連載講座

マトロイド理論の基礎(8)

大山　達雄

5.　マトロイドの諸特性

1章に紹介した閉路マトロイドは，与えられたグラフの弧の集合を対象として，そのグラフの初等的な閉路を含まない弧の集合を独立集合とすることによって定義された．そして任意のマトロイドは，それと同型な閉路マトロイドを与えるグラフが存在する時，グラフ的マトロイドとよばれた(3.3節参照)．しかしながら3.3節に述べた2－一様マトロイド$U_{2,4}$の例からもわかるように，すべてのマトロイドがグラフ的マトロイドであるとは限らない．つまりマトロイドがグラフ的であるか否かということは，マトロイドの有するひとつの特性として考えることができる．

任意のマトロイドが，集合E上の部分集合族$\mathscr{S}=\{S_1, S_2,\cdots,S_m\}$の部分横断を独立集合とする横断マトロイドと同型となり得るか否か，つまり与えられたマトロイドが横断的(transversal)であるか否かということも，上述のグラフ的マトロイドの場合と同様にマトロイドのひとつの特性として考えることができる．

この章では，上に述べたようなマトロイドの有するいろいろな特性のうちで，特に表現可能性，双対性，付向可能性に関して，それぞれの特性を有するマトロイドあるいはそれを有さないマトロイド等の具体的例をあげながら説明を加える．この章でとりあげる特性は，マトロイドの有する特性としても代表的なものであって，かなりの実用性をも有するものである．またこれらの特性にもとづいて得られる概念は，マトロイド全般の分類上からも非常に有用な概念である．

5.1　表現可能性

マトロイド理論がベクトル空間におけるベクトルの線形独立性の概念にその研究の端を発していることは，1章の冒頭にも述べたとおりである．あるベクトル空間が与えられた時，そのベクトル空間の部分空間におけるベクトルの集合を対象として，1次独立なベクトルの集合を独立集合とすることによってベクトルマトロイドを定義した(3.2節参照)．この節で紹介するマトロイドの表現可能性(representability)は，特にある体(field)の上で構成されているベクトル空間におけるベクトルの集合に対して定義されたベクトルマトロイドと深い関連を有している．

［マトロイドの表現可能性］

有限集合E上で定義されたマトロイドMが体Fの上で表現可能である(M is representable over a field F)とは，体F上のベクトル空間Vと写像$\phi: E \rightarrow V$が存在して，集合Eの部分集合$A \subseteq E$がMにおいて独立集合となるのが，$\phi(A)$(ただし写像ϕはA上で1対1対応とする)がVにおいて線形独立となることと等価である場合をいう．あるいはまたマトロイドがある体の上で表現可能である場合，つまりマトロイドが表現可能となるような体が存在する場合，そのマトロイドは表現可能なマトロイド(representable matroid)であるという言い方をする．このようなマトロイドをD. R. Fulkerson [1]は行列的マトロイド(matric matroid)とよんだ．

マトロイドMがある体Fの上で表現可能であるということは，Mの要素としてのループや平行な要素を無視すれば，マトロイドMが体F上のあるベクトル空間で定義されたベクトルマトロイドと同型であることと等価であるとも言うことができる．なおここで“Mの要素としてループや平行な要素を無視すれば”と述べたのは，以下のような意味である．

2つのマトロイドが同型である時，一方のマトロイドのループは他方のマトロイドのループと対応するはずである．いまベクトルマトロイドは零ベクトルを1個以上もつことはできない(同一要素となる)ので，2個以上のループを有するマトロイドと同型なベクトルマトロイドは存在しない．マトロイドの平行な要素に関しても同様なことがいえる．

おおやま　たつお　埼玉大学

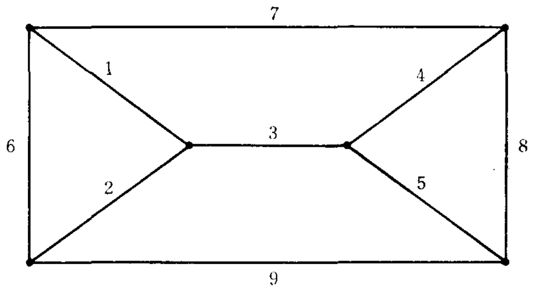

図 5.1 グラフ G

［2値マトロイド］

表現可能なマトロイドのうちで最もよく現われるのは2値マトロイド(binary matroid)であって，これは2を法(modulo)とする整数の体 $GF(2)$ の上で表現可能なマトロイドである．

2値マトロイドの例を掲げよう．図5.1のような弧の集合 $E=\{1,2,\cdots\cdots,9\}$ を有するグラフGを考える．

グラフ G の弧の集合 E 上で閉路マトロイド $M(G)$ を定義する．$M(G)$ の $GF(2)$ 上のひとつの表現として次のような行列がある．

$$\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & & & \mathbf{0} & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 & & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

閉路マトロイド $M(G)$ の $GF(2)$ 上の行列表現

上の行列において，たとえばグラフ G 上の閉路 $\{1, 2, 6\}$ は行列の列ベクトルの集合 $\{1, 2, 6\}$ の1次従属性に対応している．あるいはグラフ G 上の完全木 $\{1, 3, 4, 6, 8\}$ (閉路マトロイド $M(G)$ のひとつの基底)が行列の列ベクトルの集合 $\{1, 3, 4, 6, 8\}$ に対応し，これらが行列の列ベクトルで構成されるベクトル空間の基底ベクトルになっていることが確認されるであろう．当然のことながら，閉路マトロイド $M(G)$ の $GF(2)$上の行列表現は上の表現だけに限らず，G のそれぞれの完全木に対して得られる．

上に与えた行列表現を行方向に眺めると，各行の非零要素がグラフ G の完全木 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ にもづいて得られるGのカットセットの基本系を構成する基本カットセットに対応していることが容易に確かめられるであろう．

図5.1のグラフGの行列表現に示したように，任意のグラフ G によって定義された閉路マトロイド $M(G)$ はすべて2値マトロイドであろうか？

答えはYESである．つまり任意のグラフGが与えられた時に，それによって定義される閉路マトロイド $M(G)$ が2値マトロイドであるということは，以下のようにしてわかる．

グラフ G が頂点の集合 $V=\{v_1, v_2, \cdots\cdots, v_m\}$ と弧の集合 $E=\{e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n\}$ を有する時に，G の $m\times n$ 接続行列(incidence matrix) $A=(a_{ij})$ を以下のように定義する．ただしグラフ G は単純(simple)であって，ループや平行弧をもたないグラフであるとする．

$a_{ij}=1$，頂点 v_i が弧 e_j と接続している時
$=0$，そうでない時

上のようにして定義された，要素が0，1から成る接続行列Aにおいて，各列をベクトルとみると，閉路をなす弧に対応するベクトルの和は $GF(2)$ 上で0となることがわかる．このようにして，閉路マトロイド$M(G)$が $GF(2)$ 上で表現されたことになり，次の定理が得られる．

定理 5.1 グラフ G は m 個の頂点と n 本の弧から成るとする．G の弧の集合の上で定義された閉路マトロイド $M(G)$ の $GF(2)$上の行列表現は，m 行 n 列から成る G の接続行列である．

［双対マトロイドの表現可能性］

さて，マトロイド M がある体 F 上で表現可能である時，その双対マトロイドM^*がやはり体 F 上で表現可能であるか否かという問いに答えるのが次の定理である．なおこの定理は，以下に述べるように，双対マトロイド M^* の行列表現の方法あるいは2値マトロイドの特性化等にとって有用かつ重要な定理である．

定理 5.2 マトロイド M が体 F 上で表現可能であるならば，その双対マトロイドM^*もまた体 F 上で表現可能である．

マトロイド M は，n 個の要素から成る集合 E 上で定義された，階数 r を有するマトロイドであるとする．いま M の体 F 上の行列表現が $r\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$，$a_{ij}\in F$ で与えられたとする．M の階数が r であるから，M^* の階数が $n-r$ となることは双対マトロイドの基底の定義からも明らかである．そこで，行列 A が与えられた時，M^* の行列表現は以下のようにして得られる．

まず $x\in V^n$(体 F 上の n 次元ベクトル空間)として

$$Ax=0 \tag{5.1}$$

を満足するベクトル x の集合を考える．線形代数の知識から，行列AをV^n から V^r への線形変換(linear transformation)とすると，(5.1) を満足するベクトル x の集合は線形変換 A の核(kernel)とよばれ，そのような核 x の構成するベクトル部分空間の次元は $n-r$ である．

したがって(5.1)を満たすベクトル$\boldsymbol{x}$は，$n\times(n-r)$行列Bとベクトル$\boldsymbol{y}\in V^{n-r}$を用いて，次のように書くことができる．

$$\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y}. \qquad (5.2)$$

ここでたとえば行列Aの最初のr列が線形独立であるとすると(このことはAの列の並べ換えが可能であることから一般性を失なわない)，行列Bの最後の$(n-r)$行が線形独立となり，逆もまた成立する．つまり集合Eのr個の要素から成る基底に対応する行列Aの行の集合が線形独立であるとすると，Eに関するその基底の補集合に対応する行列Bの行の集合が線形独立となる．このようにして行列BがマトロイドM^*の体F上の行列表現であることがわかる．

定理5.2から次の系が容易に得られる．

系 5.3 集合E上で定義されたマトロイドMが次のような行列表現を有するとする．

$$\begin{array}{c|c} 1\ \ 2\ \cdots\cdots\ r & r+1\ \ r+2\ \cdots\cdots\ n \\ \hline \left(\begin{matrix} \\ I_r \\ \\ \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} \\ A \\ \\ \end{matrix}\right) \end{array} \qquad (5.3)$$

(ただしI_rは$r\times r$単位行列)

この時，双対マトロイドM^*は以下の行列表現を有する．

$$\begin{array}{c|c} 1\ \ 2\ \cdots\cdots\ r & r+1\ \ r+2\ \cdots\cdots\ n \\ \hline \left(\begin{matrix} \\ -A' \\ \\ \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} \\ I_{n-r} \\ \\ \end{matrix}\right) \end{array} \qquad (5.4)$$

(ただしA'はAの転置行列)

上の系5.3において，(5.4)で与えられる行列の転置行列の列ベクトルが

$$(I_r,\ A)\boldsymbol{x}'=0$$

を満足する解の空間を張ることは容易に確かめられる．この系を用いると，前述の図5.1のグラフG上の閉路マトロイド$M(G)$の双対マトロイド$(M(G))^*$の行列は次のようになる．

$$\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & & & 1 \end{array}$$

双対マトロイド$(M(G))^*$の$GF(2)$上の行列表現

上の行列表現において，各行の非零要素に対応するグラフGの弧の集合は，それぞれ$\{1,\ 2,\ 6\}$，$\{1,\ 3,\ 4,\ 7\}$，$\{4,\ 5,\ 8\}$，$\{2,\ 3,\ 5,\ 9\}$となる．これらがすべて図5.1にあるグラフGの初等的な閉路であって，しかもグラフGの完全木$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$にもとづいて得られるGの閉路の基本系を構成する基本閉路となっていることは容易に確かめられるであろう．

［マイナーマトロイドの表現可能性］

集合E上で定義されたマトロイドMの，部分集合$T\subseteq E$上へのマイナーマトロイドの表現可能性について考えてみよう．

定理4.11(4.1節参照)の式(4.20)よりMのT上への縮約マトロイド$M|T$に関しては，次の関係が成立する．

$$M|T=(M^*\cdot T)^*.$$

なお上式において，M^*のT上への限定マトロイドがM^*と同様に表現可能であることは自明である．したがって定理5.2を用いると，任意のマトロイドMに関して，Mが体F上で表現可能であれば，そのマイナーマトロイドもまた体F上で表現可能であることがわかる．このようにして次の定理が得られる．

定理 5.4 マトロイドMがある体F上で表現可能であるならば，Mのいかなるマイナーマトロイドでもまた体F上で表現可能である．

［2値マトロイドの特性化］

定理5.2および定理5.4を用いると，2値マトロイドに関して次の2つの定理が得られる．

定理 5.5 マトロイドMが2値マトロイドであることと双対マトロイドM^*が2値マトロイドであることは等価である．

定理 5.6 2値マトロイドのいかなるマイナーマトロイドも2値マトロイドである．

上の定理5.6は2値マトロイドを定義づけるひとつの表現と考えることができる．

一方，2値マトロイドに属さないマトロイドが存在することも容易に確かめられる．たとえば3.1節に紹介した一様マトロイド$U_{2,4}$は最も簡単な例である．したがってグラフ的マトロイドが2値マトロイドに含まれる概念であることから考えても，2−一様マトロイド$U_{2,4}$がグラフ的でないことはもちろんである．

またこの2−一様マトロイド$U_{2,4}$が2値マトロイドを特徴づけることは，1965年にW.T. Tutte[2]によって証明された．ここではその結果のみを掲げることにする．

定理 5.7 (Tutte) 任意のマトロイドMが2値マトロイドであることとMが2−一様マトロイド$U_{2,4}$と同型

なマイナーマトロイドをもたないということは等価である．

［正則鎖群と正則マトロイド］

2値マトロイドは $GF(2)$ 上で行列表現が可能なマトロイドであると上に述べたが，この概念よりもより限定的なものとして，いかなる体の上でも表現可能なマトロイドというひとつの有用な概念がある．このようなマトロイドは正則マトロイド (regular matroid) とよばれる．

まず正則マトロイドと密接な関連を有する正則鎖群 (regular chain group) について説明しよう．整数の集合(整数環(ring of integers)あるいは $GF(2)$でもよい)を Z とする時，有限な集合 E から Z への写像 f: $E \rightarrow Z$ が Z 上への集合 E の鎖 (chain) である．ここで $f(x)$ を $x \in E$ の係数(coefficient)とすると，f の支持(support) $\|f\|$ は f の係数が0でないような E の要素の集合として次のように定義される．

$$\|f\|=\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}. \qquad (5.5)$$

また2つの鎖 f, g が与えられた時の f と g の和(sum) および $\lambda \in Z$ が与えられた時の積(product) λf を次のように定義する．

$$\begin{cases} (f+g)(x)=f(x)+g(x), & x \in E \\ (\lambda f)(x)=\lambda f(x), & x \in E \end{cases} \qquad (5.6)$$

Z 上への集合 E についての鎖群(chain group on E over Z) という場合には，上述の鎖の和，積に関して閉じているような，Z 上への E の鎖の集合を意味するものとし，これを $\mathscr{C}(E, Z)$ と記すことにする．なおこの鎖群 N において，鎖 $f \in N$ が $f \neq 0$ であってかつ $\|g\| \subsetneq \|f\|$ となるような別の鎖 g が存在しない時，f を初等鎖 (elementary chain) とよぶ．また $\|f\|=\phi$(空集合)なる鎖を零鎖(zero chain)とよび，0と記す．

以上を前提とすると，鎖群 N がマトロイドを構成することを示す次の定理が成立する．

定理 5.8 Z 上への集合 E に関する鎖群を N とする．N の鎖の支持の集合族を $\mathscr{D}(N)$ とすると，$\mathscr{D}(N)$ は集合 E 上のマトロイドの従属集合族となる．

上の定理5.8は，N の初等鎖の支持がマトロイドのサーキットであることを示すことによって得られる．

たとえば N の2つの初等鎖 f, g に対して，それらの支持をそれぞれ A, B (ただし $A \neq B$) とする．この時，要素 $e \in A \cap B$ に対して，新しい鎖 h を次のように定義する．

$$h=g(e)f-f(e)g. \qquad (5.7)$$

上の定義から明らかに $\|h\| \subseteq (A \cup B) \setminus \{e\}$ であってかつ $\|h\| \neq \phi$ である．したがってマトロイドのサーキットの公理系(C1)，(C2)が満たされるので，鎖群によってマトロイドが構成されたことになる．このようにして得られるマトロイドを鎖群 N のマトロイド(matroid of the chain group N)とよび，$M(N)$と記す．

鎖群によって構成されるマトロイドの例を掲げよう．いま $E=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Z=GF(2)$ とし，以下にある鎖 f_1, f_2, f_3 によって生成される鎖群を N とする．

	1	2	3	4	5
f_1	1	1	0	1	1
f_2	1	0	0	1	1
f_3	1	1	0	1	0
f_4	1	0	0	1	0
f_5	0	1	0	0	1
f_6	0	1	0	0	0
f_7	0	0	0	0	1
$0=f_8$	0	0	0	0	0

鎖群 N

この時 N の初等鎖は f_4, f_6, f_7 となり．これらに対応する $M(N)$のサーキットはそれぞれ $\{1,4\}$, $\{2\}$, $\{5\}$ となる．

いま鎖の写像 $f: E \rightarrow Z$ において Z が体 F である場合を考えると，鎖群のマトロイドの族がF上で表現可能なマトロイドの族と一致するということは以下のようにしてわかる．

まずVを F 上のベクトル空間として，写像 α を $\alpha: \mathscr{C}(E, F) \rightarrow V$ なる線形写像とすると，集合 E 上のマトロイドM_αは次のようにして定められる．つまりEの部分集合 $\{e_1, e_2, \cdots\cdots, e_k\}$ が M_α の独立集合であることと，ベクトルの集合 $\{\alpha(\chi_{e_1}), \alpha(\chi_{e_2}), \cdots\cdots, \alpha(\chi_{e_k})\}$ (ここで χ_{e_i} は要素 e_i に対応する係数のみが1で他は0となるような要素 e_i を標示する鎖である)がVにおいて線形独立となることとが等価であるようにする．

たとえば前述の鎖 f_1, f_2, f_3 によって生成される鎖群 N に対しては，$\{1, 3\}$ (あるいは $\{3, 4\}$) を独立集合 ($M(N)$ の基底に対応する) とすると，上に述べた写像によるベクトル空間における表現は次のように与えられる．

$$\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ \hdashline \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \end{array}$$

$M(N)$の行列表現

また逆に，ベクトル空間Vにおいてϕなる写像によって表現可能な集合 E 上のマトロイドMに対しては，線形写像 $\alpha: \mathscr{C}(E, F) \rightarrow V$ を次のように定義することができる．

$$\alpha(f)=\sum_{e\in E} f(e)\phi(e),\ f\in\mathscr{C}(E,F). \qquad (5.8)$$

このようにして $M=M_\alpha$ となることが明らかとなる．

線形写像 $\alpha:\mathscr{C}(E,F)\to V$ が与えられた時に

$N=\alpha$ の核

$$=\{f\in\mathscr{C}(E,F)\,|\,\alpha(f)=0\} \qquad (5.9)$$

によって定義される N は F 上への E についての鎖群となる．

前述の f_1, f_2, f_3 によって生成された鎖群の例において，その行列表現を用いると，(5.8)より

$$\alpha(f_1)=\phi(1)+\phi(2)+\phi(4)+\phi(5)$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\alpha(f_2)=\phi(1)+\phi(4)+\phi(5)$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\alpha(f_3)=\phi(1)+\phi(2)+\phi(4)$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

となることが確かめられる．

また集合 E の部分集合 $\{e_1, e_2, \cdots\cdots, e_k\}$ が M_α の従属集合であることは，すべてが0ではないような $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_k$ が存在して

$$y_1\alpha(\chi_{e_1})+y_2\alpha(\chi_{e_2})+\cdots\cdots+y_k\alpha(\chi_{e_k})=0$$

を満たすこと，つまり

$$y_1\chi_{e_1}+y_2\chi_{e_2}+\cdots\cdots+y_k\chi_{e_k}\in N$$

となることと等価である．したがって $X\subseteq E$ が M_α において従属集合であることと，0でない鎖 $y\in N$ が存在して $\|y\|\subseteq X$ を満たすこととは等価であるので，M_α が鎖群マトロイド $M(N)$ となる．

以上の議論から，次の定理が得られる．

定理 5.9　集合 E 上のマトロイドMが体 F 上の鎖群 N のマトロイド $M(N)$ と同型であることは，M が F 上で表現可能であることと等価である．

さて鎖群 N の要素 f の係数が ± 1 か 0 である時，鎖 f を原始鎖(primitive chain)とよぶことにする．鎖群 N のすべての初等鎖に対して同じ値域を有する原始鎖が存在する場合，鎖群Nは正則(regular)であるという．一方，マトロイドが正則(regular)であるとは，そのマトロイドが正則鎖群のマトロイドと同型である場合を意味するものとする．このようにして定義された正則マトロイドに対して，次の補題が成立する．

補題 5.10　マトロイドMは集合E上の正則マトロイドであるとする．この時，あらゆる素数 p に対して，$GF(p)$ 上への集合 E に関する鎖群 N が存在して $M=M(N)$ となる．

したがって定理 5.9 および補題5.10から次の定理が得られる．

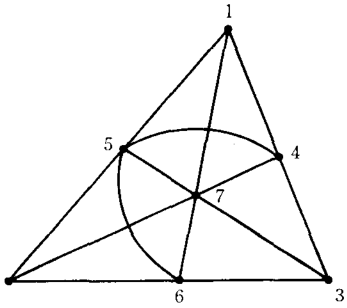

図 5.2　Fano マトロイド

定理 5.11　マトロイド M が正則であれば，M はすべての体の上で表現可能である．

［正則マトロイドと2値マトロイド］

定理 5.11 の系として，正則マトロイドと2値マトロイドの関係を示す次の結果が得られることは明らかである．

系 5.12　正則マトロイドは2値マトロイドである．

上の系5.12の逆は真ではない．つまり2値マトロイドではあるが，正則マトロイドではないマトロイドが存在する．図5.2にある Fanoマトロイド (Fano matroid) がその例である．

Fano マトロイドは図5.2にあるように頂点の集合 $E=\{1, 2, \cdots\cdots, 7\}$ 上で定義され，その基底は $\{1, 2, 5\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{3, 5, 7\}$ 以外の3要素から成る集合で与えられる．この Fano マトロイドが2値マトロイドであること，つまり $GF(2)$ 上で表現可能であることは，各要素 i, $1\leqq i\leqq 7$, に対して x_i を以下のように表わすことができることから明らかとなるであろう．

$$x_1=(1,0,0),\ x_2=(0,1,0),\ x_3=(0,0,1)$$
$$x_4=(1,0,1),\ x_5=(1,1,0),\ x_6=(0,1,1)$$
$$x_7=(1,1,1).$$

なお Fano マトロイドおよびその双対マトロイドは，標数(characteristic) 2 の体上でのみ表現可能である．したがって，これらのマトロイドは，2値マトロイドであるが，正則ではないマトロイドの例であることがわかる．

Fano マトロイドとその双対マトロイド（以下では，それぞれのマトロイドを M(Fano) および M^*(Fano) と表わす)は，次の定理 5.13 にあるように2値マトロイドを特徴づけるマトロイドであることが W. T. Tutte [3]によって証明された．証明は煩雑であるので，ここではその定理のみを掲げる．

定理 5.13　2値マトロイドが正則となるのは，それが

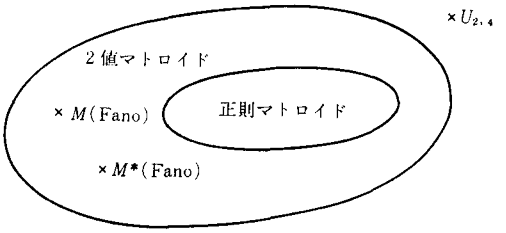

図 5.3　2値マトロイドと正則マトロイドの相互関連

M(Fano)およびM^*(Fano)をマイナーマトロイドとして含まない場合に限られる.

上の定理5.13に対して，定理5.5, 5.6を考え合わせると，以下のような系がただちに得られる.

系 5.14　正則マトロイドのマイナーマトロイドはすべて正則である.

系 5.15　正則マトロイドの双対マトロイドはやはり正則である.

マトロイドMをすべての体の上で表現可能なマトロイドとする. この時，Mは2値マトロイドであって，同時にM(Fano)もM^*(Fano)もマイナーとして含むことはできない. したがって正則鎖群のマトロイドと同型なマトロイドとして定義された正則マトロイドMは，次の定理を満たすことがわかる.

定理 5.16　マトロイドMが正則であることと，Mがすべての体の上で表現可能であることとは等価である.

この節でこれまで述べてきた2値マトロイド，正則マトロイドに関する相互の包含関係を図示すると，図5.3のように示すことができる.

参考文献

[1] D. R. Fulkerson : "Networks, Frames, Blocking Systems", *Mathematics of the Decision Sciences*, (Lectures in Applied Mathematics), *Amer. Math. Soc.*, 11, 1968, pp. 303-335

[2] W. T. Tutte : "Lectures on matroids", *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 69B, 1965, pp. 1-48

[3] W. T. Tutte : "A homotopy theorem for matroids I and II", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88, 1958, pp. 144-174

研究部会報告

政策問題

- **11月例会**：11月21日(土)　14:00～17:00

場所：三菱総研会議室(タイムライフビル)，8名
議題：財の選択行動に関する考察(情報流通分野)
講師：荻野正浩(電々公社)

情報媒体の選択という問題を数量化第Ⅲ類の手法の応用として解いた「情報媒体の代替性」，および「災害時における情報手段の選好度」─地震時の情報伝般をクロス集計表を使って検討─(56年度春季学会発表)を中心に，将来の社会情報システムをいかに予想し，このなかでの電話の役割をどう位置づけるかという問題を討議した.

- **12月例会**：12月19日(土)　14:00～17:00　16名

場所：三菱総研会議室(タイムライフビル4階)

1. ＯＡの進展状況と残された課題
藤川　博己(三井情報開発　総合研究所)

ＯＡについての社会的関心が高まっているが，欧米および日本の動向をBusiness Week等ビジネス誌より総合的に展望し今後の問題を論議した. 各企業の社風やシステムの違いが今後のＯＡの導入にいかに影響するかが討議された.

2. プラント誘致をめぐる地元の合意形成問題
高田　純直(三井情報開発　総合研究所)

地域振興開発に工場誘致を計ることとこれに反対する人々の間のトレードオフを政策科学的に分析するかのケーススタディが討議された. 問題は両者が共同の土俵の上で感情にとらわれることなく実りある討議が行なわれることが必要である. またこのための手順が検討されなければならない.

- **1月例会**：1月23日(土)　14:00～17:00　12名

場所：三菱総研会議室(タイムライフビル4階)
議題：勝田龍夫『重臣たちの昭和史』にみる意思決定プロセスの分析
報告者：湊　晋平(武田薬品)

歴史を通じての意思決定者の政策科学的分析(行動科学＋意思決定科学)を試みた. 勝田龍夫の著作をもとに，昭和史の前半を，国際・政治・経済・社会といった諸環境の条件設定をモデル化し，計測するとともに，意思決定者の性格・資質等を手記・伝記を通じ行動科学的に分析した. また選ばれた意思決定プロセスの評価を試みた.