)=\frac{\alpha Ne^{\alpha t}}{\alpha+\gamma N_0(e^{\alpha t}-1)} \tag{4}$$

として求められる．この曲線はロジスチック曲線とも呼ばれる．

ロジスチック曲線のグラフについては，式 (4) をグラフに描くことによらずとも，その方程式から，その概略を知ることができる．そのためには，方程式の右辺のグラフ（放物線，図2）からもわかるように，変化率 dN/dt の符号を調べる．

$$\frac{dN}{dt}=\begin{cases}<0, & \alpha/\gamma< \quad ;N(t)\text{は減小する，}\\ =0, & N=\alpha/\gamma \quad ;N(t)\text{は極値をとる，}\\ >0, & 0<N<\alpha/\gamma\ ;N(t)\text{は増加する．}\end{cases}$$

平衡点 ($dN/dt=0$ となる，N の値で，そのまま維持される個体数）は，$N=0$，$N=\varepsilon/\gamma$ の2つであり，前者は，その近傍から出発する解はそこから遠ざかる意味

さかもと みのる 専修大学

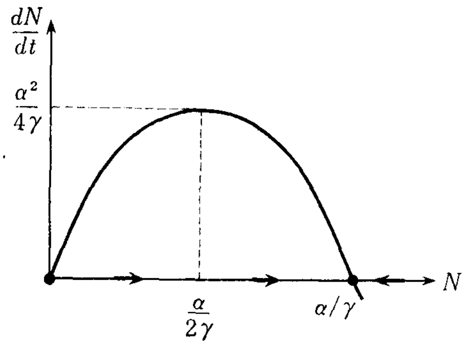

図 2　ロジスティック方程式での変化率

で，**不安定** (unstable) であるといい，後者は，その点の左右いずれの側の近くの点から出発する解もその点に近づく意味で，**安定** (stable) であるという（図2の矢線参照）．自然のままであれば，個体数は，安定点に対応する$K=\alpha/\gamma$を維持する．この量Kを**環境容量** (carrying capacity) という．

解曲線，個体数の変化曲線の特性を方程式から直接知るためには，2階導関数を計算し，その符号によって凹，凸を知ることが役立つ．

$$d^2N/dt^2=\frac{d}{dt}(dN/dt)=\frac{d}{dt}\{N(\alpha-\gamma)N\}$$
$$=N(\alpha-2\gamma N)(\alpha-\gamma N),$$

$$\frac{d^2N}{dt^2}\begin{cases}>0, & 0<N<\alpha/2\gamma,\\ <0, & \alpha/2\gamma<N<\alpha/\gamma,\\ >0, & \alpha/\gamma<N.\end{cases}$$

このような，定性的な調べから，あるいは厳密な式(4)から$N(t)$のグラフは，図3のように得られる．

9.2　最適捕獲問題，マルサス・モデルの場合

上に述べた最も基本的モデルで記述される個体群の最適捕獲の問題の考察から始めることにする．最初に，方程式 (1) にしたがって変化する個体群から，そのときの個体数のk倍 ($0\leqq k\leqq 1$) を捕獲し，与えられた時間T後には個体群の水準がnN_0（ただし，$n>1$, N_0は時刻0における個体群水準）となり，しかも，この間の平均捕獲量が最大になるように，$k=k(t)$, $0\leqq t\leqq T$を求める問題を解こう．この問題は次のように記述される[14]．

問題A　目的関数　$J(k(\cdot),N(\cdot))=\int_0^T k(t)N(t)dt/T$ →最大

制約条件　(i)　$dN/dt=N-kN$,

(ii)　$N(0)=N_0$,　$N(T)=nN_0$,

ここに，nは与えられ正整数．

(iii)　初期時刻＝0，終端時刻＝T …固定，

(iv)　$0\leqq k(t)\leqq 1$.

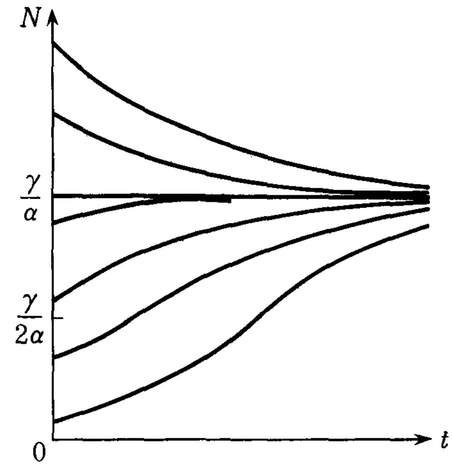

図 3　ロジスティック方程式の解曲線

この問題は，特別の最適制御理論の方法によらず，初等的に解くことができる．捕獲を行なわないとき，$k(t)\equiv 0$のとき，個体数がnN_0になるのに要する時間は

$$T_0=\ln n/\alpha$$

（ただし，$\ln x$ は，xの自然対数関数）であるから，問題は $T>T_0$ のときにのみ意味をもつ．

方程式(i)の初期条件(ii)のもとでの解は次となる．

$$N(t)=N_0\exp\{\alpha t-\int_0^t k(\tau)d\tau\} \tag{5}$$

ここで，関数　$h(t)=N(t)/N_0$を導入する．(5) 式から

$$h(t)=\exp\{\alpha t-\int_0^t k(\tau)d\tau\},\ h(0)=1,\ h(T)=n \tag{6}$$

となる．目的関数に (5) を代入し，部分積分を行なった後，関数$h(t)$を用いて表わす．

$$J=\int_0^T k(t)N_0\exp(\alpha t-\int_0^t k(\tau)d\tau)dt/T$$
$$=-N_0\int_0^T e^{\alpha}\frac{d}{dt}[\exp(-\int_0^t k(\tau)d\tau]dt/T$$
$$=N_0[h(T)-h(0)-\alpha\int_0^T h(t)dt]/T.$$

これに，(6) を代入し，$k(t)$の代りに$h(t)$を制御と考えることによって，次の等価な問題を得る．

$$J=N_0[\alpha\int_0^T h(t)-(n-1)]\ を\ h(t)\ で最大にせよ．$$

ただし

$$h(t)\geqq 0,\ h(t)\leqq e^{\varepsilon t}$$

この問題の最大値を与える関数は $t=T$ で（一般に）不連続であって，

$$h(t)=\begin{cases}e^{\varepsilon t}\ ; & 0\leqq t<T,\\ n\ ; & t=T\end{cases}$$

であり，対応として$k(t)=d[\varepsilon t-\ln h(f)]/dt$((6)から)

$$k(t)=\begin{cases}0, & 0\leqq t<T,\\ \varepsilon T-\ln n, & t=T\end{cases}$$

となり，このときの目的関数の値（最大平均捕獲量）は

$$J=N_0(e^{aT}-n)/T.$$

得られた最適制御は，個体群水準が N_0 から，nN_0 になる過渡過程中捕獲を行なわず，過程の終端時刻Tに"指定水準を超過した量を捕獲する"ことであることを意味している．つまり，これは"太らせた後に獲る"のが，途中で少しずつ獲るよりも有利であるということである．

一定水準での捕獲から，別の一定水準での捕獲への移行を最適にするここで考察した型の問題は，たとえば家畜集団，人工養殖魚の捕獲や微生物の培養などで意味をもつものである．

9.3 最適捕獲問題・ロジスティック・モデルの場合

ロジスティック方程式 (3) で記述される個体群に関する，上と類似の捕獲問題を考えることにする．それにさきだち，若干の一般的考察を行なっておこう．生産性が最大になる，つまり，(3) で与えられる個体数の変化率dN/dtが最大になる個体群水準を求めよう．方程式 (3) の右辺をNで微分し，それをゼロとおいて（あるいは，図2から），最大生産性を与える個体群水準N^0は，次のように環境許容量の半分となる．

$$N^0=\alpha/2\gamma.$$

定常状態においての長期間の捕獲を考えるならば，この個体群水準で捕獲を行なうべきであろう．ところが，前の問題でのように，有限時間での捕獲量を最大にするときには問題は別である．さて，この水準を維持するような単位時間当りの捕獲量はこの水準での単位時間当りの増分，つまり方程式(3)の右辺の$N=N^0$の値で，それは$C^0=\alpha^2/4\gamma$ である（図２）．単位時間当りの捕獲量CがC^0 より小さいとき，個体数の変化は次で記述される．

$$dN/dt=N(\gamma-\alpha N)-C,$$

$$0<C<C_0=\alpha^2/4\gamma,$$

このとき，個体群の成長過程は２つの平衡点N_1^*, N_2^*をもち（図４），N_1^*は不安定，N_2^*は安定である．捕獲率CがC_0以上であれば，$dN/dt<0$ となり，この個体群はやがて絶滅することになる．こうして，$C^0=\alpha^2/4\gamma$は，生存が可能な最大の捕獲量であって，**最大持続生産** (maximum sustainable yield, 略して MSY) と呼ばれている．また，このことは，パラメータ ($N, C, \alpha/\gamma$) 一空間で"折目形のカタストロフ(catastrophes)"があらわれるとも言える．

ロジスティック成長モデルでの最適捕獲問題を離散化した形で設定し，それを解くことにしよう．離散化は微分方程式 (3) を差分方程式に直すことによっても行なえる．このとき，いくつもの差分方程式が考えられ，その

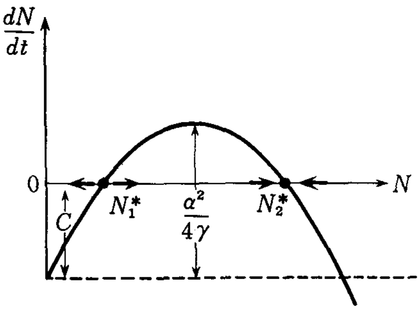

図 4 捕獲量と個体数変化率

あるものには，**カオス** (chaos) と呼ばれる現象が生じることが知られている(たとえば[16]参照).

ここでは，微分方程式の解 (4) を離散化することにする（後にみるように，対応する微分方程式は (3) とは別のものになる）．こうして，以下の問題を考える．考えている時間区間 $[0, T]$ 内の，時刻 $t_i=ih$ における個体数$N_i=N(t_i)$のうち量 $k_iN_i, 0\leqq k_i\leqq 1$ を捕獲する．ここで，$i=0, 1, \cdots, m-1$，ただし，$h=T/m, m$ はある正整数とする．時刻 t_i に残された個体数$(1-k_i)N_i$は，次の捕獲時刻 $t_{i+1}=(i+1)h$ には，次式で決定される N_{i+1} に増殖するものとする．

$$N_{i+1}=\frac{\alpha(1-k_i)N_ie^{ah}}{\alpha+\gamma(1-k_i)N_i(e^{ah}-1)}\equiv f(N_i, k_i) \quad (7)$$

これは，方程式 (3) の，初期条件 $N(t_i)=(1-k_i)N_i$，満足する解 $N(t)$ の$t=(i+1)h$ における値である（(4)参照）．この間の総捕獲量は $\sum_{i=0}^{m-1}k_iN_i$ である．

こうして，次の問題を得る（[15]，若干の誤りを訂正する）．

問題B 目的関数 $J(k_i, N_i)=\sum_{i=0}^{m-1}k_iN_i\to$最大

制約条件 (i) $N_{i+1}=\alpha\lambda(1-k_i)N_i/[\alpha+\gamma(1-k_i)(\lambda-1)], \lambda\equiv e^{ah}>1$,

(ii) $i=0$ のとき，$N_i=N_0$,

(iii) 初期時刻，$t_0=0, t_m=mh=T$ …固定，

(iv) $0\leqq k_i\leqq 1, N_i\geqq 0, i=1, 2, \cdots, m-1$.

この問題は多段決定過程とも呼ばれる離散過程の最適制御問題の典型的な一問題である．そのような問題を解くための方法には，離散型最大値原理等があるが，最も広く用いられているのはダイナミック・プログラミング（動的計画法とも呼ばれ，DPと略される）である．連続過程についてのその考え方と方法はすでに **8.2**（第3回）で述べた．ここで，問題を一般的な形で（これまでとあわせ，最小化問題として）記述し，そのダイミック・プログラミングによる解法をまとめておこう．

9.4 ある型の離散最適制御問題のDPによる解法

問題IV 目的関数 $J(u(\cdot), x(\cdot)) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} f^0(x(t), v(t), t) \to$ 最小

制御条件 (i) $x(t+1) = f(x(t), v(t), t)$,

(ii) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1)$…自由,

(iii) t_0, t_1…固定,

(iv) $u(t) \in V(t), t = t_0, t_0+1, \cdots, t_1$.

ここに，$x(t)$はn次元ベクトル，$u(t)$はr次元ベクトル，$f(x, u, t)$ はn次元ベクトル関数，$f^0(x, u, t)$ はスカラー（実数値）関数である．

過程(i)に対し，xをさまざまに選んで定まる次の過程の族を考える（時刻τにxで始まるτ以後の過程）

$$x(\tau+1) = f(x(\tau), v(\tau), \tau),\ x(t) = x,\ \tau = t, t+1, \cdots, t_1-1,\ t_0 \leqq t \leqq t_1-1$$

次に，ベルマンの関数 $B(x, t)$ を次で定義する

$$B(x,t) = \min_{\substack{u[t, t_1-1] \\ x(t)=x}} \sum_{\tau=t}^{t_1-1} f^0(x(\tau), u(\tau), v) \qquad (8)$$

ここに，$v[t, t_1-1]$ は，$v(t), u(t+1), \cdots, u(t_1-1)$ の略記号である．$B(x, t)$ は，時刻tにxで始まるとの仮定の下での，それより後半の過程での目的関数の最小値である．このとき，次が成立する．

$$B(x,t) = \min_{u(t) \in (Vt)} \langle \min \rangle \left[f^0(x(t), u(t), t) + \sum_{\tau=t+1}^{t_1-1} f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) \right] \quad (9)$$

右辺の $\langle \min \rangle$ は，$u(t+1), u(t+2), \cdots, u(t_1-1)$ に関し，条件 $x(t+1) = f(x, u(t), t)$ のもので計算する最小値を意味する．(9) は，(8) における和を，$\tau = t$ の項と$\tau \geqq t+1$ の項の部分和に分け，それに対応して，tにおけるuと，$\tau \geqq t+1$ におけるuとに分けたものである．(9) の［　］の第1項は $u(t)$ だけに依存することから，

$$B(x,t) = \min_{u(\cdot) \in V(t)} \left[f^0(x, u(t), t) + \langle \min \rangle \sum_{\tau=t+1}^{t_1-1} f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) \right]$$

$\langle \min \rangle$ は前と同じ意味である．［　］の第2項は，定義により，$B(f(x, u, \tau), t+1)$ であることから，$B(x, t)$ に関する次のいわゆるベルマンの方程式を得る．

$$B(x,t) = \min_{u \in U(t)} [f^0(x, u, t) + B(f(x, u, t), t+1)] \qquad (10)$$

この方程式に対する境界条件は，(8) で $\tau = t_1-1$ とおいて

$$B(x, t_1-1) = \min_{u \in V(t_1-1)} f^0(x, u, t_1-1) \qquad (11)$$

である．(11)から始めて方程式 (4) を逐次解いて，列

$$B(x, t_1-1),\ B(x, t_1-2), \cdots,\ B(x, t_0)$$

と，対応する最小値を与える最適制御（条件付）の列

$$u(x, t_1-1),\ u(x, t_1-2), \cdots,\ u(x, t_0)$$

とを得る．

値 $B(t_0, x_0)$ は，この問題の目的関数の最小（最適）値である．$u^0(t_0) = u(x_0, t_0)$は，最適制御 $u^0(t)$ の時刻 t_0 での値である．他の時刻での最適制御は，上の列を用いた式

$$u^0(t) = u(x^0(t), t),\ t_0 = t_0+1, \cdots, t_1-1 \qquad (12)$$

で定まる．ここに，$x^0(t)$ は(i)の最適トラジェクトリである．(i)は繰り返し式であるから，(12)と(i)(同じく，(10)とを用いて，最適制御と最適トラジェクトリとを決定することができる．

問題を最小化の問題として記述したが，最大化の問題も，上の解法での最小化をすべて最大化にかえて，まったく同様にして解くことができることは明らかであろう．

9.5 最適捕獲問題（ロジスティック）のDPによる解

ロジスティックモデルでの **9.3** の**問題B**を，上に述べたDPによる解法を用いて解こう．両者での変数関数の対応は次のようになる．

$x - N$, $u - k$, $t - i$, $f^0(x, u, t) - k_i N_i$, $f(x, u, t) - f(N_i, k_i)$, $(t_1 = m)$．最後の時刻 $t_{m-1} = (m-1)h$での捕獲の最適化の結果は自明な

$$B_{m-1}(N) = \max_{0 \leqq k \leqq 1} kN = N,\ k_{m-1}(N) = 1 \qquad (13)$$

で与えられる．つまり，全部を捕獲することである．

(10)に対応して，t に $m-2$ をいれて，次を得る．

$$B_{m-2}(N) = \max_{0 \leqq k \leqq 1} [kN + B_{m-1}(f(N, k))] = \max_{0 \leqq x \leqq N} \{N - x + g(x)\}$$

ただし，計算の便宜上次のようにおいた．

$$x = (1-k)N,\ g(x) \equiv \frac{\alpha \lambda x}{\alpha + \gamma(\lambda-1)x}. \qquad (14)$$

このとき，$f(N, k) = g((1-k)N) = g(x)$．若干の変形後に次を得る．

$$B_{m-2}(N) = N + \frac{\alpha\lambda}{\gamma(\lambda-1)} - \min_{0 \leqq x \leqq N} \left[x + \frac{L}{\alpha + Kx} \right]$$

ここに，$K = \gamma(\lambda-1)$，$L = \alpha^2\lambda/\gamma(\lambda-1)$．この min を計算して

$$B_{m-2}(N) = \begin{cases} N + \dfrac{\alpha}{\gamma} \cdot \dfrac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1};\ N > \dfrac{\alpha}{\gamma(\sqrt{\lambda}+1)}, \\ \qquad k_{m-2}(N) = 1 - \dfrac{\alpha}{\gamma N(\sqrt{\lambda}+1)} \\ \dfrac{\alpha\lambda N}{\alpha + \gamma N(\lambda-1)} = g(N);\ N \leqq \dfrac{\alpha}{\gamma(\sqrt{\lambda}+1)}, \\ \qquad k_{m-2}(N) = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

このことは，個体群水準がほぼMSY($N^0 = \alpha/2\gamma$, $\sqrt{\lambda} \fallingdotseq 1$) より大きいときにのみに捕獲を行なうことになる．

$$B_{m-2}(N) = \max_{0 \leqq k \leqq 1} \{kN + B_{m-2}(f(N, k))\}$$

$$= \max_{0 \leqq x \leqq N} \begin{cases} N - x + g(x) + \dfrac{\alpha}{\gamma} \dfrac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1}; \\ \qquad g(x) > x^0 (x > x') \qquad (16) \\ N - x + g(g(x));\ g(x) \leqq x^0 (x \leqq x') \end{cases}$$

ただし，$x^0=\alpha/\gamma(\sqrt{\lambda}+1),\ x'=\alpha\gamma(\lambda\sqrt{\lambda}+1),\ x^0>x'$. 右辺の分岐は，(15)の分岐に対応している((15)のNは，N_{m-2}，(16)のNはN_{m-3}，$N_{m-2}=g(N_{m-3})$であることに注意) $g(g(x))$を具体的にxの式で表現し，前と同様にして，次を得る．

$$B_{m-3}(N)=\begin{cases} N+\dfrac{2\alpha}{\gamma}\dfrac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1}\ ;\ N>\dfrac{\alpha}{\gamma(\lambda+1)}, \\ \qquad k_{m-3}(N)=1-\dfrac{\alpha}{\gamma N(\sqrt{\lambda}+1)}, \\ g(N)+\dfrac{\alpha}{\gamma}\dfrac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1}\ ;\ \dfrac{\alpha}{\gamma(\sqrt{\lambda}+1)}< \\ N<\dfrac{\alpha}{\gamma(\sqrt{\lambda}+1)},\ k_{m-3}(N)=0, \\ g(g(N))=\alpha\lambda^2N/[\alpha+\gamma N(\lambda^2-1)], \\ \qquad N<\alpha/\gamma(\lambda\sqrt{\lambda}+1)\ ;\ k_{m-3}(N)=0 \end{cases} \tag{17}$$

どの時刻においても，個体群数がある程度大きく

$$N_i\geqq\alpha/\gamma(\sqrt{\lambda}+1),\quad i=0,1,\cdots,m \tag{18}$$

であれば，対応する最適制御(最適捕獲率)は

$$k_i(N)=1-\alpha/\gamma N(\sqrt{\lambda}+1),\quad i=0,1,\cdots,m. \tag{19}$$

このときの，目的関数の最大値，最大捕獲量は

$$B_0(N_0)=N_0+(m-1)\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1} \tag{20}$$

であることが証明される（iに関する逆向きの数学的帰納法を用いる)．

$\lambda=e^{\alpha h},h=T/m,\ m-1=(T-h)/h$であることを思い出して(8)式にこれらを代入して

$$B_0(N_0)=N_0+\frac{T-h}{h}\ \frac{\alpha}{\gamma}\ \frac{e^{\frac{\alpha h}{2}}-1}{e^{\frac{\alpha h}{2}}+1} \tag{21}$$

を得る．$h\geqq 0$ であるから，捕獲間隔hについてのこの最大値は，α,γ,N_0に無関係に，$h\to 0$のとき，つまり連続的捕獲によって最大の捕獲量が得られることになる．このときの最大捕獲量は，(21)式より，$e^{\frac{\alpha h}{2}}-1/h\to\alpha/2\ (h\to 0)$ に注意して

$$\lim_{h\to 0}\ B_0(N_0)=N_0+\frac{\alpha^2}{4\gamma}T \tag{22}$$

となる．また，最適捕獲率は(19)（$\sqrt{\lambda}=e^{\alpha h/2}$) で$h\to 0$として

$$k^0(N)=1-\frac{\alpha}{2\gamma N} \tag{23}$$

を得る．なお，条件(18)は，同様にして，次となる．

$$N\geqq\alpha/2\gamma. \tag{24}$$

次に，ある時刻$i(t=ih)$に，不等式(18)にが成立していれば，すべての時刻$j>i$（それ以後のすべての時刻)に最適制御(19)を用いていれば，それらの時刻に対し不等式(18)が成立することを示そう．

(19)より，$(1-k_i)N_i=\alpha/\gamma(\sqrt{\lambda}+1)$であり，(7)（または(i))と(14)とから，$N_{i+1}=g(\alpha/\gamma(\sqrt{\lambda}+1))=\alpha\sqrt{\lambda}/\gamma(\sqrt{\lambda}+1)$ を得る．$\sqrt{\lambda}>1$ であることから，$N_{i+1}>\alpha/\gamma(\sqrt{\lambda}+1)$，すなわち，$i$を$i+1$とした(18)が成立する．さらに，くりかえして，上のことが証明される．

こうして，(18)が成立し得ないのははじめの，いくつかの時刻，たとえば，$i=0,1,\cdots,k$だけであって，その後の $i=k+1,\ \cdots,\ m-1$ では(18)が成立することになる．このとき，最適捕獲率は次のようになる．

$$k_i{}^0(N)=\begin{cases}0\ ;\ i=1,2,\cdots,k, \\ 1-\alpha/\gamma N(\sqrt{\lambda}+1),\ i=k+1,\cdots,m-1,\end{cases} \tag{25}$$

ただし，$N_k\leqq\alpha/\gamma(\sqrt{\lambda}+1)<N_{k+1}$ のとき．

ここでも，前のマルサスのモデルの場合と同様“太らせた後に獲る”政策が最適であることになる．

さて，ここで，上で行なった離散過程に対応する連続過程を考えることにしよう．時刻$t_i=ih$における捕獲量を$q(t_i)=k_iN_i$とすると，捕獲直後の個体数$N^+(t_i)$は捕獲が時刻t_iに瞬間に行なわれるとして，$N^+(t_i)=N(t_i)-q_i(t)$ となる．次の時刻，$t_{i+1}=(i+1)h=t_i+h$ には，h は十分小さいとして，この間 (3) にしたがう成長により，$N(t_{i+1})=N^+(t_i)+N^+(t_i)\ [\alpha-\gamma N^+(t_i)]$ となる．$N^+(t_i)$ の上の式をこれに代入して

$$N(t_{i+1})=N(t_i)-q(t_i)+[N(t_i)-q_i(t)] \\ \{\alpha-\gamma[N(t_i)-q_i(t)\}$$

を得る．$m\gg 1$ で，$N(t_{i+1})-N(t_i)$ が十分小さければ，この方程式の解は，微分方程式

$$dN/dt=-q+(N-q)\ [\alpha-\gamma(N-q)] \tag{26}$$

の解とほとんど一致することになる．

捕獲時点を時刻t_{i+1}の直前に行なうとして，$N(t_{i+1})=N(t_i)+N(t_i)\ [\alpha-\gamma N(t_i)]\ N(t_i)$になったとき，$q(t_i)$だけ捕獲すれば，次が成立する．

$$N(t_{i+1})=N(t_i)+N(t_i)\ [\alpha-\gamma N(t_i)]-q(t_i).$$

これに対応する連続過程の微分方程式は

$$dN/dt=N(\alpha-\gamma N)-q(t). \tag{27}$$

ところで，方程式(26)のもとでは，対応する離散過程で前に考察した最適化問題での目的関数$\sum_{i=1}^{m-1}k_iN_i$に対し，次を考えるべきである．

$$J(q(\cdot),N(\cdot))=\int_0^T q(t)dt+N(T).$$

実は，この問題はすでに，この解説の第2回に，ポントリャーギンの最大値原理を用いて解いた（問題B，問題B′)．上で得た離散化の結果を，$h\to 0$として連続化したものと，はじめから連続問題として解いたさきの結果との比較をされることを読者にすすめる．

ところで，方程式(27)に対する同様の問題では目的関数を$\int_0^T q(t)dt$にするべきである．実は，この問題の解は$q(t)$が可能を最大値にとることであり，現実的な意義を与えない．現実的意味のある問題を設定するには，さらになんらかの制約を課すべきである．そのいくつかは[15]

に行なわれている．また，両問題（(26)および(27)にもとづく）の比較もそこになされている．そこでは，ロジスティック成長モデル(3)に対する捕獲モデル（捕獲を考慮した成長モデル）は(26)と考えるのが，実用的にも結果の意義からもより好ましいとしている．ここでもその立場をとることにする．

9.6 複数種の個体群の最適捕獲問題

n 種の個体群があり，それぞれの個体数を N_i で表わす．成長過程が次の微分方程式系で記述されるものとする（V. A. Kostitzin, 1937）．

$$dN_i/dt=N_i(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}N_j),\quad i=1,2,\cdots,n \qquad (28)$$

時刻 t における第 i 種の捕獲量（制御）を $q_i(t)$ として，上の考察から

$$dN_i/dt=(N_i-q_i)\{\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}(N_i-q_j)\}-q_i(t)$$

を得る．目的関数として総利益を用いるために，次の関数を導入する．

$$Z_i(t)=\int_0^t q_i(\tau)d\tau+N_i(t),$$
$$dZ_i/dt=q_i(t)+dN_i/dt. \qquad (29)$$

第 i 種の1個体の価格を C_i とする．このとき，$[0,T]$ 間の総利益は $\sum_{j=1}^{n} C_iZ_i(T)$ である．問題を最小値問題として記述するために，関数 $G(t)=-\sum_{j=1}^{n}(iZ_i(t)$ を導入する．dG/dt の式を，(29)の後半，さらに(28)を用いて得ることができる．ここで，記述を簡単にするために，$u_i=N_i-q_i$ ($q_i=N_i-u_i$) を導入し，これを制御とみなす．自然な条件 $0\leqq q_i\leqq N_i$ は，$0\leqq u_i\leqq N_i$ にかわる．こうして，次の最適制御問題を得る（前回の問題B′の型）．

問題C 目的関数 $J(u(\cdot),N(\cdot))=G(T)\to$最小

制約条件 (i)
$$\begin{cases} dG/dt= \\ \quad -\sum_{i=1}^{n}C_iu_i(\varepsilon_i-\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}u_j), \\ dN_i/dt= \\ \quad u_i(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}u_j)+u_i-N_i \end{cases}$$

(ii) $G(0)=0,\ N(0)=N_0$,

(iii) 初期時刻$=0$，終端時刻$=T$,

)iv) $0\leqq u_i\leqq N_i,\ i=1,2,\cdots,n.$

最大値原理を用いて解こう．6.1の定理1の2を用いる．

ステップ1 $H(\Psi,G,N,u)=\sum_{i=1}^{n}\{[(-C_i\Psi_1+\Psi_{i+1})$
$u_i(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}u_j)]+(u_i-N_i)\Psi_{i+1}\}.$

H の u_i に関する最大条件による u_i の決定は後に行なう（問題と関数Hの特殊性によって，リステップ3と同時に行なえる）．

ステップ2 $d\Psi_1/dt=-\partial H/\partial G=0,\ d\Psi_{i+1}/dt=-\partial H/\partial N_i=\Psi_{i+1}$（定理Iの2，2)），$\Psi_1(T)=1,\ \Psi_{i+1}(T)=0,\ i=1,2,\cdots,n$(同定理5)) から $\Psi_1(t)\equiv1,\ \Psi_1(t)=\Psi_1(0)e^t,\ \Psi_{1+1}(t)\equiv0,\ i=1,\cdots,n$，このとき関数 H は

$$H=-\sum_{i=1}^{n}u_i(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}u_j)$$

となり，$\partial H/\partial u_i$ を計算して

$$\sum_{j=1}^{n}(C_i\gamma_{ij}+C_j\gamma_{ij})u_j-C_i\varepsilon_i$$

を得る．

ステップ3（ステップ1で残したことでもある）最適な u_i の決定を行なう．$\partial H/\partial u_i=0$ の解，つまりこの線形方程式の解を $u_j=\xi_i$ とする

$$\sum_{j=1}^{n}(C_i\gamma_{ij}+C_j\gamma_{ji})\xi_j=C_i\varepsilon_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \qquad (30)$$

関数 H の $0\leqq u_i\leqq N_i$ における最大値は，$0\leqq\xi_i\leqq N_j$ のとき，$u_i=\xi_i$ で；$\xi_i<0$ のとき，$u_i=0$ で；$\xi_i>N_i$ のとき，$u_i=0$ で達せられる．これで，$q_i=N_i-u_i$（単位時間当りの）捕獲量 $q^0(t)$ が次のように求まる．

$$q_i^0(t)=\begin{cases}0 & ;\ N_i<\xi_i \\ N_i(t)-\xi_i & ;\ N_i\geqq\xi_i\geqq0 \\ N_i(t) & ;\ u_j^*<0\end{cases} \qquad (31)$$

ここに，u_j^* は方程式(30)の解である．

この結果を，前の(28)で $n=2$ とする特殊な場合であるロトカ・ボルテラ方程式(Lotka-Volterra equation, V. Volterra が1931に発表）と呼ばれる捕食者ー被食者(predator-prey）モデルに応用しよう．それは，2種のうち一方の種が他方の種のえじきー被食者になる場合のモデルである．

N_1，N_2 をそれぞれ，被食者，捕食者の個体数とするとき，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\gamma_{12},\gamma_{21}$ をパラメータとして，その方程式は

$$\begin{cases}dN_1/dt=N_1(\varepsilon_1-\gamma_{12}N_2) \\ dN_2/dt=N_2(-\varepsilon_2+\gamma_{21}N_1)\end{cases} \qquad (32)$$

の形である．詳細な解析は，ここでは行なわない．この方程式の (N_1,N_2) ー平面における解曲線のグラフは，中心 $(\varepsilon_1/\gamma_{12},\varepsilon_2/\gamma_{21})$ の閉曲線を描く周期運動であり，その周期は近似的に $2\pi/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ であることが導かれる（たとえば[17]参照）．この方程式は，方程式(28)で $n=2$ あって，パラメータが次の関係を満たす特別な場合である．

$$\gamma_{11}=\gamma_{22}=0,\ \gamma_{12}>0,\ \gamma_{21}<0,\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2<0$$

ここではさらに $\gamma_{12}=-\gamma_{21}$ とし，γ_{21} を $-\gamma_{12}$ で表わし，ε_2 を $-\varepsilon_2$ とおくことにする．このとき方程式(30)の解は

$$\xi_1=-\frac{C_2\varepsilon_2}{\gamma_{12}(C_1-C_2)},\quad \xi_2=\frac{C_1\varepsilon_1}{\gamma_{12}(C_1-C_2)} \qquad (33)$$

である．

$C_1>C_2$，つまり，被食者が高価であるとすると，$\xi_1<0,\xi_2>0$ となり，最適捕獲量 q_1^0,q_2^0 は(31)によりそれぞれ次のようになる．

$$q_1^0=N_1\ ;\ q_2^0=\begin{cases}0; & N_2<\xi_2, \\ N_2-\xi_2; & N_2\geqq\xi_2.\end{cases} \qquad (34)$$

これを，方程式(32)（仮定により，$\gamma_{21}=\gamma_{12}$ とした）に

代入して，個体数の変化規則を与える方程式系を得る．

$$dN_1/dt=-N_1,\ \frac{dN_2}{dt}=\begin{cases}-\varepsilon_2N_2, & N_2<\xi_2\\ -\varepsilon_2\xi_2+\xi_2-N_2, & N_2\geqq\xi_2.\end{cases} \tag{35}$$

$C_1<C_2$ であれば，$\xi_1>0$，$\xi<0$ となり

$$q_1{}^0=\begin{cases}0 & ;N_1<\xi_1\\ N_1-\xi_1 & ;N_1\geqq\xi_1\end{cases},\quad q_2{}^0=N_2, \tag{36}$$

$$\frac{dN_1}{dt}=\begin{cases}\varepsilon_1N_1 & ;N_1<\xi_1\\ \varepsilon_1\xi_1+\xi_1-N_1 & ;N_1\geqq\xi_1\end{cases},\quad \frac{dN_2}{dt}=-N_2 \tag{37}$$

を得る．被食者と捕食者の価格の大小によってわけて得た上の結果の具体的意味は明らかであろう．解釈を試みられたい．

9.7 クロトフの方法の適用例

最後に，この解説（**8**，第3回）で述べたクロトフの方法の応用例として，「人工養殖をともなう漁業の最適制御」（[18]，そこには，バイカル湖に関する具体的数値例もある）の一問題について述べる．

考えている魚の個体数をNとし，そのうちλNが産卵期にあるとする．λNのうち，$w\lambda N$を養殖場で，$(1-w)\lambda N$を自然条件で産卵させることにする．ここに，$0\leqq w\leqq 1$は制御とする．このとき，$w\lambda N$個の個体は捕獲されるものとする．自然条件での単位時間（年間）当りの増加個体数は，$P_n=\alpha\lambda N(1-w)\exp(-\beta N)$であることが知られている（$\alpha,\beta$はのパラメータ）．養殖場での単位時間当りの成育個体数は，$P_a=\gamma\lambda Nw$（γは係数）．死亡率は，現存個体数Nに比例し，dNである．単位時間の捕獲量をqとする．$q(t)\geqq 0$で，これも制御である．捕獲される個体数$\lambda Nw, q$の単価をそれぞれp, gとする．

こうして，次の最適制御問題に帰着する．

問題D　目的関数　$J(u(\cdot),w(\cdot),N(\cdot))$

$$=-\int_0^T\{pu(t)+g\lambda N(t)w(t)\}dt\to\text{最小}$$

制約条件　(i)　$dN/dt=P_n+P_a-dN-\lambda Nw-u,$

(ii)　$N(t_0)=N_0,$

(iii)　初期時刻$=0$，終端時刻$=T$，

(iv)　$0\leqq w(t)\leqq 1$，$u(t)\geqq 0$．

（P_n, P_aは上に定義してある）．**8.1**（第3回）の(8)，(9)によって関数S, sを作りそこの定理**2**を用いて解こう．

$$\begin{aligned}S(N,u,w,t)&=K_N\{\alpha\lambda N(1-w)\exp(-\beta N)+\gamma\lambda Nw\\&\quad-dN-\lambda Nw-u\}+K_t-(pu+g\lambda Nw)\\&=-[g-K_N(\alpha\exp(-\beta N)+1-\gamma]\lambda Nw\\&\quad+K_N[\alpha\lambda N\exp(-\beta N)-dN]-(P\\&\quad+K_N)u+K_t\end{aligned} \tag{38}$$

ここに，K_N，K_tはクロトフの関数$K(N,t)$の偏導関数である．定理の要求は，関数$S(N,u,w,t)$がN,u,wに関し，最小（関数$S(N,t_1)$が$N(t_1)$に関して，最小）になることであった．ここで，Sが制御uに依存しないよう$K(N,t)$を選ぼう（このように，クロトフ関数を制御に無関係に選ぶ方法を“2重最大化法”と呼んでクロトフは一般化している）．$K_N=p$；$K=pN$．関数Sのwの係数を$-M(N)$とおこう．

$$M(N)=[g-p(\alpha\exp(-\beta N)+1-\gamma)] \tag{39}$$

$M(N)>0$がすべてのNについて成立するとき，Sのwに関する最小値は$w=1$で達せられ，定理2により個体群の生産は人工的に行なうべきことになる．このときSは

$$S=-\{[g+(1-\gamma)p]\lambda-pd\}N=-mN \tag{40}$$

となる．

$$m=[g+(1-\gamma)p]\lambda-pd$$

$M(N(T))>0$，$m>0$ のとき，SのNに関する最小値には(40)，(i)から，制御 $u(t)=0$ が対応する．関数$S(N_1,T)=pN(T)$（**8.1**，(9)）は$N(T)=0$で最小となる．このことから，この条件のもとでは，最適政策は，$(0,t)$の間人工的再生生産によって，個体数を「蓄積」しておき，$t=T$にすべてを捕獲することであると結論できる．もっと実現的な制約$u(t)\geqq u_0$，$N(t)\geqq N_1$がある場合にも，上の解の定性的特性は同じである．この結果は，$u(t)=u_0$に対応する$N(t)$が，領域$M(N)>0$に始まり，そこに$t=T$まで留まる$(M(N(t))>0, 0\leqq t\leqq T)$の場合にも成立する．

$M(N), m$の符号で定まる他のケースについては消略．

10. おわりに

4回にわたって，最適制御理論の方法と適用例について述べてきた．理論の動向と題しながら，最近のものというよりも，基本的な事項の解説になった．読者の方々のお役に，少しでも立てたら幸である．

文　献

[13] Colin W. Clark, Mathematical Optimizatian and the Economics of Natural Resources. *The mathematical intelligencer*, Vol. 2, No. 2, 1980, Springer-Verlag

*[14] ポルエクトロフ (R. A. Poluektrov) 編，生物個体群のダイナミカル理論，ナウカ，1974

[15] スビレエジェフ，エリザロフ (Yu, M. Svirezhev, E. ya. Elizarov)，生物システムの数学モデル，宇宙生物学の諸問題，第20巻，ナウカ，1972

[16] 山口昌哉，無限の分岐――カオス，非線型の現象と解析，人間現代の数学 [1]，日本評論社，1979

[17] 山口昌哉，非線型現象の数学，朝倉書店，1972

[18] グルマン (V. I. Gurman) 編，自然資源制御のモデル，ナウカ，1981