解説

最適制御理論の動向 (1)

坂本　実

1. はじめに

最適化のための数学的理論，方法は，古典的変分法，数理計画法，最適制御理論に大別される．これらは，それぞれ独自の発展の歴史をもっている．最近これらの理論を特にその必要条件について，統一的立場から論ずる，いわゆる「極値問題の理論」として統合されようとしている．

この方向の発展のきっかけになったのは，ソビエトのヅボビツキー (Dubovitskii, A. Ya) とミリュチン (Milyutin, A. A)の研究［1］であって，多くの研究者がそれを発展させ，応用してきた．特に，ボルチャンスキー (Boltyanskii, V. G) は，これを厳密化，簡潔化して，「テント法」(ロシア語，Memog Шамров) と名づけ，種々の問題に適用している［2］．

この連載の最初の主題は，この統一的理論を，特に最適制御理論に重心をおいた解説である．

現実の問題を解決するために最適性の必要条件を基礎とする方法を用いるときには，種々の難点が生じることがある．十分条件は，必要条件ほどには一般的なものが開発されてはいないが，最適制御理論では，広い範囲の問題に適用できる方法が，クロトフ(Krotov, B. F) とグルマン(Gurman, V. I)によって提案されている[3]．この方法の解説と応用とがこの連載の2つめの主題である．

最適制御理論，特に，ポントリャーギンの最大値原理が，オペレーションズ・リサーチで，そのままの形で用いられることは，工学，経済学に比較して，少ないようである．ところが，たとえば，コーリン・クラーク(Colin, W, Clark) の，漁業資源の有効利用の問題を扱った書物［4］，その書評［5］にみられるように，OR研究者が進出すべき分野のうちに，最適制御理論の方法が有効な道具となるものがある．この資源管理分野への応用を中心とする，最適制御理論の応用例の解説が，この連載の3つめの主題である．

なお，最近，生物学での最適制御理論の応用を扱った，興味ある書物［6］が出版された．

急速に発展しつつあるこの分野全般についての解説を行なうことは，もちろん不可能なことである．この連載は比較的紹介の少ない，ソビエトでの研究が紹介されることが特徴といえば，いえないこともないものとなるであろう．記述は，高等の数学的知識を前提とせずに，「本質的なことがらを，できるだけ平易に」書くように努める．

2. 極値問題の理論——必要条件の一般的理論への道

オペレーションズ・リサーチの問題は，すべて広い意味での，最適化の問題である．最適化の問題は，いうまでもなく，OR以外の，諸科学，技術のあらゆる分野で生じる問題である．数学は，その歴史のあらゆる段階で，新しく提起された最適化の問題を解決してきた．しかし，強力にしかも系統的に研究されるようになったのは，比較的新しいことである．そのような研究が行なわれるようになったのは，経済，経営，OR，自動制御などの分野からの要求が高まったことと，電子計算機の出現によって，問題の数値的最終結果を得る強力な手段が得られたことによるためだといえよう．

最適化の問題を数学を用いて解決するためには，まず最初に，それが生じた分野ごとの言葉で記述された問題を数学の言葉で表現しなければならない．次に，その問題の解が満たすべき定量的な関係式(最適性の必要条件，十分条件) を明らかにしなければならない．つづいてなすべきことは，解を具体的に求め，作り出すことである．理論上は，解の存在，一意性も問題とされるが，解の必要条件を作り出すことは，とりわけ重要な仕事である．

さかもと　みのる　専修大学

これについては，広い範囲の問題に適用できる，できるだけ完全な条件を探す方向での多くの研究がなされてきた．

さて，数学的に定式化された最適化の各々の問題を極値の問題（problem of extremals）とよび，それらに関する統一的立場から研究する理論を極値問題の理論（theory of extremal problems）とよぶことにしよう．極値問題の理論のうちに含めることができるであろう，古典的変分法（Calculus of variation），等式条件のもとでの関数の最小値（最大値）を求めるラグランジュ（Lagrange, J. 1736-1813）の問題では，オイラーの（Euler, L. 1707-1783）方程式，ラグランジュの乗数法（multiplier rule of Lagrange）といった，最適性の必要条件が古くから得られていた．

極値問題の理論の新しい発展段階は，1939年のカントロビッチ（Kantrovich, L. V）による，後に，線形計画法（linear programming）とよばれるようになる問題の研究にしてしまった．これは，ダンチッヒ（Dantig, G）を中心とする多くの研究者によって完成され，広く実際上の問題に応用されていることはよく知られたことである．極値の必要条件に関する理論，極値問題の理論の第２段階は，不等式制約条件のもとで，凸関数である目的関数を最小化する凸計画法（convex programming）であった．この理論において中心的役割を課したのはキューンタッカーの理論（Kuhn-Tucker theory, 1951）である．これは，解を具体的に求めるための多くのアルゴリズムのよりどころとされた．その考えは，凸でない有限次元の極値の問題にも拡張され，非線形計画法（non-linear programming），数理計画法（mathematical programming）とよばれる分科が形成されることになる．

線形，非線形計画法における必要条件を導き出す際の原理的な考えは「与えられた点から進むとき，許容領域を出ずに，目的関数の値が大きくなる方向があるならば，その点は最小点ではない」とのべることができる．ズーテンディク（Zautendijk, G）によって，その著書（「Methods of Feasible Directions」, 1960）にまとめられたこの原理は，微分可能な制約条件をもつ有限次元空間での広い範囲の問題に対して，極値の必要条件を定式化するために用いられた．

このような有限次元の極値問題の理論，すなわち，数理計画法の理論が発展しているのと時を同じくして，もう１つのクラスの極値の問題，最適制御の問題（optimal control problems）が研究されていた．1950年代の初めに，ベルマン（Bellman, R）は，動的計画法（dynamic programming）とよぶ，いわゆる「最適性の原理」（principle of optimality）に基礎をおく，広い応用範囲をもつ方法を提案した．この方法は，理論，応用の両面にわたって大きな貢献をなした．

最適制御の問題の研究での決定的な一歩は，ポントリャーギン（Pontryagin, L. S）の最大値原理（maximum principle）の形での極値の必要条件の定式化であった（[９]，[10]）．この理論を中心として，最適制御理論（theory of optimal control）が形成されることになる．ボルチャンスキー（Boltyanskii, V. G）がはじめて行なったこの最大値原理の証明（1956）は，それまでのものとは異質で，まったく新しい方法が用いられた．

当然のこととして，多くの研究者が，この最大値原理を，古典的変分法，数理計画法の考えと方法によって証明することが試みた．このことが成功することは，美的価値だけでなく，実用的価値のあることである．つまり，最適制御理論の問題に，数理計画法に関して開発された多くの計算方法が適用できるようになり，その理論が多くの実際的問題に応用できるようになるわけである．

最適制御理論を必要条件の一般理論に組みこむことに，はじめて成功したのは，すでにのべたミリュチンとヅボビツキーであった．彼らは，それまでに知られていた極値の問題での必要条件を特殊ケースとして導き出すことのできる，一般的スキームを作り出すことによって，最適化理論の失われていた統一性を回復したのである．彼らの仕事の大きな価値は，このように，すでに研究されている問題はもちろん，新しく生じるであろう広い範囲の問題での極値の必要条件を導くための方式を洗練された形に定式化できたことにある．

ボルチャンスキーは，前述のとおり，この方法を整理，発展させ，離散最適制御問題，ミニ・マックス問題等に適用した．ソビエトにおけるこれらの研究とも関連ある類似の方向の研究は，アメリカのノイスタット（Neustadt, L. W）によってもなされた[７]（抽象理論である．歴史的解説も付けられている）．さらに，これらとは独立に進められたと思われる，凸解析による極値問題の研究にロッカ・フェラーによるものがある[８]（これは凸解析に関する最もすぐれた書物の１つとされている）．

3. 極値の問題—その形式と基本的なクラス

極値問題の理論が対象にするのは，厳密に定式化された「極値の問題」であることをのべた．ところで，幾何学的図形に関する問題から，ロケットの制御にいたる，さまざまの具体的内容をもつ問題の，共通的な形式はどんなものであろうか？　どの極値の問題も，組

$$<f(x),\ X,\ C>$$

で与えられる．ここに，$f(x)$ は集合 X の要素に実数値

($-\infty, +\infty$を含めた)を対応させる写像(関数，汎関数)であって，目的関数(objective function)とよばれるものである．Xは許容クラス(admissible class)とよばれ，これを定めることによって考察の対象となる空間，関数の方式などを指定する．Cは許容集合(admissible set)あるいは制約条件(constraints)あるいは，単に制約などとよばれる，Xの部分集合である．

$X=C$である問題は，制約条件のつかない問題である．制約条件は，①方程式，②不等式，③集合・要素関係式のどれか，またそれらのいくつかを具体的に与えることによって定められる．ここで，③は，ある集合を与えて，その要素であるxだけを対象とすることを意味する．なお，①，②，③の形は，内容を変えることなく，互いにいれかえることができる．こうして，極値の問題は「条件$x \in G$のもとで，Xで定義された関数fの，最小値(下限)；(または，上限，最大値)を求めよ」

と記述される．目的関数の最大化の問題は，目的関数の符号を逆にすることによって，最小化の問題に直すことができるので，最小化の問題として記述したが，これからもそのようにする．

この問題の解とは何かを定義しよう．$x_0 \in X$に対し，x_0のある近傍があって，「すべての$x \in C \cap U$に対し，$f(x) \geqq f(x_0)$」が成立するとき，x_0をこの問題の局所最適解(local optimal solution)という．上の不等式で，$x \neq x_0$であるxに対し，$f(x)>f(x_0)$であるとき，近傍Uにx_0以外の局所最適解はないので，x_0を狭義の局所最適解(strict local optimal solution)をいう．また，「すべての$x \in C$に対して，$f(x) \geqq f(x_0)$」であるとき，x_0を大域最適解(global optimal solution)という．

極値問題の3要素が具体化した問題の，その発生，数学的特徴を考慮した，基本的クラスへの分類を行ない，各クラスでの，代表的な問題の例をあげておこう(必ずしも完全な記述ではない)．

数理計画法の(なめらかな)問題のクラス：**2.** でのべたように，これは有限個の変数の関数(なめらかな，すなわち，連続微分可能な)を目的関数とするものである．より具体的な例には次のものがある．

問題1—1；目的関数　$f^0(x) \to$最小
(フェルマ)　　$X=R^1$：実数
制約条件　なし($C=R^1$)：

問題1—2；目的関数　$f^0(x) \to$最小
(ラグランジュ)　　$X=\{x \mid x=(x_1, \cdots, x_n)\}=R^n$
制約条件　$f^j(x)=0, j=1, \cdots, m$：

問題1—3；目的関数　$f^0(x) \to$最小
(非線形計画法)　　$X=R^n$
制約条件　$f^i(x)=0, i=1, \cdots, p$,
$g^j(x) \leqq 0, j=1, \cdots, q$：

古典的変分法の問題のクラス；古典的等周問題など，幾何学的内容の問題の解決からはじまり，光学，力学におけるいろいろな変分原理を発見し，自然科学の言葉ともなった古典的変分法の問題をいう．ここでは，Xは，連続微分可能な，実数区間$t_0 \leqq t \leqq t_1$上で定義されたn次元ベクトル関数の族であって，$x=x(t)$，$y=y(t) \in X$の距離が，$\max_{t_0 \leqq t \leqq t_1} |x(t)-y(t)|$，$\max_{t_0 \leqq t \leqq t_1} |x(t)|+\max_{t_0 \leqq t \leqq t_1} |y(t)|$等で定義されている．目的関数は，$X$上で定義された汎関数(無限に多くの独立変数の関数とも考えられる)である．制約条件は，微分関係式，$M(x, x(t), \dot{x}(t)) \leqq 0$，境界条件$N(x(t_0)), x(t_1)) \leqq 0$等で与えられる．例をあげよう，目的関数は，汎関数の記号に改める．

問題2—1(古典変分法の最単純問題)

目的関数　$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to$最小
$X=\{x \mid x=x(t), t_0 \leqq t \leqq t_1$；連続微分可能実数値関数$\}$
制約条件　$x(t_0)=x_0$，$x(t_1)=x_1$

ベクトル関数$x(t)=(x^1(t), \cdots, x^n(t))$の場合は，この問題を「古典変分法のベクトル最単純問題」という．以下の問題の表示では，微分関係式，境界条件は省略して，目的関数だけを書く．

問題2—2(ラグランジュ)
$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, \dot{x})dt \to$最小：

問題2—3(マイヤー；mayer)
$J(x(\cdot))=f^0(x(t_0), x(t_1)) \to$最小：

問題2—4(ボルツァ；Bolza)
$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, \dot{x})dt+g(x(t_0), x(t_1)) \to$最小

問題2—5(等周問題)
目的関数　$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, \dot{x})dt \to$最小
制約条件　$\int_{t_0}^{t_1} g_i(t, x, \dot{x})dt=l_i$，$i=1, \cdots, m$：

最適制御の問題のクラス，動的システムの制御に関係した問題であって，システムの入力$u=(u_1, \cdots, u_r)$，出力(状態)$x=(x_1, \cdots, x_n)$，過程(process)とよぶ対$(u(t), x(t))$，$t_0 \leqq t \leqq t_1$，とその評価$J(u(\cdot), x(\cdot))$とに関係する．xの，制御作用$u(t)$を受けておこる，時間にともなう変化規則は，常微分方程式，差分方程式，偏微分方

程式などの各種の関数方程式の解として与えられる．これが，極値の問題としての1つの制約条件となる．他の制約条件には，$x(t)$ の大きさの制約，境界条件があるが，本質的なのは制御 $u(t)$ のクラス，そのとりうる値に関する制約である．ここでは，常微分方程式で記述される対象に限定する．

問題3－1

目的関数 $J(u(\cdot),x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}f^0(t,x(t),u(t))dt+g(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))dt$

制約条件 $\dot{x}=f(t,x,u),\varphi(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))=0$
$u\in U$；$u(t)$，$[t_0,t_1]$上の区分的に連続な関数：

微分方程式条件は，$x(t)$ は $[t_0,t_1]$ で，$u(t)$は不連続点を除いて，微分可能であって，微分可能なすべての点で，$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t))$ が成立することを意味する．（なお，$u(t)$，$[t_0,t_1]$ は，この区間で高い有限個の，第1種の不連続点をもつとき，区分的に連続であるという）．

この問題で，関数 $f^0\equiv1$，$g\equiv0$ とし，制約条件は同じとして

問題3－2（最短時間問題）

目的関数 $J(u(\cdot),x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}dt\equiv t_1-t_0\rightarrow$最小

を，また，$f^0\equiv0$とし，g を f^0 に書き改めて（マイヤー t_0 の問題での汎関数の特別なケース）次の問題を得る．

問題3－3（終端制御問題）

目的関数 $J(u(\cdot),x(\cdot)=f^0(x(t_1))\rightarrow$最小

ところで，具体的内容か同じ問題でも，異なる極値の問題として定式化できるものが多数ある．定式化の例を見ることも目的に，そのような例をとりあげよう．

ガリレオ・ガリレイ（Galileo Galilei, 1564-1642）は，著書「対話」，1636年（岩波文庫，「新科学対話」，下巻，命題36，定理22）で，「円の弦に沿う運動は，その弦を張る弧に沿う運動よりも長時間を要する」ことが証明されている．ヨハン・ベルヌウイ（Johan Bernouilli, 1667-1748）は，1696年，上の一般化ともいえる次の問題を提起した．「垂直平面の与えられた点Aから点Bまで，頂点 u が重力加速度の作用を受けて動くとき，点Bに最短時間で達するような径路―最速降下線（Brachistochrone）を決定せよ」．この問題は，古典変分法の発展の糸口となった問題である．この問題の定式化を行なおう．図1のように，座標軸，点の座標を定め，曲線の方程式を $y=y(x)$ で表わすことにする．ガリレオの法則「質点 M の点 $(x,y(x))$ における速度は，$(0,x)$ 間の曲線 $y(x)$ の形には無関係にたて座標 $y(x)$ だけに依存して，$\sqrt{2gy(x)}$ である（g は重力加速度）」にしたがう．

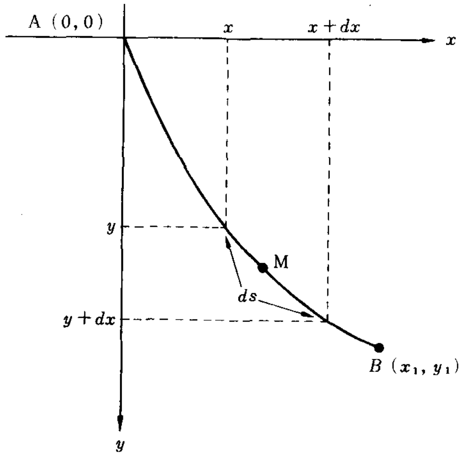

図1 最速降下曲線の問題

曲線 $y=y(x)$ の，点 $(x,y(x))$ から，点 $(x+dx,y(x)+dy)$ までの長さ $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ の間を通過する時間は $ds/\sqrt{2gy(x)}$ であることを考慮して，次の問題を得る．$(y'\equiv dy/dx)$

問題A 目的関数 $J(y(\cdot))=\int_0^{x_1}\sqrt{1+(y')^2}/\sqrt{2gy}\,dx\rightarrow$最小

制約条件 $y(0)=0,y(x_1)=y_1$：

この問題は，前述の問題2－1に属することは容易にわかる．ここで，曲線のパラメータ表示 $x=x(t)$，$y=y(t)$を用いると，パラメータ形式の変分問題が得られる．

もう1つの定式化では，フェルマ（Fermat, Pierrede, 1601-1665）の変分原理「光は時間が最小になる路を通る」と，光の伝播速度が $v^2=2gy$ である非同質な媒体に適用して，次を得る．

問題B 目的関数 $t_1\rightarrow$最小

制約条件 $\dot{x}^2+\dot{y}^2\equiv2gy$
$x(0)=y(0)=0$，$x(t_1)=x_1$，
$y(t_1)=y_1$

光学―力学アナロジーに得られたこの問題は，$f^0\equiv1$，$t_0=0$ である問題2－2である．

さらに，ニュートン（Sir Isaac Newton, 1642-1727）の法則「曲線 $y(x)$ に沿って運動する質点には，速度に垂直な力が作用する」にしたがい，質点の加速度は，作用する力の総和に比例することを考えて，次の，やはり問題2－2に属する別の問題が得られる．

問題C 目的関数 $t_1\rightarrow$最小

制約条件 $\ddot{x}=u,\ddot{y}=g+v,\dot{x}u+\dot{y}v=0$
$x(0)=y(0)=0$，$x(t_1)=x_1$，
$y(t_1)=y_1$：

微分関係式は，$\dot{x}=\sqrt{y}u$，$\dot{y}=\sqrt{y}v$，$u^2+v^2=2g$ と

も書ける．こうして，問題3－2型の，制御 u, v をもつ最適制御問題のクラスの最短時間問題を得る．

最大値原理が最初に証明されたのもやはり「最短時間問題」であった．(「最適化は，まず時間最適から./」？)．ここで，比較のためにも，その自然な形の問題を定式化しておこう．「水平なレール上を，摩擦なしに，運動するトロッコがある．その運動は，ある範囲内で変化させることができる力の作用で制御される．このトロッコを，定められた位置に最短時間で停車させたい．どのように制御すればよいか？」．

トロッコの質量を m，その初期 ($t=0$) 位置を x_0，初速度を v_0，制御の力（けん引力）を u で，トロッコの時刻 t の座標を $x(t)$ で表わそう．ニュートンの法則を考慮して，次を得る．

問題D　目的関数　$t_1 \to$ 最小

制約条件　$m\ddot{x}=u, u_1 \leqq u \leqq u_2$

$x(0)=x_0, \dot{x}(0)=v_0, x(t_1)=\dot{x}(t_1)=0$：

なおこの問題は，たとえば，[9],[10]で解かれている．

これらのいずれの定式化は，汎関数が定義されている関数のクラス──一般形式での X が明確にされていないので，不完全である．ところが，解の存在は，この許容クラスが何であるかに直接的に関係する．また，当初考えていたクラスには解が存在しないので，別のクラスに解を探すこともある．このことに関しては，後に再び検討を行なう．

4.　極値問題におけるテント法 ─基本定理と適用例

3.でのべたすべての問題を含む広い範囲の問題における最適解の必要条件を導き出す1つの理論，方法であるテント法の考えを最適制御理論への適用に先だって，結果が古くから知られている問題1－2（3.参照）を例としてのべよう([2])．

今後は，一般形式 $<f(x), X, C>$ における，C を決定する，個々の方程式，不等式のそれぞれに対応させて，それらを満足する x を集合の形に個々に記述することにする．こうして，この問題では，次の集合を導入して，C をそれらの共通集合として表現する．

$\Omega_j=\{x|f^j(x)=0\}, j=1,\cdots,m$, ; $C=\Omega_1\cap\cdots\cap\Omega_m$.

x_0 がこの問題の最適解であるとして，それが満たすべき条件（必要条件）を導き出すことにする．この点での，勾配ベクトル (gradient vector)，$\partial f/\partial x=(\partial f/\partial x^1, \cdots, \partial f/\partial x^n)$ はゼロでないとする．このとき，点 x_0 を通る関数 $f^0(x)$ の等高曲面 $p=\{x|f^0(x)=f^0(x_0)\}$ は，大きな値の領域 $\{x|f^0(x)>f^0(x_0)\}$ と小さな値の領域

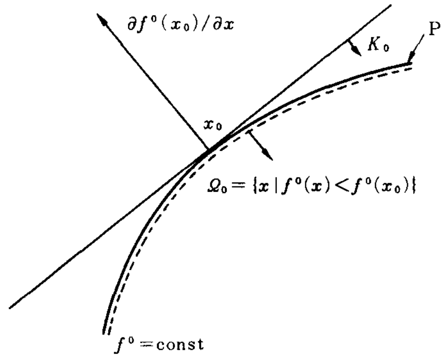

図 2　集合 Ω_0 とそのテント K_0

$\{x|f^0(x)<f^0(x_0)\}$ とを分離するなめらかな超曲面である（図2）．

小さい値の領域に点 x_0 を付加して得られる集合を Ω_0 としよう．つまり，$\Omega_0=\{x_0\}\cap\{x|f^0(x)<f^0(x_0)\}$ とする．このとき，次の定理が得られる．

「x_0 が問題1－2の最適解であるための，すなわち，関数 $f^0(x)$ が $C=\Omega_1\cap\cdots\cap\Omega_m$ で，点 x_0 において最小値をとったのも，必要十分条件は，共通集合

$$\Omega_0\cap\Omega_1\cap\cdots\cap\Omega_m \tag{1}$$

が，ただ1点 x_0 だけからなることである」

まず，必要性を証明しよう．x_0 が最適解であるとする．点 $x'\in\Omega_0\cap C$, $x'\neq x_0$ が求まるとすれば，$f_0(x')<f^0(x_0)$ ($x'\in\Omega_0$ だから) となり，しかも $x'\in C(=\Omega_1\cdots\cap\Omega_m)$ となり，x_0 が最適解であることに反する．次に，十分性を証明する．共通集合(1)はただ1点であるとする．このとき，x_0 が最適解でないとすれば，前提に反して，$x'\in C_1$ で，$f^0(x')<f^0(x_0), x'\neq x_0$ である点 x' が存在することになる．

ここで，集合 Ω_0 は点 x_0 の近くでは，内積 $\partial f^0(x_0)/\partial x\cdot(x-x_0)$ が，正でないようなすべての点 x からなる半空間 (halfspace) K_0 と"わずかしか違わない"ことに注意しよう（図2）．この半空間 K_0 は頂点 x_0 をもつ凸錐である．集合 S は，その任意2点 x, y を端点とする線分 $\alpha x+(1-\alpha)y$, $0\leqq\alpha\leqq1$ を完全に含むとき凸集合 (convex set) であるといい，$x, y\in K$ ならば，$x+y\in K$ であり，$\alpha\geqq0$, $x\in S$ ならば，$\alpha x\in K$ であるものを凸錐 (convex cone) という．これを復習しておこう．

集合 $\Omega_i (i=1, \cdots, m)$ についてもまったく同様に，点 x_0 では，凸錐 $K_i=\{x|\partial f^i(x_0)/\partial t\cdot(x-x_0)=0\}$ と"わずかしか違わない"．こうして，各 $i=0,1,\cdots,m$ に対して，集合 Ω_i な点 x_0 での，さらに一般化されて「テント」とよばれる，接錐 (tangent cone) をもつ．テント $K_i, i=1,\cdots,m$, は x の次元 n に対し，n-1 次元であることに注意しておこう．これまでのことは，どの極値の

問題においても事情は同じであって，問題ごとに，集合 Ω_i がちがっており，テント K_i との関係が複雑になることがある（Ω が，K に完全には含まれない場合もある）.

次に行なうことは，先の定理を基にして，最適解の必要条件を，$K_i, i=0,1,\cdots,m$ を用いて表わすことである．この考えは，従来の線形化の考えと同じ考えである．その条件をどのように求めるかを，3次元の場合について予視してみることにしよう．いま，K_1 と K_2 とが分離されておらずに，点 x_0 を通るある半直線 l で交わっているとする．このときには，Ω_0 と Ω_1 とも交わっていて，その交わりは，点 x_0 における接線が l であるような曲線 L であると予想される．そうなると，$x_0 \neq x' \in L \subset \Omega_0 \cap \Omega_1$ が求まることになる．つまり，「共通集合(1)が，点 x_0 だけからなるためには，K_1 と K_2 は分離されていなければならない」と予想される．

この方向で，2個以上の凸錐の分離性について研究し，テントの概念を厳密化して，次の定理が厳密に証明されている．

定理 1. $\Omega_0, \Omega_1 \cdots \Omega_m$ を n 次元ユークリッド空間 R^n の，共通点 x_0 をもつ集合とし，$K_0, K_1, \cdots, K_m$ をそれらの集合の点 x_0 における，少なくとも1つは n-1 次元でない，テントとする．幾式 $\Omega_0 \cap \Omega_1 \cdots \cap \Omega_m = \{x_0\}$ が成立するためには，錐 $K_0, K_1, \cdots, K_m$ が分離されていなければならない．

この定理は，幾何学的表現の必要条件を与えているが，実用上は，解析的表現の条件が望まれる．これはどのようにして得られるであろうかを予想しよう．2つの錐 K_0, K_1 があって，これを分離する超平面 Γ が求まったとする（図3）．この超平面に垂直で，逆向きのベクトルで，次の条件を満足する2つのベクトル a_0 と a_1 とを選ぶ．

$$a_i \cdot (x - x_0) \geqq 0, \quad x \in K_i \tag{2}$$

$i=\{0,1\}$．a_0 と a_1 とは逆向きであるから，$a_0+a_1=0$ である．a_0, a_1 のうち少なくとも1個はゼロでない（実は，$a_0+a_1=0$ だから，一方のベクトルもゼロでない）．つまり，錐 K_0, K_1 が分離するためには，$a_0+a_1=0$ であって，不等式(2)を成立させる，少なくとも1個はゼロでないベクトル，a_0, a_1 が存在することが必要(十分)である．

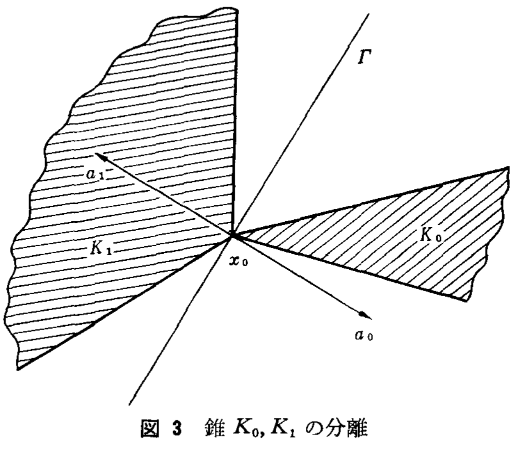

図 3　錐 K_0, K_1 の分離

錐の個数が2個以上の場合にも同様の，次の定理が厳密に証明される．

定理 2. R^n の頂点 x_0 をもつ凸錐 $K_0, K_1 \cdots K_m$ の組が分離されるための必要・十分条件は，$i=0,\cdots,m$ とする(2)を満足し，関係式

$$a_0+a_1+\cdots+a_m=0 \tag{3}$$

を満足する，少なくとも1個はゼロでないベクトル $a_0, \cdots, a_m$ が存在することである．

これの定理1，定理がミリュチンとヅボビツキーの結果をボルチャンスキーが発展させたテント法とよばれる方法の基本となる定理である．当然，この方法を具体的な問題での必要条件を導くために用いるには，それに応じた種々の計算的操作を必要とするわけである．

問題1－2（ラグランジュ）の問題に戻ろう．この問題では，$K_0=\{x|\partial f^0(x_0)/\partial x\cdot(x-x_0)\leqq 0\}$，$K_i=\{x|\partial f^i(x_0)/\partial x\cdot(x-x_0)=0\}$ だから

$$a_0=\lambda_0\partial f^0(x_0)/\partial x,\ \lambda_0\leqq 0\ ;\ a_i=\lambda_i\partial f^i(x_0)/\partial x,\ i=1,\cdots,m$$

とできる．条件(3)から

$$\lambda_0\partial f^0(x_0)/\partial x+\lambda_1\partial f^1(x_0)/\partial x+\cdots+\lambda_m\partial f^m(x_0)/\partial x=0 \tag{4}$$

を得る．このようにして，次のよく知られた次の定理，ラグランジュの定数法が得られる．

定理. x_0 が，問題1－2（ラグランジュの問題）の最適解であるためには，等式(4)を満足する少なくとも1個はゼロでない数 $\lambda_0, \cdots, \lambda_m$ が存在しなければならない（$\lambda_0\leqq 0$ は，(4)が同次方程式であるから本質的ではない）．また，$\partial f^i(x_0)\partial x, \cdots, \partial f^0(x_0)/\partial x$ が独立であれば，$\lambda_0 \neq 0$ であり，$\lambda_0=1$ とできる．

次に，最も単純な，制約条件のない問題1－1に，このテント法の考えを適用してみよう．目的関数 $f^0(x)$ に対して $y=f^0(x)$ として (x,y) ―平面で考える．x_0 が最適解であるとする．$\Omega_0=\{(x,y)|y<y_0\}\cup(x_0,y_0)$，$\Omega_1=\{(x,y)|y=f(x)\}$ とおけば，x_0 が最適解であるための必要十分条件は「$\Omega_0\cap\Omega_1$ がただ1点 (x_0,y_0) からなる」であることが前と同様に容易に証明される．$f(x)$ は点 x_0 が微分可能であるとする．Ω_0, Ω_1 に対する，K_0, K_1 は，$K_0=\{(x,y)|-a_0\cdot(x-x_0,y-y_0)>0\}$，ただし $a_0=(0,1)$；$K_1=\{(x,y)|a_1\cdot(x-x_0,y-y_0)=0\}$，ただし，$a_1=(-f'(x_0),1)$ で与えられることは容易にわかる（図

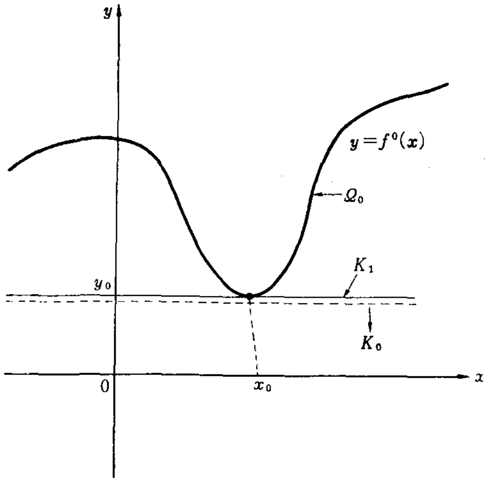

図 4　$y=f(x)$の最小化

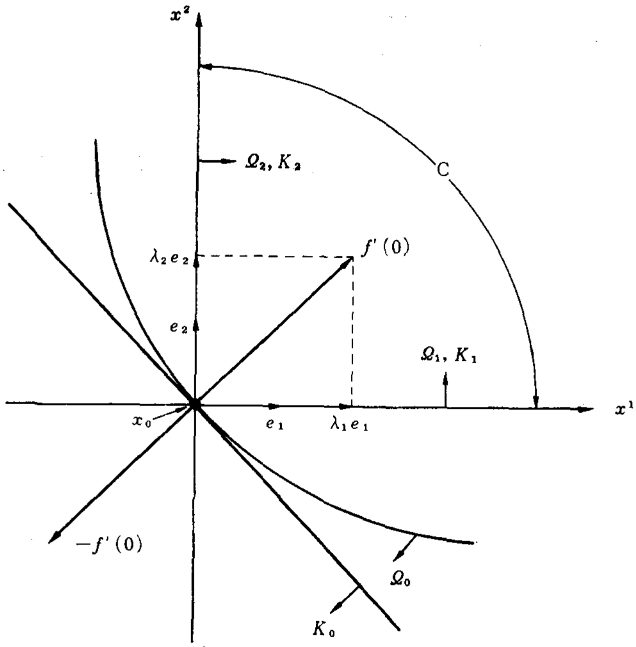

図 5　$f(x), x^1 \geqq 0, x^2 \geqq 0$ の最小化

4)．等式(4)は，$a_0+a_1=(0,-1)+(-f'(x_0),1)=0$ となり，$f'(x_0)=0$ を得る．こうして，テント法の考えによって，微積分で良く知られている結果（フェルマーの定理)「x_0 が，$f(x)$の最小値を与える点であるためには，$f(x)$ が点 x_0 で微分可能であるとき，$f'(x_0)=0'$ でなければならない」を得た．

もう1つ，問題1－3の，特殊ケースである問題

問題1－3′　目的関数　$f(x^1, x^2) \rightarrow$ 最小

f：凹関数

制約条件　$x^1 \geqq 0, x^2 \geqq 0$

へのテント法の適用を行なおう，$x_0=(x_0{}^1, x_0{}^2)$が，この問題の最適解であるとして，この点で成立すべき関係(必要条件)を導く．この問題では，次を得る(図5)．

$\Omega_0=\{x_0\} \cap \{x \mid f(x)<f(x_0)\}, \Omega_1=\{x \mid x^1 \geqq 0\}$,

$\Omega_2=\{x \mid x^2 \geqq 0\}$

点 x_0 で，ベクトル $f'(x)=(\partial f(x)/\partial x^1, \partial f(x)/\partial x^2)$ がゼロでないとして

$K_0=\{x \mid a_0(x-x_0)>0\}$，$K_i=\{x \mid a_i(x-x_0) \geqq 0\}$, $i=1,2$ として，$a_0=-\lambda_0 f'(x_0)$, $a_1=\lambda_1 e_1$, $a_2=\lambda_2 e_2$, $e_1=(1, 0)$, $e_2=(0,1)$, $\lambda_i \geqq 0$, $i=0,1,2$ を得る((3)参照)．等式(4) $a_0+a_1+a_2=0$ から，$\partial f(x_0)/\partial x^1=\lambda_1(\geqq 0)$, $\partial f(x_0)/\partial x^2=\lambda_2(\geqq 0)$となる．結局，

「x_0 が問題1－3′ の最適解であるための必要条件は，$\partial f(x_0)/\partial x^1, \partial f(x_0)/\partial x^2$ のいずれも非負で，どちらか1つはゼロではない」

を得る．

最適制御の問題でなく，数理計画の問題へのテント法適用例の概略をのべた．次回は，これを準備として，最適制御理論の問題への適用例をのべることから始める．

文献(ロシア語原書には＊をつける)

＊[1]　ヅボビツキー，ミリュチン：制約条件付極値問題．「計算数学と物理数学」5, No. 3(1965)，395–453

＊[2]　ボルチャンスキー：極値問題におけるテント法，数理科学の進歩，30, No. 3 (183)(1975)，3–55

＊[3]　クロトフ，グルマン：最適制御の方法と問題．ナウカ，1973

[4]　Colin W. Clark : Mathematical Bioeconomics—The optimal management of renewable resources—, Wiley—Interscience 1976. 352 p

[5]　竹内　啓：[4]の書評，「オペレーションズ・リサーチ」，1979年6月号，381

[6]　巌佐　庸：生物の適応戦略．サイエンス社，1981

[7]　Lucien W. Neustadt : Optimization—A theory of Necessary Conditions, Princeton University Press, 1976

[8]　R. Tyrrell Rockafellar ; Convex Analysis, Princeton University Press, 1970

[9]　ポントリャーギン他，関根訳：最適過程の数学的理論，総合図書，1967

[10]　ボルチャンスキー，坂本訳：最適制御の数学的方法(新版)，総合図書，1974