マトロイド理論の基礎(6)

大山 達雄

前回にひき続いて双対マトロイドについてのべる．まずグラフ G を対象とした閉路マトロイド $M(G)$ の双対マトロイドについて考えてみよう．

〔閉路マトロイドとカットセットマトロイド〕

グラフ G が与えられた時，弧の集合 E 上で定義された閉路マトロイド $M(G)$ の双対マトロイド $(M(G))^*$ と 3.3 節で定義したカットセットマトロイド $M^*(G)$ の間には，次の定理にある関係が成立する．

定理 4.3 グラフ G の弧の集合 E 上で定義された閉路マトロイド $M(G)$ の双対マトロイド $(M(G))^*$ とカットセットマトロイド $M^*(G)$ の間には次の関係が成立する．

$$(M(G))^* = M^*(G). \tag{4.18}$$

証明 グラフ G の弧の集合 E 上で定義された閉路マトロイド $M(G)$ の双対マトロイド $(M(G))^*$ とカットセットマトロイド $M^*(G)$ のサーキットが同一であることを示す．

まず $(M(G))^*$ のサーキット C^* を考えると，C^* はマトロイド $(M(G))^*$ のいずれの基底にも含まれない．したがって C^* はマトロイド $M(G)$ のすべての基底と共通な要素を有する．閉路マトロイド $M(G)$ の基底はグラフ G の完全木あるいは完全森であるから，C^* は G のどの完全木あるいは完全森とも共通な弧を有する．3.3 節の議論からもわかるように，C^* はグラフ G のカットセットを含まなければならない．

また一方，D^* をグラフ G のカットセットすると，D^* はグラフ G のすべての完全木あるいは完全森と共通な要素を有する．したがって D^* は双対マトロイド $(M(G))^*$ のいずれの基底にも含まれない．つまり D^* は $(M(G))^*$ において従属集合でなければならず，D^* は $(M(G))^*$ のサーキットを含むことになる．

以上から閉路マトロイド $M(G)$ の双対マトロイド $(M(G))^*$ のサーキット C^* の集合とカットセットマトロイド $M^*(G)$ のサーキット D^* の集合は同一でなければならない．したがってこれらの2つのマトロイド $(M(G))^*$, $M^*(G)$ は同一であることがわかる． ☒

前にものべたように，グラフ G のカットセットは，弧の集合 E の部分集合のうちで，その部分集合に含まれる弧をグラフ G から除去すると G の連結成分の数が増加するような特性を有する要素数極小のものである．上の定理 4.3 からもわかるように，グラフ G のカットセットは，閉路マトロイド $M(G)$ の双対マトロイド $(M(G))^*$ のサーキットであることから，$M(G)$ のサーキットであるグラフ G の閉路に対応して，双対閉路(cocycle)とよばれることもある．したがってマトロイド $(M(G))^*$ は，カットセットマトロイド $M^*(G)$ であると同時に，双対閉路マトロイド(cocycle matroid)とよばれる場合がある．

上の定理 4.3 から次の系は自明であろう．

系 4.4 弧の集合 E を有するグラフ G において，弧の部分集合 $A \subseteq E$ がカットセットマトロイド $M^*(G)$ の基底であるということは，集合 A の E に関する補集合 $\bar{A}(=E \backslash A)$ がグラフ G の完全木あるいは完全森であることと等価である．

これまでに与えたいくつかの概念をより明確にするために，例を掲げよう．図 4.13 にあるようなグラフ G を考える．

G の弧の集合を $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ とする．たとえば集合 $\{1,2,3\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,4,6\}$ などはグラフ G の閉路であるので，E 上の閉路マトロイド $M(G)$ のサーキットに相当する．それに対して集合 $\{1,3,5\}$, $\{1,2,6\}$, $\{2,3,4\}$, $\{4,5,6\}$ などはグラフ G のカットセットあるいは双対閉路であるので，E 上のカットセットマトロイド $M^*(G)$ のサーキットに相当する．

また一方，集合 $\{1,3,5\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,4,6\}$ などはグラフ G の完全木であるので，$M(G)$ の基底をなしている．それに対して $\{2,4,6\}$, $\{3,5,6\}$, $\{2,3,5\}$ などはグラフ G の完全木の補集合であるので，系 4.4 からもわかるように，カットセットマトロイド $M^*(G)$ の基底の集

おおやま たつお 埼玉大学

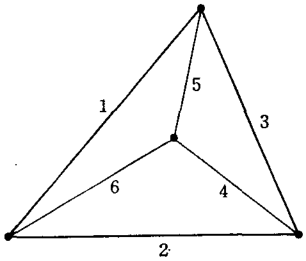

図 4.13　グラフG

合となる.

マトロイド理論における双対性の概念は，グラフ理論とも密接に関連して非常に数多く用いられ，多くの有用な結果を提供している．たとえば一般のマトロイドで成立する事実において，「マトロイド」を「双対マトロイド」と置き換えて別の表現を用いることによって，新しい事実を得ることが可能となることがよくある．したがってグラフ理論等におけるひとつの事実をマトロイド理論の双対性を用いることによって，より広く一般的に表現することも可能である.

例を示そう．定理 4.3 の証明のところでも用いた，“連結グラフの完全木とカットセットが必ず共通の弧を有する”という事実は，マトロイドの双対性の概念を用いると次の定理のようになる.

定理 4.5　マトロイドMのすべての双対サーキットは，Mのすべての基底と共通な要素を有する.

証明　有限な集合E上で定義されたマトロイドMの双対サーキットをC^*とする．いまC^*がMのある基底Bに対して$C^*\cap B=\phi$(空集合)とすると，$C^*\subseteq\bar{B}(=E\backslash B)$でなければならない．したがって$\bar{B}$は$M^*$の基底であることから，$M^*$におけるサーキット$C^*$が$M^*$の基底に含まれることになるので矛盾である．　⊠

なお上の定理 4.5 の逆に関しては，マトロイドMのすべての基底と共通な要素を有するもののうちで極小な集合がMに関する双対サーキットであると言うことができる．また定理を双対マトロイドにおいて考慮することによって次の系が得られる.

系 4.6　マトロイドMのすべてのサーキットは，Mのすべての双対基底と共通な要素を有する.

系 4.6 の逆に関しては，マトロイドMのすべての双対基底と共通な要素を有するもののうちで極小な集合がMに関するサーキットであると言うことができる.

グラフ理論における用語を用いると，定理 4.5 は連結グラフの任意のカットセットと完全木とが共通の弧を有することを示し，また系 4.6 は連結グラフの任意の閉路と完全木の補集合とが共通の弧を有することを示している．このような2つの命題を，マトロイド理論における双対性の概念を用いることによって，定理 4.5 としてひとつの形にまとめることが可能であることが理解されるであろう.

定理 4.5 および系 4.6 におけるマトロイドのサーキットあるいは双対サーキットの特徴づけをもとにして，これらの間の一般的な関係を求めてみよう．そのために，まずマトロイドの独立集合の“拡大定理(augmentation theorem)”とも言うべき定理 2.1(2.1 節参照)を双対マトロイドにまで“拡張”した結果を掲げる.

補題 4.7　集合E上でマトロイド$M=(E,\mathscr{I})$とその双対マトロイド$M^*=(E,\mathscr{I}^*)$が定義されている．Eの部分集合$I\subseteq E$, $I^*\subseteq E$に対して，$I\cap I^*=\phi$, $I\in\mathscr{I}$, $I^*\in\mathscr{I}^*$とすると，$I\subseteq B$, $I^*\subseteq B^*$かつ$B\cap B^*=\phi$(空集合)を満足するようなM, M^*の基底B, B^*が存在する.

証明　集合I^*はM^*における独立集合であるから，I^*および$\bar{I}^*(=E\backslash I^*)$は

$$I^*\in\mathscr{I}^* \Leftrightarrow \sigma(\bar{I}^*)=E$$

なる関係を満たしている（前回に紹介した式(4.11)を参照)．したがって集合$\bar{I}^*$はマトロイドMにおける基底を含む．いま$I\in\mathscr{I}$であるから，集合Iを拡大してMの基底Bを作ることができる．つまり$B\subseteq\bar{I}^*$であるから，$B^*=\bar{B}=E\backslash B$とすれば補題にある$B$, B^*が得られたことになる．　⊠

上の補題 4.7 に前述の定理 4.5 および系 4.6 を合わせて用いると，マトロイドのサーキットと双対サーキットとの関係を表わす次の定理が得られる.

定理 4.8　マトロイドMの任意のサーキット，双対サーキットをそれぞれC, C^*とすると，これらの間には次の関係が成り立つ.

$$|C\cap C^*|\neq 1. \tag{4.19}$$

証明　いまマトロイド$M=(E,\mathscr{I})$のサーキットCと双対マトロイド$M^*=(E,\mathscr{I}^*)$のサーキットC^*との間に

$$|C\cap C^*|=1$$

が成立していると仮定する．$C\cap C^*=\{e\}$とすると，

$$I=C\backslash\{e\}\in\mathscr{I},\quad I^*=C^*\backslash\{e\}\in\mathscr{I}^*$$

$$I\cap I^*=\phi\ (\text{空集合})$$

であるから，補題 4.7 より

$$I\subseteq B,\quad I^*\subseteq B^*$$

$$B\cap B^*=\phi\ (\text{空集合})$$

を満足するようなMの基底BとM^*の基底B^*が存在する．ところが$B\subseteq\bar{I}^*=E\backslash I^*$であって，さらには定理 4.5 より

$$|C^*\cap B|\geqq 1$$

でなければならない．したがってCとC^*の共通部分である要素eは$e\in B$となるので，Mの基底Bが$I\cup\{e\}=C$なるサーキットCを含むことになり，これは基底の

性質に矛盾する． ☒

グラフ理論において連結グラフの閉路とカットセットとが共有する弧の数が偶数個であるという命題を，マトロイドの分野に一般化したものが上の定理 4.8 に相当することは明らかであろう．

〔Minty の彩色定理〕

定理 4.8 と密接に関連しているものとして 1966 年に G.J. Minty注）が紹介した彩色定理（painting theorem）とよばれる興味ある定理がある．結果のみを掲げることにする．

集合 E の要素を R, Y, G の 3 つの部分集合（共通部分を有しない排反な部分集合とする），ただし $|Y|=1$，に分割する．それぞれの部分集合 R，Y，G に含まれる要素を赤（red），黄（yellow），緑（green）に彩色する．この時，集合 E の任意の分割に対して次の定理が成立する．

定理 4.9（Minty） 上述のような集合 E の任意の分割，彩色が与えられている．この時，集合 E 上で定義された任意のマトロイド M に関して，以下の（a），（b）のうちのいずれか一方が成り立つ．

（a） Y と G に含まれる要素のみから成る M のサーキットが存在する．

（b） Y と R に含まれる要素のみから成る M の双対サーキットが存在する．

Minty の定理を（無向）グラフのすべての弧を赤，黄，緑のいずれかに彩色した場合（ただし黄色の弧は 1 本のみとする）にあてはめると，定理 4.9 における（a），（b），の意味するところは明らかとなるであろう．また有向グラフの弧の集合を対象とする，Minty との定理は次のようにのべることができる．

定理 4.10 有向グラフの 1 本の弧 e を黄色に彩色する．他の弧をすべて赤，黄，緑のいずれかに彩色すると，以下の（a），（b）のうちのいずれか一方が成立する．

（a） 弧 e を含み，黄と緑の弧のみから成る閉路が存在する．ただしこの閉路における黄色の弧はすべて弧 e と同じ向きを有する．

（b） 弧 e を含み，黄と赤の弧のみから成るカットセットが存在する．ただしこのカットセットにおける黄色の弧はすべて弧 e と同じ向きを有する．

証明 有向グラフの頂点の集合を V，有向弧の集合を $E=\{(u,v)\,|\,u\in V, v\in V\}$ とする．さらに E に含まれる弧を赤の弧の集合 R，黄の弧の集合 Y，緑の弧の集合 G の 3 つの集合に分割し，特定の黄色の弧を $e=(u_0, v_0)$，$u_0\in V$，$v_0\in V$ と表わす．

次のようなラベリングを考える．

（i） $S=\{v_0\}$ とする．

（ii） 弧 $(u,v)\in E$ に対して

（1） $u\in S$，$v\notin S$ かつ $(u,v)\in G\cup Y$ ならば $S\cup\{v\}$ を新しい S とする．

（2） $u\notin S$，$v\in S$ かつ $(u,v)\in G$ ならば $S\cup\{v\}$ を新しい S とする．

上の（ii）の操作をそれ以上 S の要素数を増加できなくなるまでくり返す．この時 $u_0\in S$ であれば，$v_0\in V$ から $u_0\in V$ へいたる緑と黄の弧から成る閉路が存在し，そに含まれる黄色の弧はすべて同じ向きを有する．したがれってこの場合には定理の（a）が成立する．

一方 $u_0\notin S$ とすると，S の V に関する補集合 $\bar{S}=V\backslash S$ に対して，集合 $\{(u, v)\,|\,u\in S, v\in\bar{S}\}$ に含まれる弧はすべて赤である．また集合 $\{(u, v)\,|\,u\in\bar{S}, v\in S\}$ に含まれる弧はすべて赤か黄でなければならない．したがってこれらの 2 つの弧の集合は，黄と赤のみの弧から成るカットセットを含む．このようにして定理の（b）が成立する． ☒

定理4.9および定理4.8の式（4.19）を同時に満たすようなサーキットおよび双対サーキットの集合族を $\mathscr{C}$，$\mathscr{C}^*$ として，これらを有限集合 E 上で定義づけた系（E, $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}^*$）を Minty はグラフォイド（graphoid）とよんでいることをつけ加えておこう．

〔マイナーマトロイドの双対性〕

4.1 節に紹介したマトロイドの限定あるいは縮約について考えてみよう．

双対マトロイドの概念を用いると，限定マトロイド，縮約マトロイドあるいはそれらの限定，縮約の操作の組合せによって得られるマイナーマトロイドに関して多くのことが容易に得られる．そのような例をいくつか以下に紹介しよう．

定理 4.11 集合 E 上で定義されたマトロイド M の部分集合 $T\subseteq E$ 上への限定マトロイド，縮約マトロイドに関しては，以下の関係が成り立つ．

$$\begin{cases}(M\cdot T)^*=M^*|T \\ (M|T)^*=M^*\cdot T\end{cases} \tag{4.20}$$

つまり有限集合 E 上で定義されたマトロイド M の部分集合 $T\subseteq E$ 上への限定マトロイド $M\cdot T$ の双対マトロイドは，M の双対マトロイド M^* の T 上への縮約マトロイドと同型であり，また M の T 上への縮約マトロイド $M|T$ の双対マトロイドは，M^* の T 上への限定マトロイドと同型であることが上の定理の示唆するところで

注） G. J. Minty : On the axiomatic foundations of the theories of directed line graphs, electrical networks and network programming, *Journ. Math. Mech.*, Vol. 15, 1966, pp. 485–520

ある．

証明　まず(4.20)の最初の式を示そう．

マトロイドMおよびその双対マトロイドM^*の階数関数をそれぞれr, r^*とする．さらにMのT上への限定マトロイド$M\cdot T$の階数関数を$r_{M\cdot T}$とし，その双対マトロイド$(M\cdot T)^*$の階数関数を$r_{M\cdot T}^*$とすると次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} r_{M\cdot T}^*(X) &= |X| - r_{M\cdot T}(T) + r_{M\cdot T}(T\backslash X) \\ &= |X| - r(T) + r(T\backslash X), \quad X\subseteq T. \end{aligned} \tag{4.21}$$

一方，双対マトロイドM^*のT上への縮約マトロイド$M^*|T$の階数関数$r_{M^*|T}$は，以下のように表わすことができる．$X\subseteq T$, $\bar{X}=T\backslash X$, $\bar{T}=E\backslash T$とすると

$$\begin{aligned} r_{M^*|T}(X) &= r^*(X\cup\bar{T}) - r^*(\bar{T}) \\ &= r^*(E\backslash\bar{X}) - r^*(\bar{T}) \\ &= |E\backslash\bar{X}| - r(E) + r(\bar{X}) - (|\bar{T}| - r(E) \\ &\quad + r(T)) \\ &= |X| - r(T) + r(T\backslash X), \quad X\subseteq T. \end{aligned} \tag{4.22}$$

したがって(4.21)，(4.22)から，$r_{M\cdot T}^*$と$r_{M^*|T}$の2つの階数関数は等しくなる．このようにして$(M\cdot T)^*=M^*|T$の関係が証明された．

またもうひとつの関係$(M|T)^*=M^*\cdot T$は，式(4.20)の最初の式において，マトロイドMをM^*と置き換えた上で両辺のマトロイドの双対をとることによってただちに得られる．　⊠

さて上の定理4.11を用いて得られる，マイナーマトロイドに関する結果を紹介しよう．有限集合Eの部分集合を$T\subseteq E$, $S\subseteq E$かつ$S\subseteq T$とする．マトロイドMのSあるいはTへの限定，縮約の操作の組合せによって得られるマイナーマトロイドに関しては，次の定理が成立する．

定理 4.12　有限集合E上のマトロイドをMとし，Eの部分集合であるS, Tが$S\subseteq T\subseteq E$なる関係を有するとすると，以下の関係が成立する．

$$\begin{cases} (\mathrm{a}) & M\cdot S=(M\cdot T)\cdot S \\ (\mathrm{b}) & M|S=(M|T)|S \\ (\mathrm{c}) & (M\cdot T)|S=(M|(E\backslash(T\backslash S)))\cdot S \\ (\mathrm{d}) & (M|T)\cdot S=(M\cdot(E\backslash(T\backslash S)))|R. \end{cases} \tag{4.23}$$

証明　(a)は明白であろう．

(b)は両辺のマトロイドの双対マトロイドが同一であることによって，以下のように示される．

$$\begin{aligned} ((M|T)|S)^* &= (M|T)^*\cdot S && ((4.20)\text{より}) \\ &= (M^*\cdot T)\cdot S && ((4.20)\text{より}) \\ &= M^*\cdot S && ((\mathrm{a})\text{より}) \\ &= (M|S)^*. \end{aligned}$$

(c)は両辺のマトロイドの階数関数が同一であることを示すことによって得られる．

いまマトロイドM, $M\cdot T$, $M|(E\backslash(T\backslash S))$の階数関数をそれぞれ$r$, r_1, r_2とし，またマトロイド$(M\cdot T)|S$および$(M|(E\backslash(T\backslash S)))\cdot S$の階数関数をそれぞれ$r_1'$, r_2'とすると，関数$r_1'(X)$, $r_2'(X)$, $X\subseteq S$, はそれぞれr_1, r_2, rを用いて以下のように書くことができる．

$$\begin{aligned} r_1'(X) &= r_1(X\cup(T\backslash S)) - r_1(T\backslash S) \\ &= r(X\cup(T\backslash S)) - r(T\backslash S). \\ r_2'(X) &= r_2(X) \\ &= r(X\cup(T\backslash S)) - r(T\backslash S). \end{aligned}$$

したがって

$$r_1'(X)=r_2'(X), \quad X\subseteq S$$

が得られる．

また(c)の両辺のマトロイドの双対マトロイドを考える．

$$\begin{aligned} &((M\cdot T)|S)^*=((M|(E\backslash(T\backslash S)))\cdot S)^* \\ &(M\cdot T)^*\cdot S=(M|(E\backslash(T\backslash S)))^*|S \\ &(M^*|T)\cdot S=(M^*\cdot(E\backslash(T\backslash S)))|S. \end{aligned}$$

したがって上式においてM^*をMに置き換えると，(d)の関係が得られる．　⊠

以上で本節の主題である双対マトロイドの概要の紹介を終えるが，マトロイド全般における双対性の概念とグラフの双対性との関連については，後に5.2節で詳細にのべることにする．

昭和55年度

鹿島学術振興財団研究助成決定

鹿島学術振興財団の昭和55年度研究助成に本学会推薦のうち下記2件が採択され，研究を進めております．

1. 研究課題：地理的情報に関する基本アルゴリズムの調査研究
   研究代表者：伊理正夫
   共同研究者：原野秀永，韓豊太郎，岡部篤行，腰塚武志，四方野英彦，中森真理雄，浅野孝雄，室田一雄
   助成金額：400万円
2. 研究課題：都市廃棄物の処理に関する研究
   研究代表者：青木兼一
   共同研究者：藤永靖彦，尾崎俊治，桑原兵二郎，平木秀作
   助成金額：300万円