

## 最適制御理論の動向 (2)

坂本 実

### 5. 最適制御問題におけるテント法

終端制御問題 (terminal control problem) とよばれる次の問題を考えよう。(前回の問題 3-3, 若干の記号の変更がある.)

- 問題 I** 目的関数  $J(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot)) = F(x(t_1)) \rightarrow \text{最小}$   
 制約条件 (i)  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), t_0 \leq t \leq t_1$   
 (ii)  $x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1$   
 (iii)  $t_0, t_1$  自由  
 (iv)  $u(t) \in U$ .

ここに,  $x = (x^1, \dots, x^n)$  は  $n$  次元ユークリッド空間の点(ベクトル)であって, システムの状態(出力)を特性づける.  $u = (u^1, \dots, u^r)$  は,  $r$  次元ユークリッド空間の点であって, 制御(入力)を特性づけるものである.  $u = u(t)$  は, 区分的に連続であって, 与えられた集合  $U$  内の値をとるものに限定する.(いわゆる許容クラス—許容制御の指定).

$F(x(t_1))$  は  $R^n$  で定義された連続微分可能な関数  $F(x^1, \dots, x^n)$  の, 終端時刻  $t = t_1$  でのシステムの状態での値である.  $M_0, M_1$  はなめらかな多様体とよばれるものであって, 連続微分可能な関数を用いて与えられた連立方程式,あるいは不等式の解の集合として与えられる.

最適制御問題の目的関数の最小値を達成する組  $(t_0^0, t_1^0, x_0^0, u^0(\cdot), x^0(\cdot))$  を最適制御問題の解といい,  $u^0(\cdot)$  ( $u(t), t_0 \leq t < t_1$ ) を最適制御 (optimal control),  $x^0(\cdot)$  ( $x(t), t_0 \leq t \leq t_1$ ) を最適トラジェクトリ (optimal trajectory), 対  $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$  ( $(u(t), x(t)), t_0 \leq t \leq t_1$ ) を最適過程 (optimal process) という. 過程が最適であるための必要条件を, 前回その考えに重点をおいて解説し, いくつかの問題への適用を行なったテント法 (前回のロシア語を метод щатров に訂正) を用いて導こう.

その方法は, 集合  $\Omega_i (i=0, \dots, n)$  とそれらのテント  $K_i (i=0, \dots, n)$  を構成し, 定理 1, 2 を用いることであった.

点  $x_1 = x(t_1)$  (いまのところ固定しているとする) を通る,  $F(x)$  の等高曲面  $P = \{x | F(x) = F(x_1)\}$  が分離する半空間のうち,  $F(x)$  の値が小さいほう, すなわち,  $\{x | F(x) < F(x_1)\}$  に点  $x_1$  をつけ足した集合を  $\Omega_0$  とする. つまり,  $\Omega_0 = \{x | F(x) < F(x_1)\} \cup \{x_1\}$  とする.

トラジェクトリの端点を制約する多様体  $M_1$  (集合) を  $\Omega_1$  とする.

集合  $\Omega_2$  は, 多様体  $M_0$  上のある初期点  $x_0$  から出発する, 問題に指定されたトラジェクトリの可能なすべての端点からなる集合, いわゆる到達可能領域とする. つまり, 点  $x^* \in R^n$  は, 点  $x_0 \in M_0$  から, 問題に記述した規則  $\dot{x} = f(x, u), u \in U$  にしたがって運動して, この点  $x^*$  に達しようとするとき, またそのときに限り, 集合  $\Omega_2$  の点となる.

このとき, 前回と同様の, 次の定理が成立する. 「過程  $(u(\cdot), x(\cdot))$  が, 問題 I の最適過程であるための必要十分条件は,  $\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \{x_1\}$ , ただし, この過程のトラジェクトリの端点  $x_1 = x(t_1)$  とする。」これを証明しよう. この過程が最適であるとする.  $x^* \in \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2, x^* \neq x_1$  が存在するとすれば,  $F(x^*) < F(x_1)$ , 目的関数により小さい値をとらせる, 終端の条件を満足する, 許容制御で到達させうる端点をもつ, 過程  $(u^*(\cdot), x^*(\cdot))$  が存在することになり, 過程  $(u(\cdot), x(\cdot))$  が最適であることに矛盾する (必要性の証明終り). 上の共通集合が 1 点  $x_1$  だけであれば, これより小さい値を目的関数にとらせる, 制約条件を満たす過程は他にはない. (十分性の証明終り)

集合  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$  のテント (凸錐)  $K_0, K_1, K_2$  を作ろう. いままでと同様  $K_0 = \{x | \partial f^0(x_1) / \partial x \cdot (x - x_1) \leq 0\}$  となり  $K_1$  は,  $\Omega_1 = M_1$  の点  $x_1$  での接平面にとればよい.

集合  $\Omega_2$  のテント  $K_2$  を構成するためには, かなりの手続きが必要である. そのために, まず, 制御  $u(t), t_0$

さかもと みのる 専修大学

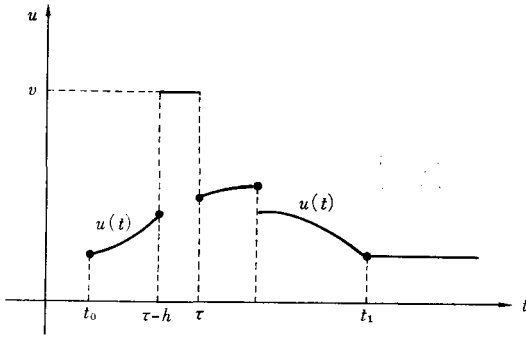


図1 制御の針状変分

$t_0 \leq t \leq t_1$  から、その連続点  $\tau, t_0 < \tau < t_1$ , で集合  $U$  の任意の点  $v$  をとり、新たな制御  $\bar{u}(t)$  を次のように作ろう。  
(針状変分という、図1)

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} v : \tau-h < t < \tau \\ u(t) : \text{その他の } t, t_0 \leq t \leq t_1 \\ u(t_1) : t > t_1 \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $h > 0$  は、 $\tau-h > t_0$  を満たす小さい数であるとし、点  $t_1$  では制御  $\bar{u}(t)$  は連続であるとする。こうして作られた、 $\bar{u}(t)$  が許容制御であることは明らかであろう。

この制御  $\bar{u}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  に対応する、時刻  $t_0$  に点  $x_0$  を出発する、考えている対象  $\dot{x} = f(x, u)$  のトラジェクトリ  $\bar{x}(t), t_0 \leq t \leq t_1$  と、(もとの制御  $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$  に対応する)トラジェクトリ  $x(t), t_0 \leq t \leq t_1$  とを、時間区間をわけて比較することにしよう。

$t_0 \leq t \leq \tau-h$  では、両者は、初期点、制御とも同じであるから、同じ微分方程式の解であって、 $\bar{x}(t) = x(t)$ 。特に、 $\bar{x}(\tau-h) = x(\tau-h)$  でもある。

$f(x, u)$  は、相空間での相点  $x$  の運動速度であることを考えて

$$\dot{\bar{x}}(\tau) \doteq \dot{\bar{x}}(\tau-h) + hf(x(\tau), v),$$

$$\dot{x}(\tau) \doteq \dot{x}(\tau-h) + hf(x(\tau), u(\tau))$$

である。ここで、上に得た、 $\bar{x}(\tau-h) = x(\tau-h)$  を用いると、 $t = \tau$  では

$$\dot{\bar{x}}(\tau) = \dot{x}(\tau) + h(f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))) \quad (2)$$

ここで、近似記号  $\doteq$  は ( $h$ , 後の  $h'$  等に関する) 2位の無限小の精度内で等号が成立することを表わす。

$\tau \leq t \leq t_1$  では、 $\bar{u}(t) = u(t)$  であり、 $\bar{x}(t), x(t)$  は初期条件が、(2)で結ばれる同じ微分方程式の解であることから

$$\bar{x}(t) \doteq x(t) + \delta x(t) \quad (3)$$

であることが証明される。ただし、 $\xi = \delta x(t)$  は変分方程式 (variational equation)

$$\dot{\xi} = \partial f(x(t), u(t)) / \partial x \cdot \xi \quad (4)$$

の解である(たとえば、[9],[10], その他の微分方程式

の教科書参照)。ここに、 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\partial f / \partial x$  は、要素  $\partial f^i / \partial x^j$  をもつ  $n$  次の正方行列である。(2)と(3)とを比較して

$$\delta x(\tau) = h(f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))). \quad (5)$$

$t = t_1 + h'$  では、 $h'$  は小さい正または、負の数

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_1 + h') &\doteq \bar{x}(t_1) + h' f(x(t_1), u(t_1)) \doteq x(t_1) + \\ &\delta x(t_1) + h' f(x(t_1), u(t_1)) \end{aligned} \quad (6)$$

(第1式は、テーラー展開、第3式は、第2式第1項に、式(3)を用いる)。

終端時間  $t_1$  が固定されていないことに対応して、時刻  $t_1 + h'$  で終る場合もありうるので、 $\bar{x}(t_1 + h') \in \Omega_2$  である。(6)式は

$$\bar{x}(t_1 + h') \doteq x_1 + w, w = \delta x(t_1) + h' f(x(t_1), u(t_1)) \quad (7)$$

と書ける。この  $w$  を変位ベクトルとよぶ。

出発点  $x_0$  は多様体  $M_0$  上に選べるので、考えている点  $x(t_0)$  の  $M_0$  の接線ベクトルを  $\xi_0$  とし、 $x(t_0) + \xi_0$  から出発する、制御  $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$  に対応するトラジェクトリ  $\bar{x}(t)$  の端点  $\bar{x}(t_1)$  を考えよう。方程式(4)の、初期条件  $\xi(t_0) = \xi_0$  をもつ解を  $\xi(t), t_0 < t \leq t_1$  とするとき、 $\bar{x}(t_1) = x(t_1) + \xi(t_1)$  が成立する。つまり、 $\xi(t_1)$  も変位ベクトルである。すなわち

$$w = \xi(t_1) \quad (8)$$

点  $x_1 + w$  そのものは、集合  $\Omega_2$  の点ではないが、集合  $\Omega_2$  から、 $h, h'$  に関し 2位の無限小内の距離にある。

ベクトル  $w$  は  $v, h, h', \xi_0$  に依存する、これらの可能なあらゆる選択に応じてできる  $w$  の正の係数での線形結合を作る。ベクトル  $w$  とそれらのこのような線形結合を点  $x_1$  から描くことによって、集合  $\Omega_2$  のテント  $K_2$ , すなわち、この集合を近似する、頂点  $x_1$  をもつ凸錐が得られる。

こうして得られた  $K_0, K_1, K_2$  を用いて、過程  $(u(\cdot), x(\cdot))$  の最適性の必要条件が、テント法により得られる。つまり、その条件は、 $K_0, K_1, K_2$  が分離されているこ

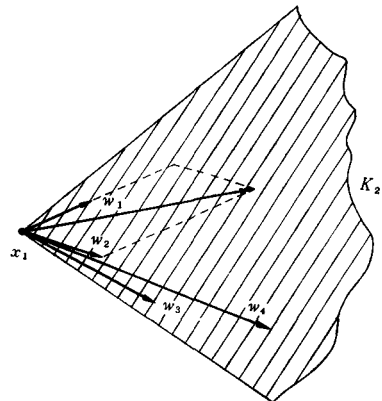


図2 到着可能領域のテント

と(前回, 定理1)である. さらに, そのため必要条件は次の条件(前回, 定理2)である.

「次のような少なくとも1個はゼロでないベクトル  $a_0, a_1, a_2$  が存在すること.

$$a_i \cdot (x - x_1) \leq 0, \text{ すべての } x \in K_i, i=0, 1, 2 \quad (9)$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 1 \quad (10)$$

条件(9)から考える.  $i=0$  では,  $K_0$  の作り方 ( $\Omega_0$  の接平面)から,  $a_0 = -\Psi_0(\partial F(x_1)/\partial x)$  を選ぶことになり, ただし, 数  $\Psi_0$  は,  $\Psi_0 \leq 0, i=1$  では,  $K_1 = \{x | \bar{a} \cdot (x - x_1) = 0\}$  の形で与えられることになり, ベクトル  $a_1$  は  $M_1$  に点  $x_1$  で直交するように選ぶことになる.

$i=2$  では,  $K_2$  の作り方から, すべての変位ベクトル  $w$  に対し  $a_2 \cdot w \leq 0$  になるよう選ぶことになる. このために, 変分方程式(4)に対する共役な方程式

$$\dot{\Psi} = -\Psi \cdot \partial f(x(t), u(t)) / \partial x \quad (11)$$

を考える.  $\xi(t), \Psi(t)$  が, それぞれ, 方程式(4), (10)の, 区間  $t' \leq t \leq t''$  の解とする, 内積  $\Psi(t) \cdot \xi(t)$  の微分を計算して

$$d(\Psi(t) \cdot \xi(t)) / dt = \dot{\Psi}(t) \cdot \xi(t) + \Psi(t) \cdot \dot{\xi}(t) = 0$$

となり,  $\Psi(t) \cdot \xi(t) = \text{const}, t' \leq t \leq t''$  を得る. したがって

$$\Psi(t') \cdot \xi(t') = \Psi(t'') \cdot \xi(t'') \quad (12)$$

初期条件  $\Psi(t_1) = a_2$  ((9), (10)を満足する  $a_2$ ) をもつ, 方程式(11)の解を  $\Psi(t), t_0 \leq t \leq t_1$  で表わそう. このとき, (10)から,  $a_1 = -a_0 - a_2$  であって,  $a_0 = \Psi_0 \partial F(x_1) / \partial x$  であったから

$\Psi_0 \partial F(x) / \partial x - \Psi(t_1) \perp M_1$ : 点  $x_1$  において (13) を得る.

前に得た ((8)参照) 変位ベクトル  $w = \xi(t_1)$  に対しては,  $a_2 \cdot w \leq 0$  は  $a_2 \cdot \xi(t_1) \leq 0$  となる.  $-\xi_0$  も接線ベクトルであり, 方程式(4)が線形であることから,  $w = -\xi(t_1)$  も変位ベクトルであり,  $a_2 \cdot (-\xi(t_1)) \leq 0$  でなければならぬ. このことから,  $a_2 \cdot \xi_2 = 0$  となり, (12)から

$$\Psi(t_0) \cdot \xi_0 = \Psi(t_0) \cdot \xi(t_0) = \Psi(t_1) \cdot \xi(t_1) = -a_2 \cdot \xi(t_1) = 0$$

となる. こうして, ベクトル  $\Psi(t_0)$  は,  $M_0$  の点  $x(t_0)$  における任意の接線ベクトル  $\xi_0$  と直交すること, すなわち

$$\Psi(t_0) \perp M_0, \text{ 点 } x(t_0) \text{ で} \quad (14)$$

となる.

次に, 制御  $u(t)$  の連続点である時刻  $\tau$  と点  $v \in U$  とを選ぼう. 初期条件を(5)とする,  $\xi(\tau) = \delta x(\tau)$  である, 方程式(4)の区間  $[\tau, t_1]$  上の解を  $\xi = \delta(t)$  と表わそう. このとき, 考えている条件  $a_2 \cdot w \leq 0$  での,  $w$  として,  $w = \delta x(t_1)$  をとることになる ((7)で,  $h' = 0$  とした). つまり,  $\Psi(t_1) \cdot \delta x(t_1) \leq 0$  ( $a_2$  の前の選び方から), (12)で,  $t' = \tau, t'' = t_1, \xi(t) = \delta x(t)$  として,  $\Psi(\tau) \cdot \delta x(\tau) = \Psi(t_1) \cdot \delta x(t_1) \leq 0$ , さらに(5)から

$$h(\Psi(\tau) \cdot f(x(\tau), v) - \Psi(\tau) \cdot f(x(\tau), u(\tau))) \leq 0$$

$h > 0$  であることから, この不等式は

$$\Psi(\tau) \cdot f(x(\tau), v) \leq \Psi(\tau) \cdot f(x(\tau), u(\tau)), \quad v \in U \text{ のとき} \quad (15)$$

となる.

最後に, 制御  $\bar{u}(t)$  が, 時間区間  $[t_0, t_1]$  から,  $[t_0, t_1 + h']$  とかわり,  $\bar{u}(t) = u(t), [t_1, t_1 + h']$  のとき ( $h' > 0$  として), (7)で  $\delta x(t_1) = 0$  となり, 変位ベクトル  $w = h' f(x(t_1), u(t_1))$  を得る. これに対しても,  $a_2 \cdot w \leq 0, h' a_2 \cdot f(x(t_1), u(t_1)) \leq 0$  が成立しなければならない.  $h'$  は正にも負にもなりうるので,  $a_2 \cdot f(x(t_1), u(t_1)) = 0$ , すなわち

$$\Psi(t_1) \cdot f(x(t_1), u(t_1)) = 0. \quad (16)$$

以上の結果, つまり最適性の必要条件を記述するのに都合のよい次の記号を導入する.

$$H(\Psi, x, u) = \Psi \cdot f(x, u) = \sum_{i=1}^n \Psi_i f^i(x, u) \quad (17)$$

このとき, (11)は

$$\dot{\Psi} = -\partial H(\Psi, x(t), u(t)) / \partial x \quad (18)$$

のように書け, 問題の微分方程式は

$$\dot{x} = \partial H(\Psi, x(t), u(t)) / \partial \Psi$$

と書くこともできる. 式(15), (16)は

$$H(\Psi(\tau), x(\tau), u(\tau)) = \max_{v \in U} H(\Psi(\tau), x(\tau), v) \quad (19)$$

$$H(\Psi(t_1), x(t_1), \bar{u}(t_1)) = 0 \quad (20)$$

のように書ける.

最後に,  $\Psi_0 = 0$  ( $a_0 = 0$ ) のときに,  $a_2 = 0$  だと,  $a_1 = 0$  となり,  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$  となるので,  $\Psi_0 = 0$  のとき,  $a_2 \neq 0$  でなければならない. したがって, 初期条件  $\Psi(t_1) = a_2$  をもつ, 方程式(11)(18)の解は, ゼロではない非自明解である. このことを,  $|\Psi_0| + |\Psi| \neq 0$  のように, ベクトルの長さ  $|\Psi|$  を用いて表わそう.

結局次の定理を得た.

**定理 I (最大値原理),**  $(u(t), x(t)), t_0 \leq t \leq t_1$  が問題 I の最適過程であるためには, 次の条件を満足する数  $\Psi_0$  と連続なベクトル関数  $\Psi(t), t_0 \leq t \leq t_1$  が存在しなければならない.

- 1)  $\Psi_0 \leq 0, |\Psi_0| + |\Psi(t)| \neq 0, t_0 \leq t \leq t_1.$
- 2)  $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t))$  は,  $(u(t), x(t))$  に対応する共役方程式(11)(18)の,  $t_0 \leq t \leq t_1$  上の解である.
- 3)  $u(t)$  の連続点  $\tau, t_0 \leq \tau \leq t_1$  で, (17)で定義される変数  $u$  の関数  $H(\Psi(\tau), x(\tau), u)$  は, 集合  $U$  上では,  $u = u(\tau)$  で最大となる(19).
- 4) 終端時刻  $t = t_1$  における関数  $H$  の値がゼロである(20), (16).
- 5) トラジェクトリの左端点および右端点における, いわゆる横断性の条件 (transversality conditions)(13), (14)を満足する.

## 6. いろいろな問題と最大値原理

### 6.1 種々の境界条件

**問題 I** では, 制約条件 (ii) に示されているように, トラジェクトリの両端が, それぞれ時間的に変化しない与えられた領域  $M_0, M_1$  に属するよう要求されていて, この問題を **固定域問題** という.  $t=t_0$  における左端点  $x_0$  が与えられている場合には, 初期点の変動による変位ベクトル (8) に対して得られた条件は, 取り除かれる (条件  $x(t_0)=x_0$  が代りとなる). このことを, 問題と定理での変更に個所だけを書いて, 次のようにまとめておこう.

**問題 I の 1:** (ii)  $\Leftarrow x(t_0)=x_0$ , 固定左端点,  $x(t_1) \in M_1$ .

**定理 I の 1:** 5)  $\Leftarrow$  条件 (14) を除く.

次に,  $x(t_0)=x_0$  (左端点固定) で,  $x(t_1) \in R^n$  (右端点自由) の場合を考えよう. このとき, 定理 I の条件 5), 横断性の条件 (13) は,  $\Psi_0 \partial F(x(t_1))/\partial x = \Psi(t_1)$  となる. そこで, 定数  $\Psi_0 (\leq 0)$  が, ゼロであるとすれば,  $\Psi(t_1)=0$  となる.  $\Psi(t)$  が満足すべき (定理 I の条件 2) の方程式 (11) (同じく (18)) は, 線形同次方程式であるので, 境界条件  $\Psi(t_1)=0$  では,  $\Psi(t)$  は自明解 ( $\Psi(t) \equiv 0$ ) となる. このことは, 定理 I の条件 1) に反する. したがって,  $\Psi_0 < 0$  でなければならない. さらに,  $\Psi_0 = -1$  としてもさしつかえない. こうして, 今の問題と, それに対する最大値原理とを次のように記述できる.

**問題 I の 2** 目的関数  $J(u(\cdot), x(\cdot)) = F(x(t_1))$   
 $\rightarrow$  最小

- 制約条件 (i)  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$   
 (ii)  $x(t_0) = x_0, x(t_1) \in R^n$  (自由)  
 (iii)  $t_0, t_1 \dots$  固定  
 (iv)  $u(t) \in U$

**定理 I の 2** ( $u(t), x(t)$ ),  $t_0 \leq t \leq t_1$  が, 問題 I の 2 の最適過程であるためには, 次を満足する連続なベクトル関数  $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t))$  が存在しなければならない.

- 1)  $|\Psi(t)| \neq 0, t_0 \leq t \leq t_1$
- 2)  $\dot{\Psi}(t) = -\partial H(\Psi(t), x(t), u(t))/\partial x$
- 3)  $u(t)$  の各連続点  $\tau, t_0 \leq \tau \leq t_1$  で, 最大値条件  $H(x(\tau), \Psi(\tau), u(\tau)) = \max_{v \in U} H(\Psi(\tau), x(\tau), v)$  を満足する.
- 5)  $\Psi(t_1) = -\partial F(x(t_1))/\partial x$

ただし, 関数  $H$  は (17) で定義する. 条件番号は定理 I にあわせた.

この問題について, 最大値原理を用いて, 最適過程 (の候補) が, その存在を仮定して, どのような手順で求められるかをみておこう.

**ステップ 1**  $\Psi$  を導入し,  $H$  関数を作り, 3) の max

$H(\Psi, x, u)$  を達成する  $u^* = u^*(\Psi, x)$  を求める. 多くの例では,  $u^* = u^*(\Psi)$  のように求まる.

**ステップ 2**  $u^* = u^*(\Psi, x)$  を, 問題の制約条件 (i), 定理 I の 2 の条件 2) の方程式に代入し, それぞれ, 制約条件 ii), **定理 I の 2 の条件 5)** を, 初期条件, 境界条件とする次の境界値問題

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^*(\Psi, x)), & x(t_0) &= x_0, \\ \dot{\Psi} &= \partial H(\Psi, u^*(\Psi, x)), & \Psi(t_1) &= \partial F(x(t_1))/\partial x, \end{aligned}$$

を解く (前者は, 形をそろえて, 関数  $H$  を用いて表わすこともできる). こうして,  $\Psi^* = \Psi^*(t), x^* = x^*(t)$  を得る ( $u^* = u^*(\Psi)$  の場合には, 後者の方程式だけから,  $\Psi^* = \Psi^*(t)$  を求める. つづいて,  $u^* = u^*(\Psi^*(t)) = u^*(t)$  を前者の方程式に代入して,  $x^* = x(t)$  を求める).

**ステップ 3** 形式的には,  $u^* = u^*(\Psi^*(t), x^*(t)) = u^*(t)$  として, 最適制御  $u = u(t)$  が得られるが, その具体的な式を求めるよりは,  $\bar{u} = u(x)$  の形に求めるのが容易であり, 実用的にもそれで十分である (たとえば最適制御のシンセシス, 次回と, [10] 参照).

具体的な例を考えよう.

**問題 A** 目的関数  $F(x(t_1)) = (x^2(t_1))^2$

- 制約条件 (i)  $\dot{x}^1 = x^2, \dot{x}^2 = u$   
 (ii)  $x(t_0) = x_0, x(t_1) \in R^n \dots$  自由  
 (iii)  $t_0 = 0, t_1 = 1$   
 (iv)  $-1 \leq u \leq 1$

**ステップ 1**  $H(\Psi, x, u) = \Psi_1 x^2 + \Psi_2 u$ ,  
 $u$  に関する最大値条件から

$$u^* = \begin{cases} 1, \dots & \Psi_2 > 0 \text{ のとき,} \\ -1, \dots & \Psi_2 < 0 \text{ のとき,} \\ u, |u| < 1, \dots & \Psi_2 = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

**ステップ 2**  $u^* = u^*(\Psi)$  の形式である.

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1 = 0, \Psi_1(1) = \partial F(x(1))/\partial x^1 = -2x^1(1), \\ \dot{\Psi}_2 = -\Psi_1, \Psi_2(1) = \partial F(x(1))/\partial x^2 = 0 \end{cases}$$

これを解いて,  $\Psi_1^*(t) \equiv C \equiv -2x^1(1), \Psi_2^*(t) = 2x^1*(t-1), 0 \leq t \leq 1$ .  $\Psi_2^*(t)$  は,  $0 \leq t \leq 1$  で一定符号で,  $x^1*(1)$  の符号で定まる. 制御  $u^*(t)$  は  $x^1*(1)$  に依存して, 次のように定まる.

- a)  $x^1*(1) > 0 \rightarrow \Psi_2^*(t) < 0 \rightarrow u^*(t) = -1, 0 \leq t \leq 1$
- b)  $x^1*(1) < 0 \rightarrow \Psi_2^*(t) > 0 \rightarrow u^*(t) = 1, 0 \leq t \leq 1$
- c)  $x^1*(1) = 0 \rightarrow \Psi_2^*(t) = 0 \rightarrow u^* = u(t), |u(t)| \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ .

$x^1*(t), x^2*(t), 0 \leq t \leq 1$  を, (i) の方程式を, 初期条件を  $x^1*(0) = x_0^1, x^2*(0) = x_0^2$  として解いて決定する. 上のケースと対応させて, 次を得る.

- a)  $u = -1, x^2*(t) = -t + x_0^2, x^1*(t) = -1/2 t^2 + x_0^2 t + x_0^1, x^1(1) > 0$  だから  $x_0^1 + x_0^2 > 1/2$
- b)  $u = 1, x^2*(t) = t + x_0^2, x^1*(t) = 1/2 t^2 + x_0^2 t + x_0^1,$

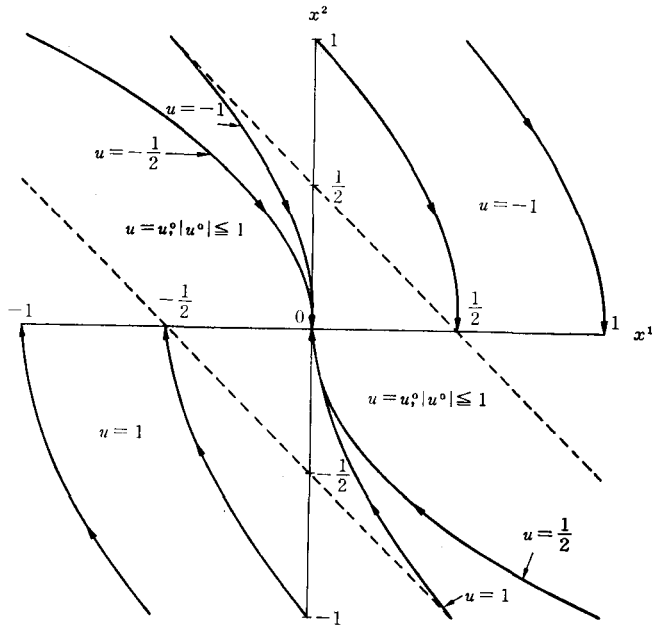


図3 問題Aの解

$x^1(1) < 0$  だから  $x_0^1 + x_0^2 < -1/2$

c)  $u^* = u(\tau), |u(\tau)| \leq 1, x^{2*}(t) = x_0^2 + \int_0^t u(\tau) d\tau,$   
 $x_1(t) = x_0^1 t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau u(\tau) d\tau + x_0^1, x^1(1) = 0$  だから,  
 $x^1(1) = x_0^1 + x_0^2 + \int_0^1 (1-\tau)u(\tau) d\tau = 0.$   
 $\left| \int_0^1 (1-\tau)u(\tau) d\tau \right| < 1/2$  であるので,  $-1/2 \leq x_0^1 + x_0^2 \leq 1/2.$

ステップ3 時間の関数としての制御  $u^*(t)$  の式を得ることは、初期点にも依存して困難である。ステップ2の結果から、初期点の範囲に応じて、次を得る。

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 1, x_0^1 + x_0^2 > 1/2 \text{ のとき} \\ 1, & 0 \leq t \leq 1, x_0^1 + x_0^2 < -1/2 \text{ のとき} \\ u(t), & 0 \leq t \leq 1, -1/2 \leq x_0^1 + x_0^2 \leq 1/2 \end{cases}$$

ただし,  $\int_0^1 (1-\tau)u(\tau) d\tau = -(x_0^1 + x_0^2).$

(図3参照, そこでは  $u^*(t)$  の値ごとの初期点の領域を点線で区分してある)。

$(x^1, x^2)$ -平面上のトラジェクトリの曲線は、ステップ2で求めた、時間  $t$  を消去して求めることもできるが、方程式(i)から、 $dx^2/dx^1 = u/x^1$  を作り、これを初期条件を与えて解くことによっても求まる。図3にその例を描いてある。なお、中央の、 $u^*$  が任意である領域では、 $u=1, u=-1, u=1/2, u=-1/2$  とを描いてある。

## 6.2 種々の目的関数

問題Iの、トラジェクトリの境界条件が変わった場合に、対応する定理Iの変更を見てきた。今度は、目的関数の変更がある場合にも、基本的定理である定理Iから、

対応する定理(最大値原理)が容易に導かれることを示そう。

**問題II** 目的関数  $J(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot)) =$

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \text{最小}$$

- 制約条件 (i)  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$   
 $t_0 \leq t \leq t_1$   
(ii)  $x(t_0) \in Q_0, x(t_1) \in Q_1$   
(iii)  $t_0, t_1$ : 自由  
(iv)  $u(t) \in U$

次の微分方程式にしたがう、座標  $x^0$  を導入しよう。

$$\dot{x}^0 = f^0(x, u), x^0(t_0) = 0 \quad (21)$$

制約条件として(i)に、これを追加する。

$x^0 = 0, (x^1, \dots, x^n) \in Q_0$  である点  $(x^0, x^1, \dots, x^n)$  の集合を  $M_0, x^0$  が任意で、 $(x^1, \dots, x^n) \in Q_1$  である点  $(x^0, x^1, \dots, x^n)$  の集合を  $M_1$  とする。  $F(x^0, x^1, \dots, x^n) = x^0$  とする。

こうして、得られる  $n+1$  次元の問題Iに、問題IIが同等であることは、容易にわかるであらう。

それを示しておこう。  $(u(t), x(t)), t_0 \leq t \leq t_1$  が、問題I(II)の制約(i)を満足するある過程であって、 $x(t_0) \in Q_0, x(t_1) \in Q_1$  であれば、

$$x^0(t) = \int_{t_0}^t f^0(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

とおくことによって、問題Iの(i)および、方程式(21)を満足する過程  $(u(t), (x^0(t), x^1(t), \dots, x^n(t))), t_0 \leq t \leq t_1$  をうる。このとき、この、初期状態および、終端状態は  $M_0, M_1$  に属し、 $J = x^0(t_1)$  である。上のことを逆にたどって、座標  $x^0(t)$  を消去でき、もとの問題IIが得られる。

この問題に対する最適性の条件を導こう。  $H$  関数(17)は

$$H = (\Psi, x, u) = \sum_{i=0}^n \Psi_i f^i(x, u) \quad (21)$$

であり、 $x^0$  には依存しない。したがって、 $\Psi(t) = (\Psi_0(t), \Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t))$  に関する共役方程式(18)は

$$\dot{\Psi}_0(t) = \text{const}, \dot{\Psi}_j(t) = -\partial H(\Psi(t), x(t), u(t)) / \partial x^j, \quad j=1, \dots, n \quad (22)$$

さらに、横断性の条件(14),(13)は、 $M_0$  の点の第1成分がゼロ、 $M_1$  の第1成分は自由であること、また、 $\partial F / \partial x = (1, 0, \dots, 0)$  であることを考えて、次のようになる。

$$(\Psi_1(t_0), \dots, \Psi_n(t_0)) \perp Q_0, \text{ 点 } x(t_0) \text{ で} \quad (23)$$

$$(\Psi_1(t_1), \dots, \Psi_n(t_1)) \perp Q_1, \text{ 点 } x(t_1) \text{ で} \quad (24)$$

$$\Psi_0 - \Psi_0(t_1) = 0.$$

定理Iの!) から、 $\Psi_0 \leq 0$  であるから、最後の式は、

$\Psi_0(t) \equiv \Psi_0 \leq 0$  を意味することになる。こうして、定理 I とまったく同じ形式の次の定理が得られる。

**定理 II** 過程  $(u(t), x(t))$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  が問題 II の最適過程であるためには、次の条件を満足する数  $\Psi_0$  と連続なベクトル関数  $\Psi(t) = (\Psi_0(t), \Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t))$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  が存在しなければならない。

- 1)  $\Psi_0 \leq 0, |\Psi_0| + |\Psi(t)| \neq 0, t_0 \leq t \leq t_1$
- 2)  $\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)$  は  $(u(t), x(t))$  に対応する方程式(22)の解である。
- 3)  $u(t)$  の各連続点  $\tau$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t_1$  で、(21)式で定義された  $u$  の関数  $H$  は、集合  $U$  において、点  $u = u(\tau)$  で最大になる。
- 4) 終端時刻  $t = t_1$  での関数  $H$  の値はゼロである。
- 5) トラジェクトリの左端点および右端点での横断性の条件(23), (24)を満足する。

さらに、目的関数が、問題 I と問題 II のそれらの和で与えられる、いわゆるボルツァの問題では

$$J(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt + F(x(t_1))$$

であって、問題 II のときと同様の  $x^0$  (21 参照) を導入して

$$J = x^0(t_1) + F(x(t_1)) \equiv \bar{F}(\bar{x}(t_1)) \quad \bar{x} = (x^0, x^1, \dots, x^n)$$

のように定まる新しい目的関数をもつ問題 I を得る。あるいは、 $x^0$  を、 $\dot{x}^0 = f^0(x, u) + F_{x^0} \cdot f(x, u)$ ,  $x^0(t_0) = x_0$  として導入すれば、 $J = x^0(t_1)$  となり、この問題は問題 II と類似の、問題 I の特殊ケースとなる。

また、制約条件 i) の方程式の右辺が、 $f(x, u, t)$ 、目的関数が  $F(x(t_1), t_1)$ 、さらにその被積分関数が  $f^0(x, u, t)$  のように、 $t$  に陽表的に依存するものがある場合には、新しい座標

$$\bar{x}^{n+1} = 1, \quad x_1^{n+1}(t_0) = t_0$$

を導入して(時間を、1つの状態変数とみなして)、対応する定理(最大値原理)を修正することによって、それぞれの問題に応ずる最適性の必要条件を与える定理(最大値原理)を得ることができる。ここでは、それは行なわない。しかし、実際の具体的問題が与えられたときには、その問題を、上述の問題 I (あるいは、問題 II) に変形した後、定理 I (あるいは、定理 II) を適用してもよい。このような問題の解き方の例を次の具体的意味をもつ問題でみてみよう。

**問題 B** 目的関数  $J(q(\cdot), N(\cdot)) = -(\int_0^{t_1} q(t) dt + N(t_1)) \rightarrow$  最小

- 制約条件 (i)  $dN/dt = -q + (N - q)[\alpha - \gamma(N - q)]$   
(ii)  $N(t_0) = N_0$   
(iii)  $t_0 = 0, t_1 = T$ : 固定  
(iv)  $0 \leq q(t) \leq N(t)$ .

この問題は、一種類の魚類の最適収穫政策を決定する単純な問題である。 $N(t)$  は時刻  $t$  における魚の個体群数であり、 $q(t)$  は時刻  $t$  における漁獲量(率)であって、(iv) の範囲内でコントロールできる区分的に連続な関数であるとする。パラメータ、 $\alpha, \gamma$  はそれぞれ、この個体群の成長係数、個体群内での競合の度合を特性づけるものである。 $N(t)$  の時間的変化が(i)の方程式で記述されるものとする(詳細な検討は略す)。

$[0, T]$  間の総漁獲量と終端時刻での個体群数との和(後者は、その時刻に瞬間的に全部収穫すると考えてもよい)を最大にするような、漁獲方式を決定するのが問題である。問題の記述は、最小化問題になるように、目的関数の符号を定めた。これを解こう。

新しい変数  $G$  を次を満足するものとして導入する。 $dG/dt = -q(t) - dN/dt = -(N - q)[\alpha - \gamma(N - q)]$ ,  $G(0) = N_0$  (第2式では、(i)を用いた)。このとき、目的関数は、 $G(t_1) (= G(T))$  となる。こうして、 $(x^1, x^2) \equiv (G, N)$  である問題 I の 2 の型の問題に変形できる ( $t_0 = 0, t_1 = T$ )。

**問題 B'** 目的関数  $G(T) \rightarrow$  最小

- 制約条件 (i)  $dG/dt = -(N - q)[\alpha - \gamma(N - q)]$ ,  
 $dN/dt = -q + (N - q)[\alpha - \gamma(N - q)]$   
(ii)  $G(0) = N(0) = N_0$   
(iv)  $0 \leq q(t) \leq N(t)$

定理 I の 2 と前にのべたそれによる手順に準じて、この問題を解こう。

**ステップ 1**  $H(\Psi, G, N, q) = (-\Psi_1 + \Psi_2)(N - q)[\alpha - \gamma(N - q)] - q\Psi_2$ 、関数  $H$  は  $q$  の 2 次関数である。 $H$  に最大値をもたらす  $q$  の値は、 $[0, N]$  の内点にあるとして、 $\partial H/\partial q = 0$  を満足する  $q$  としておく。

**ステップ 2**  $\dot{\Psi}_1 = -\partial H/\partial G = 0, \Psi_1(T) = 1,$

$$\dot{\Psi}_2 = -\partial H/\partial N = \partial H/\partial q + \Psi_2 = \Psi_2,$$

$$\Psi_2(T) = 0.$$

後者の方程式は、ステップ 1 での式と、 $H$  の特殊性とによって得られる。これを解いて、 $\Psi_1^*(t) \equiv 1, \Psi_2^*(t) \equiv 0$  を得る。このとき、 $\partial H/\partial q = -[\alpha - 2\gamma(N - q)] = 0$  より  $q^*(t) = N(t) - \alpha/2\gamma$  を得る。 $0 \leq q \leq N$  であるから、最適制御は(ステップ 3)

$$q^*(t) = \begin{cases} N(t) - \alpha/2\gamma & : N(t) \geq \alpha/2\gamma \text{ のとき} \\ 0 & : N(t) < \alpha/2\gamma \text{ のとき} \end{cases}$$

対応するトラジェクトリは

$$dN/dt = \begin{cases} \alpha^2/4\gamma + \alpha/2\gamma - N, & N(t) \geq \alpha/2\gamma \text{ のとき} \\ N(\alpha - \gamma N), & N(t) < \alpha/2\gamma \text{ のとき} \end{cases}$$

を解いて、次のようになる。

$$N(0) \geq \alpha/2\gamma \text{ のとき, } N(t) = (\alpha^2/4\gamma + \alpha/2\gamma)(1 - e^{-t}) + N(0)e^{-t} (\geq \alpha/2\gamma).$$

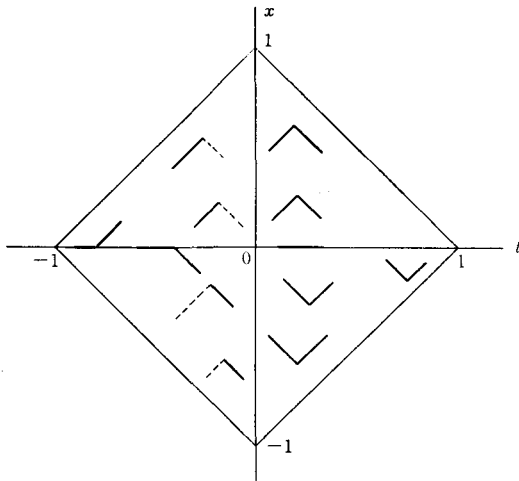


図 4 問題Cのトラジェクトリの可能方向

$N(0) < \alpha/2\gamma$  のとき,  $N(t) = \alpha N(0)e^{\alpha t} / [\alpha + \gamma N(0)(e^{\alpha t} - 1)]$  ... ロジスティック曲線.

最後に, 最大値原理は, 最適性の必要条件であることを注意しておこう. つまり, 最適制御の存在が確認されていて, 最大値原理を満足する許容制御が唯一であるときに限り, それが最適であると言える. ところが, 最大値原理を満足する許容制御が複数個, ときに無限個ある場合さえ多々ある(たとえば, 問題A, 図3の初期状態の中央の領域の場合, 以下の例参照). この場合には, 得られたどの制御が最適であるかを別の方法で判定しなければならない.

最大値原理を満足する許容制御, トラジェクトリのある問題の例で, 問題IIの型(ただし, 固定端点, 固定時刻)の問題をあげよう.

**問題C** 目的関数  $J(u(\cdot), x(\cdot)) = -\int_{-1}^{+1} t(x)^2 dt$   
→最小

- 制約条件 (i)  $\dot{x} = u$   
(ii)  $x(-1) = x(1) = 0$   
(iii)  $-1 \leq u \leq 1$

この問題は, 被積分関数が  $t$  に依存する積分形式の目的関数をもつもので, 定理IIの後にのべた変形を要する. ここでは, それらを省略して, 解の概略をのべる.

$H = -\Psi_0 t(x)^2 + \Psi_1 u, \dot{\Psi}_1 = 2\Psi_0 t x, \Psi_0 = \text{const}, \Psi_0 < 0$

ステップ1  $u^* = 1, \Psi_1(t) > 0; u^* = -1, \Psi_1(t) < 0;$

さらに,  $u^* = 0$ , このとき  $x(t) = 0$ . ステップ2, 3  $\Psi_1$  に関する方程式から, 第1象限では, 上記の方程式から,  $\dot{\Psi}_1 < 0$ , したがって, 符号変化があるとすれば,  $\Psi_1^*(t) > 0 \rightarrow \Psi_1^*(t) < 0$  したがって,  $u^*(t) = 1 \rightarrow u^*(t) = -1$ , に高々1回切り換わる. 切り換えがあるとすれば, トラジェクトリは, 制約条件の方程式から,  $x^*(t) = t + c_1$

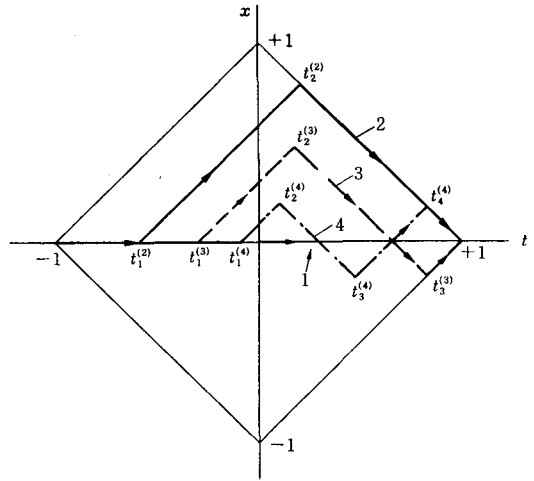


図 5 問題Cの最適トラジェクトリ候補例

$\rightarrow x^*(t) = -t + c_2$  と変わる. このことを図4の第1象限のように記号Aで表現する. 他の象限についても同様に. 第2象限と第3象限との点線は, もし,  $\Psi_1$  の符号からは考えられる, そのような折線があるとすれば, 初期条件の関係で, 逆向きの折線が生じることになるが, それは許されないことから, 実線で示す一方のトラジェクトリしかあり得ないことを意味している.

最大値原理を満足するトラジェクトリの例を図5に描いてある. それらは, それぞれ次のようにして定まる.

1.  $x(t) \equiv u(t) \equiv 0, \Psi_1(t) \equiv 0$  のとき, 2.  $x(t) = u(t) = \Psi_1(t) \equiv 0, -1 \leq t < t_1^{(2)} < 0; u(t) = 1, \Psi_1(t) > 0, t_1^{(2)} \leq t < t_2^{(2)}; u = -1, \Psi_1 < 0, t_2^{(2)} \leq t \leq 1$ . 点  $t_1^{(2)} < 0, t_2^{(2)}$  は, 条件  $\Psi_1(t_2^{(2)}) = 0, x(1) = 0$  から, 一意的に定まる. 以下3, 4も同様. 図5に描かれているものの他にも最大値原理を満足する無数に多くのトラジェクトリがある(どれが, 実際に最適であろうか?).

次回は, このような難点の克服を目指した, 最適性の十分条件にもとづく, 最適制御の決定方法についてのことにする.

### 次号予告

#### 特集 OA と OR

- |                      |                   |
|----------------------|-------------------|
| OAの全体像               | 山本直三              |
| OAシステムの構築            | 池田毅彦              |
| 電気通信革命とOA            | 小松崎清介             |
| OAにおけるエンドユーザー用ソフトウェア | 中村昂・浜口強・山田昇司・野上昌彦 |

解説 最適制御理論の動向(3) 坂本実  
連載講座 マトロイド理論の基礎(8) 大山達雄