解　説

最適制御理論の動向 (3)

坂本　実

7.　最適性の十分条件．補助定理

最大値原理に記されているような最適性の必要条件を満足することだけでは，その許容制御が実際に最適であるとは限らない．その条件は，一般に，十分条件でもあるとは限らないからである．

最適性の十分条件を与える有力な方法には，ベルマン(R. Bellman)による，よく知られたダイナミック・プログラミング(dynamic programming,[11])がある．特徴あるものに，ベルマンのこの方法，ポントリャギンの最大値原理をも導き出せる，十分条件の形で記述されるクロトフの理論がある(たとえば,[3]―第1回1月号参照)．今回は，この理論を中心に，述べることにしよう．

極値の問題の一般的設定での記述を，目的関数を，汎関数とよんで次のように書くことにしよう．

基本問題　目的関数　$J(x)\to$最小
　　　　　制約条件　$x\in C$; $x\in R^n$

補助定理1　**基本問題**の制約条件の集合Cを含む集合Dがあり，そこで，次の性質をもつ汎関数$L(x)$が定義されているとする(図1-a)．

$$L(x)\leqq J(x),\ \text{すべての}\ x\in C \tag{1}$$

(その特別な場合，$L(x)=J(x)$，図1-b)．

$L(x)$はD上で最小値lをもつ．すなわち

$$l=\min_{x\in D} L(x). \tag{2}$$

このとき

$$J(x_0)=l,\ x_0\in C \tag{3}$$

となる$x_0\in C$が存在すれば

$$J(x_0)=\min_{x\in C} J(x)=l,\ x_0\in C \tag{4}$$

である．つまり，「x_0は基本問題の最適解である」

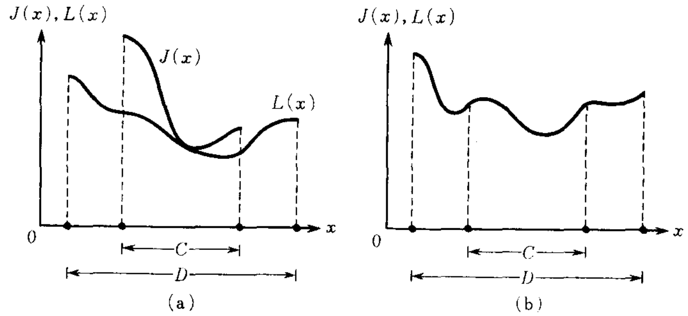

図1　目的関数の変更

証明　(2)，(1)から，すべての$x\in C$について，$l\leqq L(x)\leqq J(x)$，この両端を比較し，(3)からその間に等式を成立させる点$x_0\in C$が存在することから，(4)を得る．

この補助定理は，そこに述べた条件を満足する汎関数$L(x)$が存在することが，x_0が基本問題の最適解であるための十分条件であることを主張するものである．この定理にもとづき，次の解法を考えることができる．つまり，もとの極値の問題の制約条件をゆるくし($D\supset C$)，あるいはまったく条件なしに，もとの制約条件のもとではもとの目的関数の値よりも大きな値をとらない目的関数((1)参照)をもつ新たな問題の解($x_0\in D$を求め)，それが，もとの制約条件をも満足すること($x_0\in C$)を確かめる．

最適解の十分条件を与えるこの補助定理に対比できる形に，必要条件を与える(補助)定理を記述しておこう．

「$x_0\in C$が基本問題の最適解であれば，集合Cに含まれるある集合B($B\subset C$，これは，制約条件をもとより厳しくすることによって得られる)に対し

$$J(x_0)=\min_{x\in B} J(x)$$

でなければならない」

最適性の必要条件を与える多くの定理は，$J(x)$の定義域Cに対し，x_0の近傍をBとしてとり，線形近似を用いて証明されるものである．また，前回に述べた最適制御問題では，Bに相当するものとして，針状変分を用いた

さかもと　みのる　専修大学

ことを思い出そう(第1回，5，図1参照).

上の2つの補助定理を比較して，いずれも，もとの問題に対する，それぞれ，いわば「拡大原理」,「縮小原理」によって得られるもう1つの問題を解いているとも言えよう.

補助定理の応用として，非線形計画法の問題（それを再記しておこう．第1回参照）の適用を試み，数値例を解くことにしよう.

問題 I－3　目的関数　$f^0(x) \to$ 最小

制約条件　$f^i(x)=0,\ i=1,2,\cdots,p,$

$g^j(x) \leqq 0,\ j=1,2,\cdots,q$

$x \in R^n.$

集合Cは，制約条件の方程式，不等式系を満足するすべての $x=(x^1,\cdots,x^n) \in R^n$ の集合であることを思い出そう．補助定理に述べられている集合Dとして，Cを含む開集合，たとえば，n 次元空間全体 $X=R^n$ とする．ここで，D 上で定義された実数値関数，$\lambda_i(x), i=1,\cdots, p, \mu_j(x), j=1,\cdots,q$ を用いて，汎関数(関数) $L(x)$を次のように定義する.

$$L(x)=f^0(x)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(x)f^i(x)-\sum_{j=1}^{q}\mu_j(x)g^j(x). \quad (5)$$

さらに，この関数のD上の最小値 l が存在するとする.

定理　次の条件を満足する関数

$\lambda_i(x), i=1,2,\cdots,p\ ;\ \mu_j(x), j=1,2,\cdots,q,$ と点$x_0 \in C$ とが存在するとする．$L(x)$ は(5)で定義する.

$$\mu_j(x) \leqq 0,\ j=1,2,\cdots,p\ ;\ \text{すべての}\ x \in D \quad (6)$$

$$f^0(x_0)=l=\min_{x \in D} L(x),\ x_0 \in C \quad (7)$$

このとき，x_0 は問題1－3の最適解である.

証明　補助定理の $J(x)$は，ここでは，$f^0(x)$である．補助定理の条件(1)を $L(x)$ が満足することは，$L(x)$の定義式(5)，問題1－3の制約条件，定理の条件(6)とから明らかである．補助定理の条件(3)(と(2))は，この定理の式(7)と同じである．以上から，補助定理により，この定理の正しいことが証明される.

この定理では，$L(x)$の開集合 D 上での，いわば補助問題としての(制約条件付)最小化問題が解けていることを仮定しているので，具体問題を解くのに直接的に適用することはできない．そこで，この補助問題の，解の最適性の必要条件を用いることにする．それは，微積分でよく知られたものである(第1回フェルマの定理を参照) つまり，x_0が開集合 $D(=X)$ 上での関数 $L(x)$ の最小値を与えるための必要条件は

$$\partial L(x_0)/\partial x^k=0,\ k=1,2,\cdots,n$$

である(左辺は，関数 $L(x)$の変数 x^k による偏導関数の点 $x=x_0$ での値．今後，同様の記法を用いる)．$L(x)$ の定義式(5)から，次を得る.

$$\partial f^0(x_0)/\partial x^k-\sum_{i=1}^{p}\partial\lambda_i(x_0)/\partial x^k f^i(x_0)$$

$$-\sum_{j=1}^{q}\partial\mu_j(x_0)/\partial x^k g^j(x_0)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(x_0)\partial f^i(x_0)/\partial x^k$$

$$-\sum_{j=1}^{q}\mu_j(x_0)\partial g^j(x_0)/\partial x^k=0.$$

$x_0 \in C$, 問題 I の制約条件を満たし，$f^i(x_0)=0$だから，上式の第2項はゼロである.

第3項を調べる．$g^j(x_0)=0$ または，$g^j(x_0)<0$ である．前者が成立する j についての部分和はゼロである．後者のような j については，定理の条件(6)から $\mu_j(x_0) \leqq 0$ であるが，同じく式(7)から，$\mu_j(x_0)=0$ でなければならない．したがって，$g_j(x_0)<0$ のとき，$\mu_j(x_0)=0$ である．つまり，$\mu_j(x) \leqq 0$ は $x=x_0$ で最大値をとる．したがって，$\partial\mu_j(x_0)/\partial x^k=0\,(g_j(x_0)<0)$ であり，第3項の対応する部分和もゼロとなり，結局第3項も第2項同様ゼロとなる．ここで，数を$\lambda_i(x_0)=\lambda_i, i=1,2,\cdots,p$; $\mu_j(x_0)=\mu_j,\ j=1,2,\cdots,q$ のように表わして，次の定理を得る.

定理　x_0 が問題1－3の最適解であるための必要条件は次を満足する，$p+q$ 個の数 $\lambda_i, \mu_j, i=1,2,\cdots,p, j=1,2,\cdots,q$ が存在することである.

$$\partial f^0(x_0)/\partial x^k-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\partial f^i(x_0)/\partial x^k-\sum_{j=1}^{q}\mu_j\partial g^j(x_0)/\partial x^k=0,$$

$$\mu_j \leqq 0,\ j=1,2,\cdots,q,$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f^i(x_0)+\sum_{j=1}^{q}\mu_j g^j(x_0)=0.$$

最後の式は，定理1の条件(7)，$f^0(x_0)=L(x_0)$ を，$L(x)$の定義式(5)に代入して得られる．この定理は，よく知られたラグランジュの乗数法であって，第1回に述べたテント法によっても，当然，証明できる.

数値例をあげておこう.

問題 A　目的関数　$f^0(x^1,x^2)=(x^1)^3+(x^2)^2 \to$ 最小

制約条件　$g^1(x^1,x^2)=-(x^1+1) \leqq 0$;

$(x^1,x^2) \in R^2.$

解　D を(x^1, x^2)—平面 R^2 にとる．$\mu_1(x^1,x^2)=-(x^1)^2+5x^1/4-3/4=-\{(x^1-5/8)^2+23/64\}<0$. $L(x^1, x^2)=(x^1)^3+(x^2)^2+\mu^1(x^1,x^2)(x^1+1)=(x^2)^2+(x+1)^2/4-1$. 関数 L は，(x^1, x^2)—平面で，点 $x_0=(-1,0)$ において，大域最小値-1をとる．この点は，$-(x^1+1)=-(-1+1)=0 \leqq 0$ を満足する$(x_0 \in C)$．求める最適解

は $x_0^1=-1, x_0^2=0$ 目的関数の値は $-1(=l)$. なお，数 $\mu_1=-1-5/4-3/4=-3$.

8. 最適制御問題における十分条件．クロトフの方法

8.1 定理の導出

前回は，目的関数が $F(x(t_1))$ である，いわゆる終端制御問題における，最適解(過程，制御)の最大値原理の形式の必要条件の，テント法による証明を行なった．この問題から，問題の構成要素目的関数，境界条件を変更して得られる問題群について，対応する最大値原理の変形を行なった．結局，次の形の目的関数をもつ問題に到達した（ただし，定理の形式での，これに対応する最適値原理は記述しないで，具体例の解析を行なうにとどめた．第2回，問題B参照）．

問題 III

目的関数 $J(t_0, x_0, u(\cdot), x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + F(x(t_1))\to$最小

制約条件 (i) $\dot{x}(t)=f(x(t), u(t), t)$, $x(t)\in G(t)\subset R^n$,

(ii) $x(t_0)=x_0\in G(0), x(t_1)=x_1\in G(t_1)$,

(iii) $t_0, t_1, \cdots$固定,

(iv) $u(t)\in V(t), u(t)$；区分的に連続.

この問題の制約条件を満足する対，過程，$(u(t), x(t))$ の集合を C とし，制約条件(i)を除くすべての条件を満足する過程$(u(t), x(t))$ の集合（さらに，$x^i(t), i=1, 2, \cdots, n$ は $t=t_0, t=t_1$ で，第1種の不連続性をもつことも許す)を D で表わそう．明らかに，$D\supset C$ である．

次に，すべての $t, t_0\leqq t\leqq t_1$, $x\in G(t)$, $t_0\leqq t\leqq t_1$, に対して定義された，t, x に関する有界で，連続な偏導関数をもつ関数 $K(x,t)$を導入し，これと，問題 IIIに含まれる関数とを用いて，次の関数を作る．

$$S(x,u,t)=K_x(x,t)\cdot f(x,u,t)+K_t(x,t)+f^0(x,u,t), \quad (8)$$

$$s(x,t_1)=F(x)-K(x,t_1), \quad (9)$$

$$S_{\min}(t)=\min_{x\in G(t), u\in V(t)} S(x,u,t)\ ;$$

$$s_{\min}=\min_{x\in G(t_1)} s(x,t_1), \quad (10)$$

$$K_{0\ \min}=\min_{x\in G(t)} K(x,t_0). \quad (11)$$

ここで，$K_x(x,t)=(\partial K(x,t)/\partial x^1, \cdots, \partial K(x,t)/\partial x^n)$ であって，(8)の右辺第1項は，問題 IIIの制約条件(i)の微分方程式の右辺(n 次元ベクトル関数)との内積である．また，(10)，(11)の左辺は，最大値が存在する場合に限ったが下限(inf)にかえることもできる．これには後に，8.4で触れる．これらを準備とし，て次の定理を得る．

定理III 過程$(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\in C$ が存在するとする．これが問題 IIIの最適解であるための十分条件は，次を満足する関数 $K(x,t)$ が存在することである[(8)〜(11)参照]．

$$S(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)=S_{\min}(t), \quad (12)$$

$$s(\bar{x}(t_1), t_1)=s_{\min},\ K(\bar{x}_0, t_0)=K_{0\ \min} \quad (13)$$

証明 集合D上で定義された，次の汎関数を定義する．

$$L(x_0, u(\cdot), x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} S(x(t), u(t), t)dt + s(x(t_1), t_1)+K(x_0, t_0) \quad (14)$$

ここで，補助定理の条件，式(1)，つまり，$J=L$ が C 上で成立することが証明される．実際，$(u(t), x(t))\in C$ を満たす$x(t), u(t)$は，問題 IIIの制約条件(i)の微分方程式を満足するので，(8)式で $x=x(t)$, $u=u(t)\in C$ として，その最初の二項は $dK(x(t), t)/dt$ に等しい．このことを考慮して，(14)式の右辺を計算して次を得る．

$$\int_{t_0}^{t_1}(dK(x(t), t)/dt)dt+\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt+F(x(t_1))-K(x(t_1), t_1)+K(x_0, t_0)$$
$$=K(x(t_1), t_1)-K(x_0, t_0)+\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt+F(x(t_1))-K(x(t_1), t_1)+K(x_0, t_0)$$
$$=J(x_0, u(\cdot), x(\cdot)).$$

また，補助定理の2番目の条件である式(3)(に相当する式)が成立することは，定理IIIの条件式(12)，(13)から明らかである．こうして，定理IIIが補助定理によって証明された(ここでの証明には，(10)，(11)，(13) での min を求める範囲等について厳密でない点がある．また，ここでは，[3] でのクロトフのもとの形のままではなく，後のベルマンの方程式との比較が明瞭になるよう若干の変形を行なっている)．

定理IIIに導かれている最適性の十分条件を用いて，問題を解くためには，関数 (8)—(11) を作るための関数 $K(x, t)$ を知る必要がある．そこで，このような関数 $K(x, t)$ をどのようにして求めるか，また，この関数はどんな条件を満足するが問題になる．

定理1の条件を満足するすべての関数 $K(x, t)$ を，問題 IIIの，許容過程$(u(t), x(t))$, $t_0\leqq t\leqq t_1$ に対応する**クロトフの関数**の名でよぶことがある．ここでも，そうすることにする．さて，上の疑問に関する考察を行なおう．

ある関数 $K(x,t)$ がクロトフの関数であれば，$[t_0, t_1]$ 上の任意の区分的に連続な関数を $\alpha(t)$ とするとき，関数 $\bar{K}(x, t)=K(x,t)+\alpha(t)$ もまたクロトフの関数である．このことは，最小化の操作が x, u にのみ関して行な

われることから明らかである((8)—(11), (12), (13)参照). 特に, $\alpha(t)=-\int_{t_1}^{t} S_{\min}(\tau)d\tau-s_{\min}$ とおけば, K を $\bar{K}+\alpha$ にかえて, (8), (9) から作られる関数 $\bar{S}(x,u,t), \bar{s}(x,t_1)$ はそれぞれ, $S(x,u,t)-S_{\min}(t), \bar{s}(x,t_1)=s(x,t_1)-s_{\min}$ となる($\bar{K}_x=K_x, \bar{K}_t=K_t+\alpha'=K_t-s_{\min}(t)$, $\bar{K}(x, t_1)=K(x, t_1)-s_{\min}$ だから). したがって, $\bar{s}_{\min}(x,u,t)\equiv 0, t_0\leqq t\leqq t_1, \bar{s}_{\min}=0$, ただし, $\bar{K}_{0\,\min}=K_{0\,\min}+\alpha(t_0)$, $\alpha(t_0)=$定数, となる.

この関数 K のおきかえを考慮して, 問題 Ⅲの$(u(t), x(t))$に対応するクロトフの関数は, 定理Ⅲによって, 次の条件を満足する((12), (13); (10), (11)参照).

$$S'(x,u,t)=K_x(x,t)\cdot f(x,u,t)+K_t(x,t)+f^0(x,u,t)\geqq 0 \quad (15)$$

$$u\in V(t),\ x\in G(t),\ t_0\leqq t\leqq T$$

$$s(x,t_1)=F(x)-K(x,t_1)\geqq 0, x\in G(t);$$

$$K(x,t_0)\geqq K_{0\,\min}, x\in G(t_0) \quad (16)$$

しかも, (15), (16)式は, $u=\bar{u}(t)$, $x=\bar{x}(t)$ で等号が成立する. (厳密には, u, x の範囲は $V(t), G(t)$ ではないことに注意しよう)

問題のクロトフの関数を決定するための条件が(15), (16)であるが, これは, 微分方程式ではなく, 偏微分不等式((15))であり, $t=t_1$ での境界値条件も不等式である((16))ことが特徴的である.

定理Ⅲの適用例をあげておこう.

問題B　目的関数 $J(u(\cdot))=\int_0^1(x^2(t)-u(t))dt$ →最小

制約条件 (i) $\dot{x}(t)=u(t), x\in R^1$,

(ii) $x(0)=x(1)=0$,

(iv) $u(t)\in V(t)=\{u\in R^1\,|\,|u|\leqq 1\}, 0\leqq t\leqq 1$.

解　相座標制約条件 $x\in G(t)$ はこの問題では $G(0)=G(1)=\{0\}$, $G(t)\equiv R^1, 0<t<1$ である. 過程, $\bar{u}(t)\equiv 0$, $\bar{x}(t)\equiv 0$ は制約条件を満足する($(0,0)\in C$, 許容過程である). これが問題の最適解であることを, 定理Ⅲ を用いて示そう. クロトフ関数として, $K(x,t)\equiv x$ を選んでみる. (15), (16)を計算してみる.

$$S(x,u,t)=x^2>0=S(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t)=S_{\min}(t)$$

$$s(x,1)=-x=0=s(\bar{x}(1),1)=\min_{x\in G(1)} s(x,1)$$

$$K(x,0)=x=0=K(\bar{x}(0),0)=\min_{x\in G(0)} K(x,0)$$

したがって, 定理1により, $\bar{u}(t)\equiv 0$, $\bar{x}(t)\equiv 0$ は最適である.

8.2 ベルマンの方法との比較

比較のために, ベルマンの方法を述べることにする.

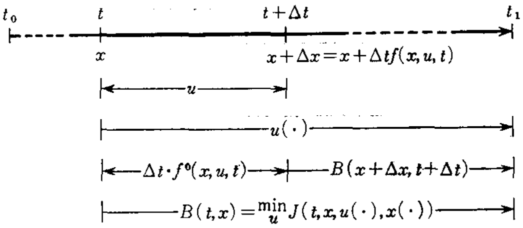

図 2　ベルマンの方程式の導出

問題 Ⅲの 時刻 t, $t_0\leqq t\leqq t_1$ に相点 $x\in G(t)$ を出発する, 制御 $u(\tau)\in V(\tau), t\leqq\tau\leqq t_1$(制約条件, (iv) 参照) に対応するトラジェクトリ $x(\tau)=x(\tau,u), t\leqq\tau\leqq t_1$ を考える(それは, 初期条件 $x(t)=x$ を満足する, 制約条件(i)の微分方程式の解である). このとき, 目的関数の積分区間を $[t,t_1]$ に変えた汎関数

$$J(t,x,u(\cdot),x(\cdot))=\int_t^{t_1} f^0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+F(x(t_1)) \quad (17)$$

を考える. いわば, 問題 Ⅲを, 初期時刻, 初期点をずらせて考察することになる. 必要な定義を行なっておく. $u(\tau)\in V(\tau), t\leqq\tau\leqq t_1$(制約条件(iv)参照) を満足し, 対応するトラジェクトリ $x(\tau)=x(\tau,u), t\leqq\tau\leqq t_1$ が区間 $[t,t_1]$ で定義され, $x(\tau)\in G(\tau), t\leqq\tau\leqq t_1$(制約条件(i)の後半参照) を満足する, 制御 $u(\tau)$ の集合を $\Delta(x,t)$で表わす. さらに, $X(t)=\{x\,|\,x\in G(t), \Delta(x,t)\neq\phi\}, t_0\leqq t\leqq t_1, X(t_1)=G(t_1)$ とおく. $X(t)$ は, そこから時刻 t に出発して, 制約条件を満足する制御を用いることによって, 時刻 t_1 までの制約条件を満足するトラジェクトリが定まりうる点 x(状態) の集合である. 次の関数は, 問題 Ⅲに対するベルマンの関数とよばれるものである[11].

$$B(x,t)=\min_{\Delta(x,t)} J(t,x,u(\cdot)) \quad (18)$$

これは, 問題 Ⅲの, いわば, 部分最適値である. (問題の目的関数と(18) の右辺 min 記号下の式(17) と比較されたい. なお, (18) の左下の min は inf にかえることができる. 以下同様)

時間区間 $[t,t+\Delta t]$ に, 制御 u を用いるとすれば, 時刻 t に x にある相点は, そこでの相速度が制約条件 (i) により, $f(t, x, u)$ であることから, 時刻 $t+\Delta t$ には, $x+\Delta t\cdot f(t,x,u)$に移動する. この間での目的関数の値の変化は, $\int_t^{t+\Delta t} f^0(x,u,t)dt\fallingdotseq\Delta t\cdot f^0(x,u,t)$ である. したがって

$$B(x,t)=\min_{u\in D(x,t)}\{B(x+\Delta t\cdot f(x,u,t), t+\Delta t)+\Delta t\cdot f^0(x,u,t)\}, \quad (19)$$

$$x\in X(t), t_0\leqq t<t_1,$$

$$B(x,t_1)=F(x), x\in X(t_1)=G(t_1). \quad (20)$$

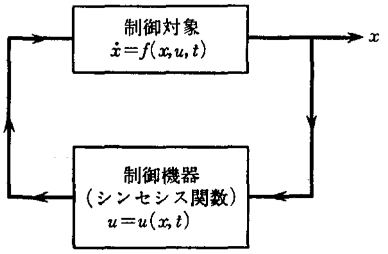

図 3 最適制御のシンセシス

ここで，$D(x,t)$ は，$u(t)=u(t+0)=u$ である少なくとも 1 つの制御 $u(\cdot)\in\Delta(x,t)$ が存在するような点 $u\in V(t)$ (時刻 t における制御の値)の集合である．式(19)の導出については，図 2 を参照．

Δt が十分小さいとき，(19) の min 記号下の第 1 項は，近似的に次のように書ける．これを(19)に代入する．

$$B(x+\Delta tf(x,u,t),t+\Delta t)\fallingdotseq B(x,t)+B_x(x,t)\cdot f(x,u,t)\Delta t+B_t(x,t)\Delta t$$

さらに，$B(x,t)$ は u に無関係であるので，代入された式で，min 記号をこえて，左辺に移項できることを考慮してこの変形を行ない Δt で除して，次を得る．

$$\min_{u\in D(x,t)}\{B_x(x,t)\cdot f(x,u,t)+B_t(x,t)+f^0(x,u,t)\}=0 \quad (21)$$

$$x\in X(t),t_0\leqq t<t_1,$$

$$B(x,t_1)=F(x),x\in X(t_1)=G(t_1). \quad (20)$$

((20)は，再記しておく)．

式(21)は，$B(x,t)$に関する偏微分方程式であり，しかも左辺に min 記号をともなっている．(20) は，その境界条件である．

(21)式の min を達成する関数 $u=u(x,t)$ は，その構成の仕方から，問題 Ⅲのトラジェクトリが，時刻 t に x を通るとする，すなわち，$x(t)=x$ とする条件のもとで，この問題の最適制御の値を与えるものであることがわかる(特に，(18)参照，厳密に証明できる)．このような関数は「シンセシス関数」(synthesis function)とよばれている．

シンセシス関数を決定することは，最適制御の実際的問題に対し，きわめて重要な意味をもつ．実際，シンセシス関数 $u(x,t)$ がわかれば，過程を最適に進展されることは次のいわゆる**フィード・バック方式**(feed back)によって実現可能となる．すなわち，各時刻 t に，状態 $x(t)$ を計測し，それを電子計算機か何かの計算装置の入力として送り，制御 $u(t)=u(x(t),t)$ の値を計算し，求めた最適制御の値 $u(t)$ を，制御過程の要求される進展を直接実現させる制御機器に送ればよい(図 3 参照)．

シンセシス関数を求めることによって，問題 Ⅲを解くためのベルマンの方法は上で見たように，問題(21)，(20)を解いて，ベルマンの関数 $B(x,t)$ を求め，さらに，(21)の min を達成する $u=u(x,t)$ を求めなければならない．$B(x,t)$を求めるための方法に，それを，変数 x^1, $x^2,\cdots,x^n$ の，係数が t の関数である多項式の形に求める方法がある．

このとき，問題(21)，(20)に含まれている集合 $X(t)$, $D(x,t)$ を決定するのが困難であるのが普通である．このときには，これらをそれぞれ，$G(t)$, $V(t)$ に代えて，この問題を解くことになる．

この方法によって，具体的な例を解こう．

問題C 目的関数 $J(u)=\int_0^{t_1}u^2(t)dt+\lambda x^2(T)\to$最小 $\lambda=$定数．

制約条件 (i) $\dot{x}(t)=u(t)$, $x\in G(t)\equiv R^1$

(ii) $x(0)=x_0\cdots$固定

(iii) $t_1\cdots$固定

(iv) $u\in V(t)\equiv R^1$

解 問題(21)，(20)はいまの場合($D(x,t)$を $V(t)$, $X(t)$ を $G(t)$ でおきかえて)次の形となる．

$$\min_{u\in R^1}\{B_x(x,t)u+B_t(x,t)+u^2\}=0,x\in R^1,0\leqq t\leqq t_1, \quad (22)$$

$$B(x,t_1)=\lambda x^2,x\in R^1. \quad (23)$$

(22) は u に関する 2 次式の最小値を求めることであって，$u=-B_x(x,t)/2$ で，最小値が達せられる．したがって(22)は，次のように書き改められる．

$$B_t(x,t)-B_x{}^2(x,t)/4=0,x\in R^1,0<t<t_1. \quad (24)$$

関数 $B(x,t)$ を x の多項式の形に求める．

$$B(x,t)=\Psi_0(t)+\Psi_1(t)x+\Psi_2(t)x^2. \quad (25)$$

この式を(23)，(24)に代入して，次を得る．

$$\dot{\Psi}_0+\dot{\Psi}_1x+\dot{\Psi}_2x^2-(\Psi_1+2\Psi_2x)^2/4=0,x\in R^1,0\leqq t\leqq t_1.$$

$$\Psi_0(t_1)+\Psi_1(t_1)x+\Psi_2(t_1)x^2=\lambda x^2,x\in R^1.$$

これらの式の，x の同じ巾の係数を辺々で等しいとおき，

$$\dot{\Psi}_0-\Psi_1{}^2/4=0,\dot{\Psi}_1-\Psi_1\Psi_2=0,\dot{\Psi}_2-\Psi_2{}^2=0,0\leqq t\leqq t_1,$$

$$\Psi_0(t_1)=0,\Psi_1(t_1)=0,\Psi_2(t_1)=\lambda$$

を得る．これから，次を得る．

$$\Psi_0(t)\equiv\Psi_1(t)\equiv0,\Psi_2(t)=\lambda/(1-\lambda(t-t_1)).$$

こうして，ベルマンの関数は，この場合，次である．

$$B(x,t)=\lambda x^2/(1-\lambda(t-t_1))$$

シンセシス関数は，次で与えられる．

$$u(x,t)=-B_x/2=\lambda x/(1-\lambda(t-t_1)),x\in R^1,\ 0\leqq t\leqq t_1.$$

ここで，クロトフの方法とベルマンの方法との(問題 Ⅲの解法を通しての)比較をしておこう．

クロトフの関数 $K(x,t)$ を決定するための式(15)，(16)

(そこでの集合 $V(t), G(t)$ は，すでに述べたように，厳密には，その後に定義した集合 $D(x,t)$, $X(t)$ にそれぞれおきかえるべきである)と，ベルマンの関数 $B(x,t)$ を決定するための式(21)，(20)とを比較して，ベルマンの関数はいつでもクロトフの関数であることになる．クロトフの関数は，より一般的な条件から決定されるのであるから，それは，ベルマンの関数が存在しない場合にも，存在することがありうる．この意味で，クロトフの方法が，ベルマンの方法よりも，一般的であると言える．

8.3 ポントリャーギンの最大値原理型の定理の導出

クロトフによる定理IIIから，ポントリャーギンの最大値原理の形式の定理を導びこう．(クロトフの考えによるが，符号等若干の変更がある) ここで，記述を簡単にするために，問題 IIIに，さらに，若干の追加条件を課すことにする．つまり，集合 $G(t)$ は開集合であり，点 x_0, x_1 は固定されているものとする．このとき，関数 $F(x(t_1))$ は定数となる．このようにして定まる問題を問題 III′ として記述しておこう．

問題 III′ 目的関数 $J(u(\cdot),\ x(\cdot))$

$$=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t),t)\,dt\to 最小,$$

制約条件 (i) $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t)$, $x\in G(t)$；開集合

(ii) $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$ …固定

(iii) t_0, t_1…固定

(iv) $u(t)\in V(t)$, $u(t)$；区分的に連続.

問題のこのような変形に対応して，対応する定理IIIでの式(13)が不要になる．つまり，(8)に定義される関数 $S(x,u,t)$ だけに関係することになる．

集合 $G(t)$ がすべての $t, t_0\leqq t\leqq t_1$ で開集合であることから，条件(12)が成立するための必要条件は，(8)，(10)を考慮して，次のようになる．そのひとつは，関数 S の各 $x^k, k=1,2,\cdots,n$ の偏導関数が $\bar{x}=\bar{x}(t)$, $\bar{u}=\bar{u}(t)$ でゼロになることである．これをベクトル表示で，次のように表わそう．

$$S_x(\bar{x},\bar{u},t)=0 \tag{26}$$

関数 S の項のうち，$K_t(x,t)$ は u に依存しないことから((8)参照)

$$K_x(\bar{x},t)\cdot f(\bar{x},\bar{u},t)+f^0(\bar{x},\bar{u},t)$$
$$=\min_{u\in V(t)}\{K_x(\bar{x},t)\cdot f(\bar{x},u,t)+f^0(\bar{x},u,t)\} \tag{27}$$

と書ける．これらの条件を，さらにわかりやすい形に書き改めることにする．そのために次の関数を導入する．

$$\Psi(t)=-K_x(\bar{x}(t),t) \tag{28}$$

ここに定義されたベクトル関数の成分を $\Psi_i(t)$, $i=1,2,\cdots,n$ とする．すなわち，$\Psi_i(t)\equiv-\partial K(\bar{x}(t),\ t)/\partial x^i$ である．

次に，これを用いて，(27)の min 記号下の関数の符号をかえたものに対応させて，関数 $H(x,u,t)$ を導入する．

$$H(x,u,t)=\Psi(t)\cdot f(x,u,t)-f^0(x,u,t) \tag{29}$$

いずれの関数の独立変数も省略して，次の関係を得る．

$$S=K_x\cdot f+K_t+f^0=K_x\cdot f+K_t+\Psi\cdot f-H,$$
$$S_x=K_{xx}\cdot f+K_x\cdot f_x+K_{tx}+\Psi\cdot f_x-H_x.$$

問題 III′ のトラジェクトリ上では，$\dot{x}=f$ であることから

$$S_x=-d\Psi(t)/dt-H_x$$

を得る．また，(27)式での最小化は H 関数の最大化にかわる．これらのことを考慮して，(26)，(27)は，次のように書き改められる．

$$d\Psi_i(t)/dt=-\partial H(\bar{x},\bar{u},t)/\partial x^i,\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{30}$$
$$H(\bar{x}(t),\bar{u},t)=\max_{u\in V(t)} H(\bar{x}(t),u,t). \tag{31}$$

こうして，ポントリャーギンの最大値原理の形での最適性の必要条件を得た．(第2回の問題 IIおよびそれに対応する定理IIとを比較されたい．問題 III′とでは，トラジェクトリに対する境界条件などの点の違いがある．なお，そこでの数 Ψ_0 は定数，ここでは，-1 となっている．このことは，(29)と第2回の(21)とを比較することによってわかる．)

関数 $K(x,t)$ は，上述の条件を満足するトラジェクトリ上の t, x 以外ではまったく任意である．もし，$\bar{u}(t)$, $\bar{x}(t)$ で，必要条件(30)，(31)を満足するだけでなく，各固定時刻 $t, t_0\leqq t\leqq t_1$ で，関数 $S(x,u,t)$ の最小のための十分条件をも満足する関数 $K(x,t)$ が存在すれば，定理2によって，$(\bar{u}(t),\ \bar{x}(t))$ は，目的関数の大域的最小値を与える．このことを定理の形に記述しておこう．

定理 過程 $(\bar{u}(t),\ \bar{x}(t))$ が，問題 III′ の大域最適解(過程)であるための十分条件は，つぎを満足する関数 $K(x,t)$ が存在することである．

1) $\bar{u}(t), \bar{x}(t), \Psi(t)$ は，制約条件(i)の方程式および方程式(30)，(31)を満足する．

2) $K_x(\bar{x},t)=-\Psi(t)$,

3) $S(\bar{x},\bar{u},t)=\min\limits_{x\in G(t),u\in V(t)} S(x,u,t), t_0\leqq t\leqq t_1$.

この定理にもとづく，問題の解法は，常微分方程式系(30)，(31)の境界値問題を解くことと，定理の条件を満足する関数 $K(x,t)$ を選ぶこと，より正確には，そのような関数が存在することを証明することである．後のことは本質的なことであって，前に見たベルマンの形式で

は関数 $B(x,t)\,(K(x,t))$ を具体的に求めなければならなかったが，ポントリャーギンのこの形式では，その存在を示すだけでよいことを意味している．

8.4 ある種の拡張

クロトフの方法の基礎となる補助定理，それをある型の問題に適用して得られたそれぞれの定理では，関係する関数，汎関数の最小値を達成する要素(点，制御)の存在を仮定して，記述されていた．それらが存在しない場合にも，これらの定理を拡張できる．それを行なおう．

そのために必要な若干の復習を行なっておく．汎関数についても同様にあてはまる関数についての必要な概念を述べておく．

実数直線を $R^1=\{u\,|-\infty<u<+\infty\}$ とし，R^1 のある集合を V とし，$J(u)$ を集合 V 上で定義された関数とする．

すべての $u\in V$ に対して $J(u_*)\leqq J(u)$ のとき，u_* を関数 $J(u)$ の集合 V 上の最小点といった．このような点 u_* が集合 V にない場合にはこの最小点の概念の自然な拡張が，関数の下限である．

すべての，$u\in V$ に対して，$J(u)\geqq M$ となる数 M が存在する，つまり定義として，関数 $J(u)$ が V で下向に有界であるとする．このとき，次を満足する数 J_* を関数 $J(u)$ の V 上での下限(infimum) という．1)すべての $u\in V$ に対し，$J_*\leqq J(u)$, 2)いかに小さな $\varepsilon>0$ に対しても，$J(u_\varepsilon)<J_*+\varepsilon$ となる $u_\varepsilon\in V$ が存在する．もし，関数 $J(u)$ が V 上で下方に有界でないならば，V 上の $J(u)$ の下限として，$J_*=-\infty$ をとる．この J_* を記号 $\inf_{u\in V} J(u)=J_*$ で表わす．

$\lim_{k\to\infty} J(u_k)=\inf_{u\in V} J(u)=J_*$ となる，列 $\{u_k\}\in V$ を関数 $J(u)$ の V 上の最小列 (minimizing sequence) という．

最小化列は下限の定義とその存在性から常に存在する．最小列を求めることは，最小点 u_* が存在するときには，列 $u_k=u_*$, $k=1,2,\cdots$ を求める結果となる．つまり，最小値(点)を求める問題は，最小列を求める問題に含まれることになる．こうして，基本問題の拡張として，次の問題と考えよう．

<u>問題(最小列)</u>　目的関数 $J(x_k)\to J_*=\inf_{x\in C} J(x)$, $\{x_k\}$?

制約条件，$x_k\in C$, $x_k\in R^n$, $k=1,2,\cdots$.

補助定理 2　$J(x)\geqq l$, すべての $x\in C$ とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} J(x_n)=l$ となる列 $\{x_k\}\subset C$ が存在すれば，$l=J_*=\inf_{x\in C} J(x)$, つまり，列 $\{x_k\}$ は最小列である．また，任意の最小列 $\{x_n\}\subset C$ についても，$J(x_n)\to l$ である．

証明　下限の定義から，$l\leqq J_*$ である．定理の主張に反して，$l<J_*$ としよう．このとき，$J(x_n)\to l<J_*(n\to\infty)$ だから，ある $\delta(0<\delta\leqq J_*-l)$ に対し，十分大きな n に対して，$J(x_n)\leqq J_*-\delta<J_*$ となる $x_n\in C$ が存在することになる．これは，下限 J_* の定義(条件1))に反する．また，任意の最小列 $\{x_n\}$ に対し，$J(x_n)\to J_*=l(n\to\infty)$ である．補助定理 1 に対応して，次が成立する．

補助定理 3　集合 C を含む集合 $D(C\subset D)$ があって，そこに，次を満足する汎関数 $L(x)$ が定義されているとする．

$$L(x)\leqq J(x),\ \text{すべての } x\in C \tag{1}$$

このとき，不等式

$$J(x)\geqq k\equiv\inf_{x\in D} L(x) \tag{32}$$

が成立し，さらに列 $\{x_n\}\subset C$ が存在して

$$J(x_n)\to k(n\to\infty),\ \{x_n\}\subset C$$

であれば，

$$k=J_*\equiv\inf_{x\in D} J(x) \tag{33}$$

が成立する．つまり，列 $\{x_n\}$ は，汎関数 $J(x)$ の最小列である．また，汎関数 $J(x)$ の C での任意の最小列は，汎関数 L の D での最小列である．

証明　$D\supset C$ だから，$k\equiv\inf_{x\in D} L(x)\leqq\inf_{x\in C} L(x)$．(1)によって，$\inf_{x\in C} L(x)\leqq\inf_{x\in C} J(x)\equiv J_*$．したがって，$J(x)\geqq J_*\geqq k$ であり，(32)を得る．(32)が成立するとき，補定理 2 で l として，この k を選んで，$k=J_*$, (33)を得る．$J(x_n)\to J_*=k, n\to\infty$ ($\{x_n\}$ が C での最小列) のとき，(1)から，$k\leqq L(x_n)\leqq J(x_n)\to J_*$, したがって，$L(x_n)\to J_*(n\to\infty)$, $\{x_n\}\subset C\subset D$.

補助定理 3 をもとにして，定理Ⅲに対応する次の定理が証明される(証明は，ここでは行なわない)．

定理Ⅳ　列 $\{(u_m(t),x_m(t))\}, t_0\leqq t\leqq t_1, x_m(t_0)=x_{0m}$, $m=1,2,\cdots$ が<u>問題　Ⅲ</u>の制約条件を満足する(集合 C の列) とする．この列が，<u>問題　Ⅲ</u>の最小列(最適解)であるための十分条件は，次を満足する関数 $K(x,t)$ が存在することである．関数(8)—(11)に対し

$$\lim_{m\to\infty}\int_{t_0}^{t_1} S(x_m(t),u_m(t),t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1} S_{\min}(t)\,dt,$$

$$\lim_{m\to\infty} s(x_m(t_1),t_1)=S_{\min},\ \lim_{m\to\infty} K(x_{0\,m},t_0)=K_{0\,\min}$$

この定理の適用例をあげておこう．

<u>問題D</u>　目的関数　$J(u(\cdot),x(\cdot))$

$$=\int_0^1 (x^2(t)-u^2(t))\,dt\to\text{最小},$$

制約条件　(i)　$\dot{x}(t)=u(t), x\in G(t)=R^1$,

(ii)　$x(0)=0$,

(iv)　$u(t)\in V(t)$

$=\{u\in R^1, |u|\leqq 1\}, 0\leqq t\leqq 1$.

解 $G(t)$は，$G(0)=\{0\}, G(t)\equiv R^1, 0<t\leqq 1$ となる集合．関数の対の列$(u_m(\cdot), x_m(\cdot))$を次のように選ぶ．

$$u_m(t)=\begin{cases}+1\ ; & p/m<t\leqq p/m+1/2m\\ -1\ ; & p/m+1/2m<t\leqq p/m+1/m,\end{cases}$$

$$x_m(t)=\begin{cases}t-p/m\ ; & p/m<t\leqq p/m+1/2m\\ -t+(p+1)/m\ ; & p/m+1/2m<t\leqq p/m+1/m,\end{cases}$$

ただし，$p=0,1,2,\cdots m-1, m=1,2,\cdots$.

対$(u_m(\cdot), x_m(\cdot))$が，すべての$m=1,2,\cdots$に対し，問題の許容対である(制約条件を満足すること)は容易に確かめられる．これらの列が，最小列であることを示そう．そのために，関数$K(x,t)=t-1$を選ぼう．このとき

$$S(x,u,t)=x^2+1-u^2\geqq 0=\min_{x\in R^1}\min_{|u|\leqq 1} S(x,u,t)$$
$$=\lim_{m\to\infty} S(x_m(t), u_m(t), t)$$

$$s(x,1)=-K(x,1)\equiv 0=\inf_{x\in R^1} K(x,1)$$
$$=\lim_{m\to\infty} s(x_m(1),1),$$

$$K(x,0)=-1=\inf_{x\in G(0)} K(x,0)=\lim_{m\to\infty} K(x_m(0),0).$$

定理IVにしたがって，列$(u_m(\cdot), x_m(\cdot))$は最小列である．このとき，$\lim_{m\to\infty} J(u_m(\cdot))=-1=J_*$ である．

この例では，$\inf J(u)=-1$は，どんな許容対$(u(t), x(t))$上でも達成されない．実際，$x^2(t)\equiv 0$であれば，方程式は$\dot{x}=u(t)\equiv 0$となり，$J(0)=0>-1$，である．$x^2(t)\not\equiv 0$であれば$J(u)>-\int_0^1 u^2(t)dt\geqq -1$である．したがって，どんな許容制御，許容トラジェクトリに対しても，$J(u(\cdot))\geqq -1$である．このような場合は実際問題に多く現われるが，これを制御理論では，スライディング・レジーム (sliding regime) とよんで研究されている(たとえば [3])．

今回は，例等について [12] も参照した．

文　献

[11] ベルマン著，小田中 他 訳：ダイナミック・プログラミング，東京図書，1973(原書 1957)．

*[12] バシレエフ(F. P. Vasilyev)：極値問題の数値解法，ナウカ，1980.