マトロイド理論の基礎（7）

大山 達雄

有限個の要素から成る集合の任意の部分集合に実数を対応づける関数が劣モデュラー性を有するということは，マトロイドの階数関数あるいは派生マトロイドを中心として，マトロイド理論と密接な関連を有している．4.3節では，束とマトロイドの関連の紹介を含めて，劣モデュラー関数とマトロイドとの関連についてのべる．また4.4節では，2つ以上のマトロイドの合併あるいは交叉といった操作によって得られるマトロイドについてのべる．

4.3 劣モデュラー関数

有限集合 E の部分集合 $A\subseteq E$, $B\subseteq E$ に対して，関数 $\mu: 2^E\to R$ が以下の関係を満足する時，関数 μ を劣モデュラー関数（submodular function）とよぶことは2.2節にのべた．

$$\mu(A)+\mu(B)\geqq\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B). \tag{4.24}$$

マトロイドの階数関数が劣モデュラー性を有するということを中心として，マトロイド理論は劣モデュラー関数の理論とも密接に関連している．この節では，このような劣モデュラー関数によって派生（induce）されるマトロイドを紹介しよう．なおここで紹介するマトロイドは，次節以降にのべるマトロイドの合併と交叉あるいはマトロイドの分割と被覆等に関する議論のところでも再度現われる有用なものである．

［束構造とマトロイド］

まず束（lattice）という数学的構造について簡単に紹介しよう．ある集合 L において順序（order）$\leqq$ が定義されている時，L は $\leqq$ によって順序づけられていると言う．集合 L と順序 $\leqq$ を合わせて順序集合（ordered set）とよび，特に L の部分集合に対して順序が定義されている時には部分順序集合（partially ordered set）とよぶことにする．なお順序集合における順序 $\leqq$ は，集合 L の任意の要素 x, y, z に対して以下のような反射律，推移律，反対称律を満たすとする．

反射律　：任意の x に対して，$x\leqq x$.

推移律　：$x\leqq y$, $y\leqq z$ ならば，$x\leqq z$.

反対称律：$x\leqq y$, $y\leqq x$ ならば，$x=y$.

なお任意の要素 $x\in L$, $y\in L$ に対して $x\leqq y$ であってかつ $x\neq y$ の時，$x<y$ と表わす．

順序集合 L の各要素を平面上の点で表わし，$x<y$ ならば x を表わす点の上方に y を表わす点を置き，しかも $x<z$ かつ $z<y$ なる要素 $z\in L$ が存在しない時には点 x と点 y とを線分で結ぶことにする．このようにして順序集合を図式化したものを Hasse の図式（Hasse diagram）とよぶ．6つの要素から成る集合 $L=\{0, x, y, z, v, w\}$ 上の順序集合を Hasse の図式を用いて表わした例が図4.14（A）に示してある．

順序集合 L の任意の2つの要素 x, y に対して，L の部分集合 $\{z\mid x\leqq z,\ y\leqq z\}$ が唯一の最小な要素を有する時，この要素を $x\vee y$ と表わし，x と y の最小上界（least upper bound あるいは和（join））とよぶ．また同様に L の部分集合 $\{z|z\leqq x,\ z\leqq y\}$ が唯一の最大な要素を有する時，この要素を $x\wedge y$ と表わし，x と y の最大下界（greatest lower bound あるいは積（meet））と

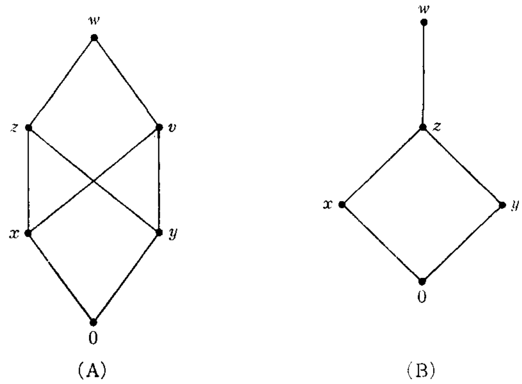

図 4.14 Hasse の図式

おおやま たつお 埼玉大学

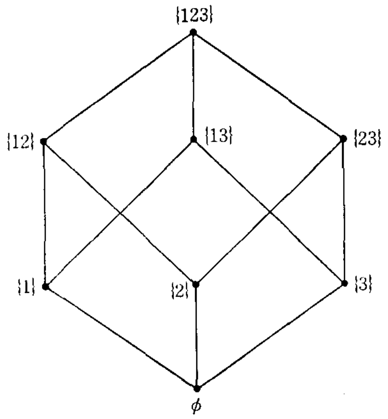

図 4.15 3要素から成る自由マトロイドに対応する束構造

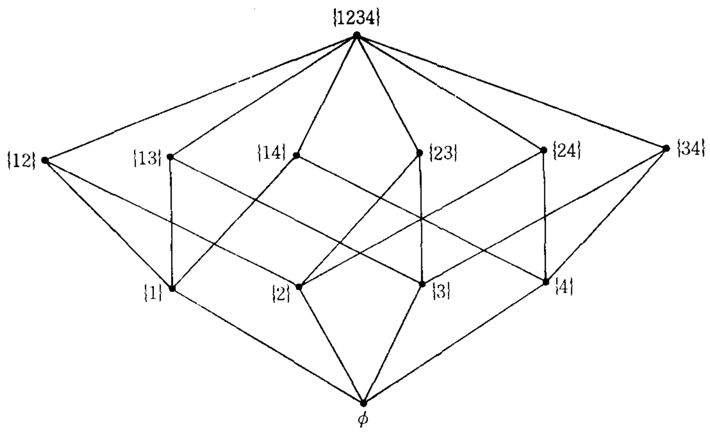

図 4.16 $U_{3,4}$ に対応する束構造

よぶ．集合 L がその任意の2つの要素 x, y に対して最小上界および最大下界を有する時，L を束 (lattice) とよぶ．

たとえば図4.14の例(B)は束であるが，(A)は束ではない．このことは(A)，(B)のそれぞれにおける2つの要素の最小上界の唯一性の差からただちに理解されるであろう．

マトロイド M と束 L の関連を示す例を掲げよう．いまマトロイド M が与えられたとすると，マトロイドの閉じた集合あるいはフラット(2.3節参照)を要素とするような部分順序集合 $L(M)$ が存在する．M のそれぞれの要素集合にそれに含まれない別の要素を加えると階数が増加するような集合に対して，その包含関係によって順序づけを定義すると，マトロイド M と束 $L(M)$ との対応関係が得られる．

たとえば図4.15は集合 $E=\{1, 2, 3\}$ 上のすべての部分集合を独立集合とする自由マトロイド（または離散マトロイド)に対応する束を表わしている．また図4.16は集合 $E=\{1, 2, 3, 4\}$ 上の3-一様マトロイド $U_{3,4}$ に対応する束を表わしたものである．

図4.15，図4.16のいずれの例からもわかるように，束構造の最下段にある ϕ が階数0，その最小上界に対応する要素集合がマトロイドにおいて階数1となっている．マトロイド M に対応する束 $L(M)$ の要素 X, Y に対して，その和 $X\vee Y$ と積 $X\wedge Y$ をとると，それぞれは

$$X\vee Y=\cap\{z|z\supseteq X\cup Y,\ z\in L\}$$
$$X\wedge Y=X\cap Y$$

で与えられることがわかる．

[劣モデュラー関数とマトロイド]

集合 E の部分集合に関して，包含関係によって順序づけられた束 L が定義されているとする．さらに束 L は，要素として ϕ (空集合)，E を含みかつ積 (intersection) 演算に関して閉じているとする．したがって E の部分集合である要素 $A\in L$, $B\in L$ に対して

$$A\wedge B=A\cap B,\quad A\vee B\supseteq A\cup B$$

が成立する．この時，L 上の関数 $\mu: L\to R$ が劣モデュラーであるとは，任意の要素 $A\in L$, $B\in L$ に対して次の関係が成立することである．

$$\mu(A)+\mu(B)\geqq\mu(A\vee B)+\mu(A\wedge B). \qquad (4.25)$$

束 L と劣モデュラー関数 μ を用いて，集合 E の部分集合族を次のように定義する．

$$\mathscr{I}(L;\mu)=\{X|X\subseteq E,\ \mu(C)\geqq|X\cap C|,\ \forall C\in L\}. \qquad (4.26)$$

上のような集合族を独立集合族とするマトロイドが，次の定理のようにして得られる．

定理 4.13 劣モデュラー関数 μ は $\mu(\phi)=0$ を満たす非負整数値関数とする．この時，(4.26)のように定義される $\mathscr{I}(L;\mu)$ は E 上のマトロイドの独立集合族となり，そのマトロイドの階数関数 r は次式のように与えられる．

$$r(X)=\inf_{C\in L}\{\mu(C)+|X\backslash C|\}. \qquad (4.27)$$

定理4.13にあるような束 L と劣モデュラー関数 μ とによって派生 (induce) されるマトロイドを $M(L, \mu)$ と表わす．定理4.13の証明は，(4.27)で与えられる関数がマトロイドの階数関数の満たすべき公理系 ($R1$)，($R2$)，($R3$) を満足していることを示し，さらには $r(X)=|X|$ を満たす部分集合 $X\subseteq E$ が r を階数関数とするマトロイドの独立集合であることを用いて，そのような独立集合族が(4.26)の形に表わされることを示すことによって得られる．

証明 まず(4.27)で与えられる関数 $r(X)$ がマトロイド

の階数関数の公理系 ($R1$), ($R2$), ($R3$) を満たすことを示そう. $r(X) \leqq \mu(\phi)+|X|=|X|$などから($R1$), ($R2$)は明らかであろう.

($R3$) は以下のようにして示すことができる. なおここで A, B, C_1, C_2 はすべて集合 E の部分集合とする.

$$
\begin{aligned}
r(A)+r(B)&=\inf_{C_1,C_2\in L}\{\mu(C_1)+|A\backslash C_1|+\mu(C_2)\\
&\qquad +|B\backslash C_2|\}\\
&\geqq \inf_{C_1,C_2\in L}\{\mu(C_1\vee C_2)+\mu(C_1\wedge C_2)+\\
&\qquad |(A\cup B)\backslash(C_1\vee C_2)|+|A\cap B)\backslash(C_1\cap C_2)|\}\\
&\geqq \inf_{C_1,C_2\in L}\{\mu(C_1\vee C_2)+\mu(C_1\wedge C_2)+\\
&\qquad |(A\cup B)\backslash(C_1\vee C_2)|+|(A\cap B)\backslash(C_1\wedge C_2)|\}\\
&=r(A\cup B)+r(A\cap B).
\end{aligned}
$$

このようにして関数 r が劣モデュラーであることが示される.

また (4.26) で与えられる集合族 $\mathscr{I}(L;\mu)$ を考えると, この集合族がマトロイド $M(L,\mu)$ の独立集合族であることが以下のようにしてわかる.

$$
\begin{aligned}
X\in\mathscr{I}(L;\mu) &\Leftrightarrow \mu(C)\geqq|X\cap C|,\quad \forall C\in L\\
&\Leftrightarrow \mu(C)+|X\backslash C|\geqq|X|,\quad \forall C\in L\\
&\Leftrightarrow r(X)\geqq|X|\\
&\Leftrightarrow r(X)=|X|.
\end{aligned}
$$

(($R1$)より $r(X)\leqq|X|$であることを利用). ⊠

上の定理 4.13 から, 束 L の要素として E のすべての部分集合が考えられる場合には, 次の系が得られる.

系 4.14 非減少な劣モデュラー関数 $\mu: 2^E\to Z^+$ が $\mu(\phi)=0$ を満たしているとする. この時, 集合 E 上のマトロイド $M(L,\mu)$ の独立集合族 $\mathscr{I}(L;\mu)$ は次式で与えられる.

$$\mathscr{I}(L;\mu)=\{X|X\subseteq E,\ \mu(C)\geqq|C|,\ \forall C\subseteq X\} \tag{4.28}$$

また $M(L,\mu)$ の階数関数 r は次のようになる.

$$r(X)=\inf_{C\subseteq X}\{\mu(C)+|X\backslash C|\},\ X\subseteq E. \tag{4.29}$$

定理 4.13 および系 4.14 を用いて定義されるマトロイドを考えてみよう. 有限の添字集合を I として, 集合 E の部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_i,\ i\in I\}$ が与えられているとする. E 上のマトロイド M の階数関数を r とし, 関数 μ: $2^I\to Z^+$ を次のように定義する.

$$\mu(J)=r(S(J)),\ J\subseteq I. \tag{4.30}$$

上の関数 μ が $\mu(\phi)=0$ であるような非減少劣モデュラー関数であること, つまり系 4.14 における関数 μ の条件を満足することは容易に確かめられる. したがって次式で与えられる集合族は, 集合 I 上で定義されたマトロイドの独立集合族であることがわかる.

$$\mathscr{I}=\{J|r(S(K))\geqq|K|,\ \forall K\subseteq J\}. \tag{4.31}$$

上のように定義されるマトロイドは, 3.4 節の最後にのべた横断マトロイドのもうひとつの形と密接な関連を有している. つまり部分集合族 $\mathscr{S}$ の添字集合 I に対して, 部分集合 $J\subseteq I$ に対応する部分集合族 $\mathscr{S}_J=\{S_i,\ i\in J\}$ が横断を有する場合に J を独立集合と定義することによって得られるマトロイドは, 上に定義されたマトロイドのひとつの特殊な形であると言うことができる (3.4 節の定理 3.6 (Rado) 参照). したがって (4.31) で定義される独立集合族は, I の部分集合 $J\subseteq I$ のうちで部分集合族 $\{S_i,\ i\in J\}$ がマトロイド M において独立であるような横断を有するものの集合族となる. 以上の議論は次のようにまとめられる.

定理 4.15 有限の添字集合を I として, 集合 E の部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_i, i\in I\}$ と E 上のマトロイド M が与えられている. この時, 集合 I の部分集合 $J\subseteq I$ のうちで, 部分集合族 $\mathscr{S}_J=\{S_i, i\in J\}$ が M において独立であるような横断を有するものの集合族を独立集合族とするマトロイドが集合 I 上に存在する.

なお 3.4 節の最後にのべた横断マトロイドのもうひとつの形は, 定理 4.15 において M が自由マトロイド (集合 E のすべての部分集合が独立集合であるようなマトロイド, 3.1 節参照) に相当するという意味で特殊であることをつけ加えておく. また上の定理 4.15 から, 集合 E の部分集合族 $\mathscr{S}$ の部分横断が E 上のマトロイドの独立集合となることも定理の特殊な場合として容易に理解されるであろう. なおこのことは, マトロイド理論的な見地からは Edmonds and Fulkerson [1], あるいは組合せ理論的な見地からは Mirsky [2] 等にも紹介されている.

さて頂点の集合を V, W とする 2 部グラフ $G(V,W)$ を考える. 弧 e_{ij} は頂点 $v_i\in V$ と頂点 $w_j\in W$ を結ぶものとする. 頂点の集合 V, W の部分集合 $X\subseteq V$, $Y\subseteq W$ に対して X から Y への完全マッチングが存在するということは, X に含まれる各頂点と Y の部分集合に含まれる各頂点との 1 対 1 対応が存在して, さらにそれぞれの対応する頂点間に弧が存在する場合を言う (3.4 節参照). 換言すれば, X から Y への完全マッチングとは頂点の集合 $X\cup Y$ から成る $G(V,W)$ の部分グラフにおいて X のすべての頂点を含むマッチングであると言うことができる.

いま頂点の集合 W 上で独立集合族 $\mathscr{I}$ を有するマトロイド M が定義されているとする. ここで上述の 2 部グラフ $G(V,W)$ の完全マッチングを用いて次のような集合族 $\mathscr{I}_G$ を定義する.

$\mathscr{I}_G=\{X|X\subseteq V$, 2 部グラフ $G(V,W)$ において X から $\mathscr{I}$ の要素である W の部分集合への

完全マッチングが存在する.}

上の定義を用いると，これまでの議論から定理4.15を次のように言い換えることができる.

定理4.16 集合族$\mathscr{I}_G$は，集合V上のマトロイドの独立集合族である.

上の定理4.16にあるマトロイドは，集合W上のマトロイドMから2部グラフ$G(V, W)$を用いて派生された，集合V上のマトロイドである．このマトロイドをM_Gと表わすことにすると，M_Gの階数関数r_Gは，Mの階数関数rを用いて次式のように書くことができる.

$$r_G(A)=\min_{X\subseteq A}\{r(\partial X)+|A\setminus X|\},\ A\subseteq V. \qquad (4.32)$$

なお上式における∂Xは，任意の$X\subseteq V$に対して，Wの部分集合のうちでそれに含まれるすべての頂点がXに含まれるいずれかの頂点との間に2部グラフ$G(V, W)$の弧を有するような最大の集合を表わす.

この節に紹介した2部グラフを用いた派生マトロイドの例を掲げよう．図4.17にあるグラフK_3上の閉路マトロイドMを考える.

集合$W=\{a,b,c\}$に対して，W上のマトロイドMの独立集合族$\mathscr{I}$は

$$\mathscr{I}=\{\phi,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{ab\},\ \{bc\},\ \{ca\}\}$$

で与えられる．そこでこのマトロイドMに対して，図4.18にあるような2部グラフ$G(V,W)$を用いて集合V上に派生させたマトロイドM_Gを考える.

M_Gの独立集合族$\mathscr{I}_G$が，Vに含まれる要素数2個以下の部分集合として

$$\mathscr{I}_G=\{\phi,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{12\},\ \{13\},\ \{14\},\ \{23\},\ \{24\},\ \{34\}\}$$

と与えられることは容易にわかる．つまりグラフK_3上に定義された閉路マトロイドM(このマトロイドは3.1節に紹介した一様マトロイド$U_{2,3}$と同型である)から，2部グラフ$G(V, W)$を用いて集合$V=\{1, 2, 3, 4\}$上にもうひとつのマトロイド$U_{2,4}$が派生されたことになる．なお，もとのマトロイドMがグラフ上の閉路マトロイドであったのに対して，2部グラフ$G(V, W)$を用いて派生させたマトロイドM_Gがいかなるグラフ上の閉路マトロイドとも同型とはならないということを注意しておこう.

4.4 マトロイドの合併と交叉

この節では，複数個のマトロイドの合併(union)あるいは交叉(intersection)によって派生されるマトロイドについてのべよう.

[マトロイドの合併]

まず最初に次のような質問Qについて考えてみよう.

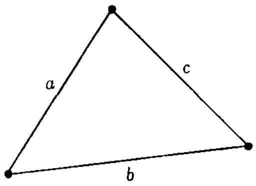

図 4.17 グラフK_3

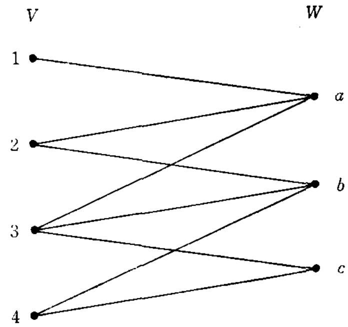

図 4.18 2部グラフ$G(V,W)$

Q:「2つのマトロイド$M_1=(E_1,\mathscr{I}_1)$，$M_2=(E_2,\mathscr{I}_2)$(集合E_1，E_2は必ずしも排反(disjoint)であるとは限らない)が与えられている．集合$E=E_1\cup E_2$の部分集合$I\subseteq E$のうちで，$I_1\in\mathscr{I}_1$，$I_2\in\mathscr{I}_2$に対して$I=I_1\cup I_2$の形に表わされる集合を独立集合とするようなマトロイドが集合E上に構成されるであろうか?」

上の質問Qに対する答えはYESである．Qに対する厳密な解答を与える定理を紹介する前に，その準備となる，前節の定理4.15から容易に得られる補題を掲げよう.

補題4.17 集合E_1上で独立集合族を$\mathscr{I}$とするマトロイド$M=(E_1, \mathscr{I})$が定義されている．関数hを集合E_1から集合E_2の上への(onto)写像$h: E_1\to E_2$とし，E_1の任意の部分集合に関してE_2の部分集合が対応するものとする．この時，次式で与えられるような集合E_2上の部分集合族

$$\mathscr{I}_h=\{h(X)\mid X\in\mathscr{I},\ X\subseteq E_1\} \qquad (4.33)$$

を独立集合族とするマトロイド$M_h=(E_2, \mathscr{I}_h)$が集合E_2上に存在する．なおこのマトロイドM_hの階数関数r_hは，Mの階数関数rを用いて次のように書くことができる.

$$r_h(A)=\min_{X\subseteq A}\{r(h^{-1}(X))+|A\setminus X|\},\ A\subseteq E_2. \qquad (4.34)$$

上の補題4.17は，集合E_1，E_2に対応する頂点集合を有する2部グラフを作成し，$h(v)=w$，$v\in E_1$，$w\in E_2$なるv，w間に弧を設定した上で，定理4.16を適用することによって容易に得られる．補題4.17を用いると，前述の質問Qに対する解答を与える次の定理が得られる.

定理4.18 (Nash-Williams[3])集合E_1，E_2上で2つのマトロイドが$M_1=(E_1,\mathscr{I}_1)$，$M_2=(E_2,\mathscr{I}_2)$のように定義されている．この時，集合$E=E_1\cup E_2$上で

$$\mathscr{I}=\{I\mid I=I_1\cup I_2,\ I_1\in\mathscr{I}_1,\ I_2\in\mathscr{I}_2\} \qquad (4.35)$$

で与えられる集合族を独立集合族とするようなマトロイド $M=(E, \mathscr{I})$ が存在する．なお M の階数関数 r は，M_1，M_2 の階数関数 r_1，r_2 を用いて次式のように書くことができる．

$$r(A)=\min_{X\subseteq A}\{r_1(X)+r_2(X)+|A\backslash X|\},\quad A\subseteq E. \tag{4.36}$$

証明　集合 $E_2=\{e_{21}, e_{22}, \cdots\cdots, e_{2n_2}\}$，$|E_2|=n_2$，に対して，$E_2$ の各要素 e_{2i}，$1\leqq i\leqq n_2$，に e'_{2i}，$1\leqq i\leqq n_2$ を対応づけた集合 $E'_2=\{e'_{21}, e'_{22}, \cdots\cdots, e'_{2n_2}\}$ を考え，マトロイド $M'_2=(E'_2, \mathscr{I}'_2)$ は M_2 とまったく同じ構造を有するものとする．集合 E_1 と E'_2 は互いに排反であるから，集合 $E'_{12}=E_1\cup E'_2$ 上で

$$\mathscr{I}'_{12}=\{I\,|\,I=I_1\cup I'_2,\ I_1\in\mathscr{I}_1,\ I'_2\in\mathscr{I}'_2\}$$

を独立集合族とするようなマトロイド $M'_{12}=(E'_{12}, \mathscr{I}'_{12})$ ができる．ただし $E_1=\{e_{11}, e_{12}, \cdots\cdots, e_{1n_1}\}$，$|E_1|=n_1$ とする．

次のような関数 $h: E'_{12}\rightarrow E$ を定義しよう．

$$h(e_{1i})=e_{1i},\quad e_{1i}\in E_1,\quad 1\leqq i\leqq n_1$$
$$h(e'_{2i})=e_{2i},\quad e'_{2i}\in E'_2,\quad 1\leqq i\leqq n_2.$$

以上の議論から，マトロイド M'_{12} と関数 h に対して補題4.17を適用すると，定理にあるマトロイド M が得られる．また M の階数関数は，マトロイド M'_{12} の階数関数が r_1，r_2 によって r_1+r_2 と表わすことができることから，補題4.17の階数関数の式(4.34)を用いれば明らかとなる．　⊠

上の定理4.18のようにして得られたマトロイドは，M_1 と M_2 の合併(union)あるいは和(sum)とよばれる．定理において特に集合 E_1, E_2 が等しく $E_1=E_2=E$ となる場合は実用的にも応用範囲の広いものであることをつけ加えておこう．

これまでは2つのマトロイド M_1, M_2 の合併によって得られるマトロイドについてのべてきたが，定理4.18からもわかるように，一般に k 個のマトロイド $M_i=(E_i, \mathscr{I}_i)$，$1\leqq i\leqq k$ に対しては，その合併に関して以下のような同様の定理が成り立つ．

定理4.19　k 個の集合 E_i, $1\leqq i\leqq k$, のそれぞれに対してマトロイド $M_i=(E_i, \mathscr{I}_i)$, $1\leqq i\leqq k$, が定義されている．この時，次のような集合族

$$\mathscr{I}=\{I\,|\,I=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_k,\ I_i\in\mathscr{I}_i,\ 1\leqq i\leqq k\} \tag{4.37}$$

を独立集合族とする集合 $E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cdots\cup E_k$ 上のマトロイド $M=(E, \mathscr{I})$ が存在する．またマトロイド M の階数関数 r は，それぞれのマトロイド M_i，$1\leqq i\leqq k$ の階数関数を r_i，$1\leqq i\leqq k$ とすると，次式のように与えられる．

$$r(A)=\min_{X\subseteq A}\{\sum_{i=1}^{k}r_i(X)+|A\backslash X|\},\quad A\subseteq E. \tag{4.38}$$

なお上の定理4.19は，後にのべるマトロイドの分割あるいは被覆などにおいても有用となる結果である．

以下では，マトロイドの合併によって得られるマトロイドを $M_1\vee M_2$，$\bigvee_{i=1}^{k}M_i$ などのように表わすことにしよう．

3.4節に紹介した横断マトロイドについて考えてみよう．有限集合 E に対してその部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ が与えられた時，$\mathscr{S}$ の部分横断を独立集合とするような横断マトロイド M が集合 E 上で定義される．

いま $1\leqq i\leqq m$ なる各 i に対して，集合 S_i 上で階数関数 $r_i(S_i)=1$ を有するマトロイド M_i を考える．この時，横断マトロイド M が上のようにして定義されたマトロイド M_i，$1\leqq i\leqq m$ の合併として

$$M=M_1\vee M_2\vee\cdots\cdots\vee M_m \tag{4.39}$$

と表わされることが以下のようにしてわかる．

$p\leqq m$ なる p 個の要素から成るマトロイド M の独立集合 $I_M=\{e_j\,|\,e_j\in E, 1\leqq j\leqq p\}$ は $\mathscr{S}$ の部分横断であるから，$1\leqq i\leqq m$ なるマトロイド M_i の独立集合 I_i の和として

$$I_M=\{e_l\,|\,e_l\in S_{i_l},\ 1\leqq l\leqq p\}$$
$$=\{I_{i_1}\cup I_{i_2}\cup\cdots\cdots\cup I_{i_m}\,|\,1\leqq j\leqq p \text{ に対して } I_{i_j} \text{ は } M_{i_j} \text{ の独立集合}\}$$

(I_{i_j}, $1\leqq j\leqq m$ は空集合でもよい)

と表わすことができる．

マトロイド M, M_i, $1\leqq i\leqq m$, の階数関数についてのべよう．まず M の階数関数 r は式(3.24)(3.4節参照)にあるように，$\mathscr{S}$ の添字集合を $I=\{1, 2, \cdots, m\}$ とすると

$$r(X)=\min_{J\subset I}\{|S(J)\cap X|-|J|+|I|\},\quad X\subseteq E. \tag{4.40}$$

で与えられる．

一方，$1\leqq i\leqq m$ なる各 i に対してマトロイド M_i の階数関数を r_i とすると，合併マトロイド $M_1\vee M_2\vee\cdots\vee M_m$ の階数関数 r' は(4.38)を用いて以下のように表わすことができる．

$$\begin{aligned} r'(X)&=\min_{Y\subseteq X}\{\sum_{i=1}^{m}r_i(Y)+|X\backslash Y|\}\\ &=\min_{Y\subseteq X}\{|S^{-1}(Y)|+|X\backslash Y|\}\\ &=\min_{J\subseteq I}\{|I\backslash J|+|S(J)\cap X|\}, \end{aligned} \tag{4.41}$$

ただし $S^{-1}(Y)=\{i\,|\,S_i\cap Y\neq\phi,\ 1\leqq i\leqq m\}$．したがって(4.40)，(4.41)より(4.39)の両辺のマトロイドの階数関数が等しくなり

$$r(X)=r'(X),\quad \forall X\subseteq E \tag{4.42}$$

となることが確認される．

[マトロイドの交叉]

さて次にマトロイドの交叉(intersection)について考

えてみよう．

たとえば，集合 E 上で定義された2つのマトロイド $M_1=(E, \mathscr{I}_1)$，$M_2=(E, \mathscr{I}_2)$ に対して，$\{I|I\subseteq E, I\in \mathscr{I}_1$ かつ $I\in\mathscr{I}_2\}$（なおこのような集合 I を以下では $I\in \mathscr{I}_1\cap\mathscr{I}_2$ と書くことにする．）によって表わされる集合族はマトロイドの“独立集合族”となるであろうか？

上の問いに対する答えはNOである．以下のような例を考えれば，それが明らかとなろう．

頂点の集合 V，W，弧の集合 E を有する2部グラフ $G(V, W, E)$ において，弧の集合 E 上のマトロイド M_1，M_2 を次のように定義する．E の2種類の分割 $E_1\cup E_2\cup\cdots\cdots\cup E_m$，$E^1\cup E^2\cup\cdots\cdots\cup E^n$，ただし $m=|V|$，$n=|W|$ を考える．ここで E_i，E^j はそれぞれ E の要素のうちで頂点 $v_i\in V$，$w_j\in W$ に接続している弧から成る集合を表わすものとする．この時，マトロイド $M_1=(E, \mathscr{I}_1)$，$M_2=(E, \mathscr{I}_2)$ の独立集合を次のように定義する．

$$\mathscr{I}_1=\{X|\ |X\cap E_i|\leqq 1,\ 1\leqq i\leqq m,\ X\subseteq E\}$$
$$\mathscr{I}_2=\{X|\ |X\cap E^j|\leqq 1,\ 1\leqq j\leqq n,\ X\subseteq E\}.$$

つまりマトロイド M_1, M_2 は3.4節で紹介した分割マトロイドである．したがって $I\in\mathscr{I}_1\cap\mathscr{I}_2$，$I\subseteq E$ によって定義される集合は，2部グラフ $G(V, W, E)$ のマッチングの集合となるのでマトロイドの独立集合とはなり得ない（マッチングの集合がマトロイドの独立性の公理を満たしていない例は容易に示すことができる）ことが理解されるであろう．

マトロイド M_1, M_2 の交叉は以下のように定義することができる．マトロイド M_1, M_2 の完全集合（spanning set，マトロイドの基底を含む集合を完全集合とよぶ）の族をそれぞれ $\mathscr{S}_1$，$\mathscr{S}_2$ とし，それらを用いて次のような集合族を定義する．

$$\mathscr{S}_1\wedge\mathscr{S}_2=\{X_1\cap X_2|X_1\in\mathscr{S}_1,\ X_2\in\mathscr{S}_2\}. \quad (4.43)$$

上式で与えられる集合族を完全集合族とするようなマトロイドを M_1, M_2 の交叉とよび，$M_1\wedge M_2$ と表わすことにする．このようにして定義された M_1 と M_2 の交叉マトロイド $M_1\wedge M_2$ がマトロイドとなることは，以下のようにして理解されるであろう．

まず前に定義した合併マトロイド $M_1\vee M_2$ の基底は，M_1, M_2 の基底の集合族をそれぞれ $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ とすると，$B_1\in\mathscr{B}_1$，$B_2\in\mathscr{B}_2$ に対して，$B_1\cup B_2$ の形の集合の中で最大個数の要素を有するものである．したがって M_1，M_2 の合併マトロイドの双対マトロイド $(M_1\vee M_2)^*$ は，$\bar{B}_1\cap\bar{B}_2$（ただし $B_1\in\mathscr{B}_1$，$B_2\in\mathscr{B}_2$ に対して $\bar{B}_1=E\backslash B_1$，$\bar{B}_2=E\backslash B_2$）なる形の集合の中の要素数最小のものを基底とするマトロイドとなる．つまり $\bar{B}_1\in\mathscr{B}_1{}^*$，$\bar{B}_2\in\mathscr{B}_2{}^*$（ただし $\mathscr{B}_1{}^*$，$\mathscr{B}_2{}^*$ はそれぞれ M_1，M_2 の双対マトロイド $M_1{}^*$，$M_2{}^*$ の基底の集合族）であるから，(4.43) で与えられる集合族を完全集合族とするマトロイドが得られたことになる．

以上の議論において，M_1, M_2 をそれぞれの双対マトロイド $M_1{}^*, M_2{}^*$ と置き換えることによって次の定理がただちに得られる．

定理 4.20　2つのマトロイドの交叉マトロイド $M_1\wedge M_2$ は次の関係を満足する．

$$(M_1\wedge M_2)^*=M_1{}^*\vee M_2{}^*. \quad (4.44)$$

［合併マトロイド，交叉マトロイドの限定と縮約］

マトロイドの合成，交叉に関する操作と限定，縮約に関する操作との組合せに際して得られる結果をいくつか掲げよう．

集合 E 上のマトロイド M_1，M_2 に対して，E の部分集合 $T\subseteq E$ をとると，限定マトロイドに関して次の関係が成立することは容易にわかる．

$$(M_1\vee M_2)\cdot T=(M_1\cdot T)\vee(M_2\cdot T). \quad (4.45)$$

またマトロイドの縮約に関しては，以下のような関係が双対マトロイドと定理4.20の関係 (4.44) とを用いて得られる．

$$\begin{aligned}(M_1|T)\wedge(M_2|T)&=((M_1|T)^*\vee(M_2|T)^*)^* && \text{(定理 4.20 より)}\\ &=((M_1{}^*\cdot T)\vee(M_2{}^*\cdot T))^* && \text{(双対性の式(4.20)より)}\\ &=((M_1{}^*\vee M_2{}^*)\cdot T)^* && \text{((4.45)より)}\\ &=(M_1{}^*\vee M_2{}^*)^*|T && \text{(双対性(4.20)より)}\\ &=(M_1\wedge M_2)|T. && \text{(定理 4.20 より)}\end{aligned}$$

したがって

$$(M_1|T)\wedge(M_2|T)=(M_1\wedge M_2)|T. \quad (4.46)$$

なおこれまでは2個のマトロイドから派生された交叉マトロイドについてのべてきたが，集合 E 上で定義された3個以上のマトロイドに関しても，マトロイドの完全集合族を用いることによって2個の場合と同様の議論ができることは明らかであろう．

参 考 文 献

［1］ J. Edmonds and D. R. Fulkerson: Transversals and Matroid Partition, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, Vol. 69 B, 1965, pp. 147-153.

［2］ L. Mirsky: *Transversal Theory*, Academic Press, London, 1971.

［3］ C. St. J. A. Nash-Williams: An Application of Matroids to Graph Theory, in *Theory of Graphs*, P. Rosentiehl, editor, Gordon and Breach, New York, 1967.