連載講座

マトロイド理論の基礎(5)

大山 達雄

マトロイド理論においては，各種のマトロイドから一般的に定義されて得られる別のマトロイドが数多く存在し，それらが非常に重要かつ有用な概念となることがしばしば見られる．このように他のマトロイドから一般的に得られるマトロイドを派生マトロイド(induced matroid) と総称する．今回と次回にわたって，これらの派生マトロイドに関する紹介を行なう．

4. 派生マトロイド

4.1 基本的な派生マトロイド

[打ち切りマトロイド]

独立集合族 $\mathscr{I}$ を用いて，有限集合E上にマトロイド $M=(E, \mathscr{I})$ が定義されている．M の階数関数 ρ に対して $k \leqq \rho(E)$を満たす非負整数 k を用いて，M の独立集合族 $\mathscr{I}$ に対して

$$\mathscr{I}_k=\{X \mid X \in \mathscr{I}, |X| \leqq k\} \tag{4.1}$$

とする．式(4.1)で定義される集合族 $\mathscr{I}_k$ が集合E上のもうひとつのマトロイドの独立集合となることは，集合族 $\mathscr{I}_k$ がマトロイドの独立性の公理を満足することから容易にわかる．このようにして定義されたマトロイドを M の k における打ち切りマトロイド (truncated matroid)とよび，M_k と表わす．

打ち切りマトロイド M_k の階数関数 ρ_k は，マトロイド M の階数関数 ρ を用いて以下の式で表わされる．

$$\rho_k(A)=\min\{k, \rho(A)\}, A \subseteq E. \tag{4.2}$$

したがってマトロイド M_k の基底は，M における独立集合のうちで要素数がk個からなる集合であると言うことができる．3章にのべた k–一様マトロイドを考えてみよう．集合 E の要素数を n とすると，k–一様マトロイド $U_{k,n}$ はE の部分集合がすべて独立集合である自由マトロイド(あるいは離散マトロイド)のkにおける打ち切りマトロイド，すなわち $(U_{n,n})_k$，に相当することがわかる．

おおやま たつお 埼玉大学

[限定マトロイド]

マトロイド $M=(E, \mathscr{I})$ の限定(restriction，あるいは簡約(reduction)ともいう) を定義しよう．集合 E の部分集合 $T \subseteq E$ が与えられた時に，E 上のマトロイド M の独立集合族 $\mathscr{I}$ に対して

$$\mathscr{I}_{M\cdot T}=\{X \mid X \in \mathscr{I}, X \subseteq T\} \tag{4.3}$$

とすると集合族 $\mathscr{I}_{M\cdot T}$ がマトロイドの独立性の公理を満たしていることは容易に確かめられる．$\mathscr{I}_{M\cdot T}$ を独立集合族とするマトロイドを M の T 上への限定マトロイド(restriction of M to T，あるいは簡約マトロイド(reduction of M to T))とよび，$M\cdot T$ と表わす．

例をとりあげよう．弧の集合 E を有するグラフ G が与えられた時に，集合 E 上の閉路マトロイド $M(G)$ を考える．グラフ G の弧の集合 E の部分集合を$A \subseteq E$ として，A に含まれる弧から成る G の部分グラフを G の限定グラフとよび，G_A と表わす．この時グラフ G_A の弧の集合 A 上に定義される閉路マトロイド $M(G_A)$ は，グラフ G の弧の集合 E 上に定義された閉路マトロイド $M(G)$ の A 上への限定マトロイドと同一であることが容易に証明される．つまり閉路マトロイド $M(G_A)$ の独立集合は，弧の集合 $A \subseteq E$ の部分集合のうちで閉路を含まないようなものである．すなわちこれは閉路マトロイド $M(G)$ の A の上への限定マトロイドの独立集合に相当する．したがってこれらの閉路マトロイド $M(G)$ および $M(G_A)$ の間には次の関係が成立する．

$$M(G_A)=M(G)\cdot A. \tag{4.4}$$

たとえば図4.1のグラフ G における弧の集合 $E=\{1, 2, \cdots\cdots, 11\}$ 上の閉路マトロイド $M(G)$ と，E の部分集合 $A=\{1,3,5,8,10,11\}$ に対応する図4.2の部分グラフ G_A において定義された閉路マトロイド $M(G_A)$ を考えてみよう．

図4.1のグラフにおける弧の集合のうちでAに含まれていてかつ閉路を含まない集合である $\{1,3,8\}$, $\{8,10\}$, $\{3,10,11\}$ などはいずれも弧の集合 A 上で定義された閉路マトロイド $M(G_A)$の独立集合である．またAに含ま

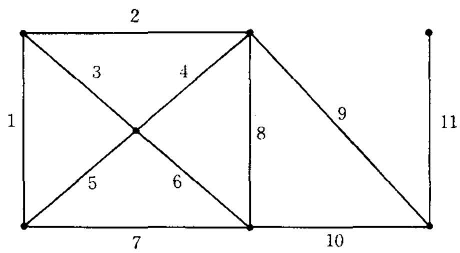

図 4.1 グラフ G

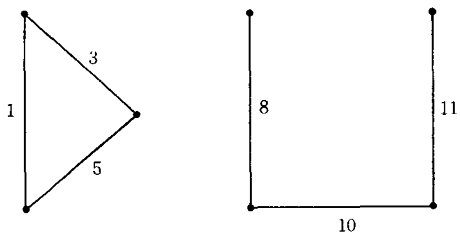

図 4.2 グラフ G_A

れる閉路 $\{1,3,5\}$ は図 4.1，図 4.2 のいずれのグラフに対応する閉路マトロイドにおいてもサーキットを構成している．

一般的には，集合 E 上のマトロイド M の集合 $T \subseteq E$ 上への限定マトロイド $M \cdot T$ は，T に含まれない要素，つまり $\bar{T}=E \setminus T$ に含まれる要素の集合を集合 E から除去することによって得られるマトロイドであると言うことができる．上の図 4.1，図 4.2 のグラフ上の閉路マトロイドにおいてこのことを確認されたい．

マトロイド M の T 上への限定マトロイド $M \cdot T$ の定義は，サーキットを用いて次のようにのべることもできる．マトロイド M の T 上への限定マトロイド $M \cdot T$ は，$M \cdot T$ のサーキットが M のサーキットのうちで T に含まれるもののみであるようなマトロイドである．

限定マトロイド $M \cdot T$ の階数は，M の階数関数を ρ とすると $\rho(T)$ で与えられることもこれまでの議論から明らかである．さらにこれらのマトロイドの閉包については，マトロイド $M, M \cdot T$ の閉包演算子をそれぞれ σ, σ_T とすると，これらの間には次の関係がある．

$$\sigma_T(A)=\sigma(A) \cap T, \ A \subseteq T. \tag{4.5}$$

つまり上の式(4.5)は，$A \subseteq T$ に対して，$\sigma(A) \subseteq T$ であれば $\sigma_T(A)=\sigma(A)$ となり，また $\sigma(A) \nsubseteq T$ であれば $\sigma_T(A)=\sigma(A) \setminus (\sigma(A) \setminus T)$ となることから明らかであろう．

たとえば図 4.1，図 4.2 のそれぞれのグラフに対応する閉路マトロイドを $M(G)$, $M(G_A)(=M(G) \cdot A)$ とすると A の部分集合 $A_1=\{1,3\}$, $A_2=\{8,10\}$ に対する閉包はそれぞれ以下のように与えられる．

$$\sigma_A(A_1)=\{1,3,5\}=\sigma(A_1) \subseteq A$$
$$\sigma_A(A_2)=\{8,10\}=\{8,9,10\} \cap A$$
$$=\sigma(A_2) \cap A.$$

［縮約マトロイド］

マトロイド $M=(E, \mathscr{I})$ の縮約(contraction) についてのべよう．集合 E の部分集合 $T \subseteq E$ が与えられているとする．T の部分集合 $X \subseteq T$ のうちで，T の E に関する補集合 $\bar{T}(=E \setminus T)$ に含まれる，マトロイド M におけるある極大な独立集合 Y に対して $X \cup Y \in \mathscr{I}$ となるような集合 X の族は，マトロイドの独立性の公理を満たすことが以下のようにして示される．マトロイドの独立性の公理のうちの(I1)，(I2)が満たされることは明らかであるので，もうひとつの公理 (I3′) が満たされることのみをここで示そう．

T の部分集合 $X \subseteq T$ に対して，X に含まれる上述のような独立集合のうちの極大なものが同一の要素数を有することは，以下のようにして明らかとなる．Xに含まれる上述の意味での極大な独立集合を X_1, X_2 とする．この時，$\bar{T}(=E \setminus T)$ に含まれる M の極大な独立集合 Y_1, Y_2 が $X_1 \cup Y_1 \in \mathscr{I}$, $X_2 \cup Y_2 \in \mathscr{I}$ となるように存在する．いま $T_0=\bar{T} \cup X$ とすると，集合 $X_1 \cup Y_1$ および $X_2 \cup Y_2$ はいずれも M の T_0 への限定マトロイド$M \cdot T_0$ における基底となる．したがって $|X_1 \cup Y_1|=|X_2 \cup Y_2|$ となり，$|Y_1|=|Y_2|$ および $X_1 \cap Y_1=X_2 \cap Y_2=\phi$ (空集合)であることから，$|X_1|=|X_2|$が得られる．これで独立性の公理 (I3′) が満たされることが示された．このようにして定義されるマトロイドを，M の T 上への縮約マトロイド(contraction of M to T)とよび，$M|T$ と表わす．

マトロイド $M=(E, \mathscr{I})$ の部分集合 $T \subseteq E$ 上への縮約マトロイド $M|T$ の独立集合族 $\mathscr{I}_{M|T}$ は次のように与えられる．

$$\mathscr{I}_{M|T}=\{X \mid X \in \mathscr{I}, \bar{T} \text{ に含まれる } M \text{ の極大な独立集合 } Y \text{ に対して，} X \cup Y \in \mathscr{I}\}. \tag{4.6}$$

なお縮約マトロイド $M|T$ のサーキットには，マトロイド M のサーキットを C とした時に $C \cap T$ で表わされる極小の集合族が相当する．

グラフにおける縮約(contraction) は，次のような操作を意味するものとする．

(1) ループを取り除く．

(2) ループでない弧は，その両端点を“短絡”する．

たとえば図 4.3 のグラフ G における弧の集合 $E=\{1, 2, \cdots\cdots, 7\}$ の部分集合 $\{5,7\}$ を縮約して得られるグラフは図 4.4 に示されている．つまり図 4.3 のグラフの弧の集合 E の部分集合 $A=\{1,2,3,4,6\}$ に対して，$\bar{A}=E \setminus A=\{5,7\}$ に含まれる弧を縮約すると，図 4.4 のグラ

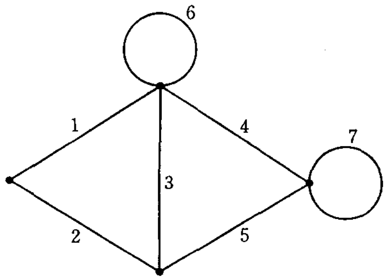

図 4.3 グラフ G

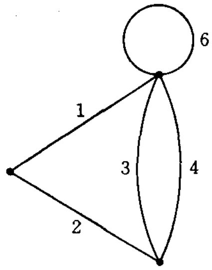

図 4.4 グラフ G^A

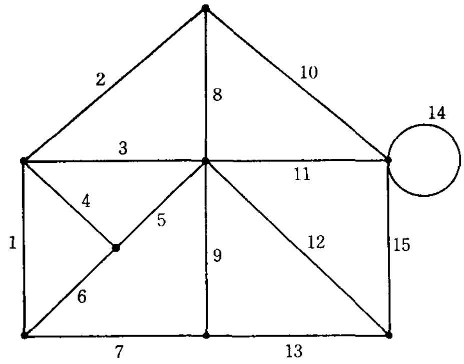

図 4.5 グラフ G

フ G^A が得られる.

一般に弧の集合 E を有するグラフ G の弧の部分集合 $A\subseteq E$ に対して, $\bar{A}=E\backslash A$ に含まれる弧を縮約することによって G から得られるグラフを G の A 上への縮約グラフとよび, G^A と書くことにする. そこでグラフ G 上の閉路マトロイド $M(G)$ を考えるとと, $M(G)$ と弧の部分集合 $A\subseteq E$ に対して得られる縮約グラフ G^A 上の閉路マトロイド $M(G^A)$ との間には次の関係が成立する.

$$M(G^A)=M(G)|A. \tag{4.7}$$

上の(4.7)の関係を, 前述のグラフ G の弧の集合 A 上への限定グラフ G_A 上における閉路マトロイド $M(G_A)$ とグラフ G 上の閉路マトロイド $M(G)$ との関係を与える式(4.4)と比較されたい. 式(4.7)より, グラフ G の A 上への縮約によって得られるグラフ上の閉路マトロイドは, グラフ G 上の閉路マトロイドの A 上への縮約マトロイドに等しいということができる.

縮約グラフ G^A における初等閉路, すなわち閉路マトロイド $M(G^A)$ のサーキットは, グラフ G 上の閉路 C に対して $C\cap A$ で与えられる極小な集合, つまり閉路マトロイド $M(G)$ のサーキット C に対して $C\cap A$ で与えられる極小な集合に相当する.

閉路マトロイド $M(G)$, $M(G^A)$ の例をあげよう. 図4.5にあるように $E=\{1,2,\cdots\cdots,15\}$ を弧の集合とするグラフ G 上の閉路マトロイドを $M(G)$ とする.

E の部分集合 $A=\{1,2,3,5,6,7,8,10,11,14,15\}$ に対して, $M(G)$ の A 上への縮約マトロイドを $M(G)|A$ と表わすと, (4.7)より $M(G)|A$ は図4.6のグラフ G^A 上の閉路マトロイド $M(G^A)$ に等しい. したがってグラフ G^A の弧の集合のうちで G^A の閉路を含まないものはすべて縮約マトロイド $M(G)|A$ の独立集合となる.

たとえば $\{1,2,3\}$, $\{2,7,15\}$, $\{5,6,8,10\}$ などはいずれも $M(G)|A$ の独立集合である. またこれらの弧の集合が A の E に関する補集合 $\bar{A}$ に含まれる極大な独立集合とあわせて, グラフ G の閉路を含まない集合, つまり閉路マトロイド $M(G)$ の独立集合となることもただちに確かめられる.

閉路マトロイド $M(G)|A$ のサーキットはグラフ G^A の初等閉路に対応する. したがってグラフ G^A における弧の集合 $\{1,6\}$, $\{2,3,8\}$, $\{11,15\}$, $\{14\}$ などは $M(G)|A$ のサーキットである. なお $\{1,3,5,6\}$ は $M(G)$ におけるサーキットではあるが, $M(G^A)$ あるいは $M(G)|A$ においてはサーキットではない. 一般のマトロイド M の部分集合 $T\subseteq E$ 上への縮約マトロイド $M|T$ のサーキットは, M のサーキット C に対して $C\cap T$ で表わされる"極小の"集合族であるということに注意されたい.

弧の集合 E を有するグラフ G と部分集合 $A\subseteq E$ とが与えられた時に, G の A 上への縮約として得られる縮約グラフ G^A に関しては, 次の定理が成立する.

定理 4.1 弧の集合 E を有するグラフ G が与えられている. G の弧の集合 $A\subseteq E$ 上への縮約グラフ G^A において, 弧の集合 $B\subseteq A$ が G^A の完全森であるための必要十分条件は, G の $\bar{A}$ 上への限定グラフ $G_{\bar{A}}$ の完全森 $X\subseteq\bar{A}$ が存在して, 弧の集合 $X\cup B$ がグラフ G の完全森となることである.

定理4.1は, 縮約マトロイドの定義のところでのべた独立集合の定義をグラフ G に対する閉路マトロイドの用語を用いて言い換えたものである. マトロイド $M=(E,\mathscr{I})$ の集合 $A\subseteq E$ 上への縮約マトロイド $M|A$ の独立集

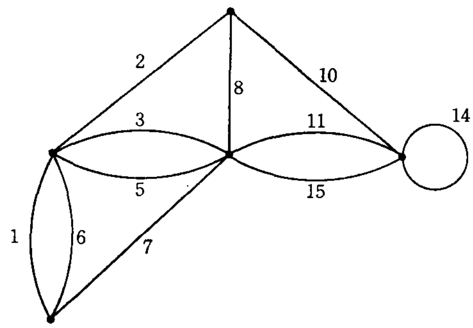

図 4.6 グラフ G^A

合が，A の E に関する補集合 $\bar{A}$ における M のある極大な独立集合 Y に対して，$X\cup Y\in\mathscr{I}$ となるような A の部分集合 $X\subseteq A$ の族であることを用いると上の定理は容易に理解されるであろう．なお定理 4.1 自体の証明は，弧の集合 $\bar{A}$ に含まれる弧の数に関して数学的帰納法を用いることによっても得られることをつけ加えておく．

マトロイド M の階数関数 ρ を用いると，M の集合 $T\subseteq E$ 上への縮約マトロイド $M|T$ の階数関数 $\rho_{M|T}$ は，T の E に関する補集合 $\bar{T}(=E\backslash T)$ を用いて次式のように与えられる．

$$\rho_{M|T}(X)=\rho(X\cup\bar{T})-\rho(\bar{T}),X\subseteq T. \tag{4.8}$$

上の関係は，縮約マトロイド $M|T$ の定義（特に独立集合の定義）からも明らかであろう．したがって(4.8)から，縮約マトロイド $M|T$ の階数が $\rho(E)-\rho(\bar{T})$ で与えられることは明白である．

有限集合 E 上のマトロイド M に関して，E の部分集合の上への限定あるいは縮約の操作の組合せによって得られるマトロイドは M のマイナー (minor) とよばれる．これらについては次節でくわしくのべることにする．

［マトロイドの幾何的表現］

縮約マトロイドの概念をより明確にするために，単純な構造を有するマトロイドを紹介しよう．n 個の要素から成る有限集合 $E=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$ 上のマトロイド M の階数関数を r とし，M の階数は 3 以下であるとする．平面上に E の要素に対応して n 個の点 1, 2, ……, n を定め，E の部分集合 $A\subseteq E$ のうちで

$$|A|\geqq 3 \text{ かつ } r(A)=2 \tag{4.9}$$

なる閉じた集合に属する要素に対応する点を 1 本の線で結ぶことにすると，マトロイド M の非常に有用な幾何的表現が得られる．

なおこの時，M の基底は E の部分集合のうちで要素数 3 個から成り，かつ 1 本の線上にないようなものである．またこのようにして平面上に表現したマトロイドの対応図において，任意の 2 本の線が最大 1 個の点で交わる場合にはマトロイドが唯一に定義される．このことはマトロイドの基底に関する公理を用いると，以下のように説明することができる．

たとえば B_1, B_2 はそれぞれ $|B_1|=|B_2|=3$ を満たすような M の基底であるとする．上の議論から，B_1, B_2 に含まれる要素は，いずれも 3 つの要素が同一の線上にあることはない．いま $b_1\in B_1, B_2=\{b_{21},b_{22},b_{23}\}$ とし，$B_1\backslash\{b_1\}\cup\{b_{2i}\}$ が $i=1,2,3$ なるいずれに対しても M の基底ではないとすると，任意の 2 本の線が最大 1 個の点で交わるという前提に矛盾する．したがって $B_1\backslash\{b_1\}\cup\{b_{2i}\}$ がある i, $1\leqq i\leqq 3$, に対して M の基底となり，B_1, B_2 はマトロイドの基底に関する公理を満足する．このようにして上述の条件を満たす平面上の点集合を対象としてひとつのマトロイドが定義される．

例をあげよう．図4.7 にあるグラフ G の弧の集合 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上の閉路マトロイド $M(G)$ を考える．$M(G)$ に対して，E の各要素に対応する点を平面上にとった上で上述のように表現したものが図 4.8 のマトロイド対応図である．

$M(G)$ のサーキット $\{1,2,3\}$，$\{1,4,5\}$，$\{2,5,6\}$ 等がマトロイド対応図においてそれぞれ同一の線上にあり，また $M(G)$ の基底としての $\{1,5,6\}$，$\{2,3,4\}$，$\{4,5,6\}$ 等がマトロイド対応図においてそれぞれ同一の線上にないということが容易に確認されるであろう．

さて図 4.8 に示されたマトロイドの幾何的表現において，たとえば $\bar{T}_1=E\backslash T_1=\{2\}$ あるいは $\bar{T}_2=E\backslash T_2=\{6\}$ として，これらから得られる縮約マトロイド $M(G)|T_1$ あるいは $M(G)|T_2$ を考えてみよう．これらのマトロイド $M(G)|T_1$, $M(G)|T_2$ の幾何的表現はそれぞれ図 4.9 あるいは図4.10 のようになる．

マトロイド $M(G)$ の T_1 あるいは T_2 上への縮約マトロイドの幾何的対応図は，各要素の対応点が同一の線上にある．また対応図における 2 つの要素 i, j, ただし $i\neq j$, に対応する点は，$\{i, j, 2\}$ あるいは $\{i, j, 6\}$ が同一直線上にある場合に限ってそれぞれ図 4.9，図4.10 において同一の点となる．

上述の幾何的表現方法を用いると，4 個の要素から成る集合 $E=\{1,2,3,4\}$ 上の 2-一様マトロイド $U_{2,4}$ は図 4.11のように表わすことができる．

要素数が 2 個以下から成る集合のみが $U_{2,4}$ の独立集合であって，それら以外は従属集合であること，すなわち 3 個の要素から成る E の部分集合はいずれも図4.11に

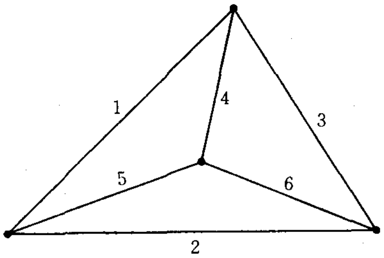

図 4.7　グラフ G

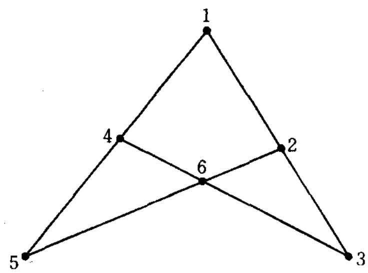

図 4.8　マトロイド対応図

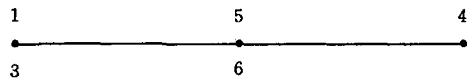

図 4.9 $M(G)|T_1$

図 4.10 $M(G)|T_2$

おいて同一線上にあることから $U_{2,4}$ の独立集合とはなり得ないことを確認されたい.

4.2 双対マトロイド

この節ではマトロイド理論における双対性(duality)についてのべる. 以下に示すように, マトロイドの双対性にもとづく双対マトロイドを定義することによって, 数多くの新しい結果が得られたり, あるいはすでに得られている結果がこれまでよりもはるかに容易に理解されたりする場合がある. たとえば, 後にのべるように, 平面グラフの双対性の概念がマトロイドの双対性から容易に得られることなどはそのいい例である.

まず最初に, 任意のマトロイド M に対する双対マトロイド(dual matroid) M^* を定義しよう. Whitney[注1)]は1935年に次の定理を与えた.

定理 4.2 有限集合 E 上のマトロイド M の基底の集合族を $\{B_i, i\in I\}$ (I は添字の集合) とすると, $\{E\backslash B_i, i\in I\}$ で与えられる集合族はマトロイド M^* の基底の集合族である.

証明 $\{E\backslash B_i, i\in I\}$ で与えられる集合族が2章に与えたマトロイドの基底に関する公理 (B1) を満足することを示そう.

B_1, B_2 をマトロイド M の異なる2つの基底とし, $B_1^*=E\backslash B_1$, $B_2^*=E\backslash B_2$ とする. いま E の要素 x が $x\in B_1^*\backslash B_2^*$, つまり $x\in B_2\backslash B_1$ を満足すると仮定する. この時, 基底 B_1 には含まれているが基底 B_2 には含まれていない要素 $y\in B_1\backslash B_2$ が存在して, $(B_1\backslash\{y\})\cup\{x\}$ が M の基底となることがいえる.

なぜならば, 集合 $B_1\cup\{x\}$ が $\sigma(B_1\cup\{x\})=E$ を満たし, かつ $\{x\}$ は独立集合であることから, 要素 x を含みかつ $B_1\cup\{x\}$ に含まれるようなマトロイド M の基底 B_0 が存在する (2章の定理2.1参照). したがって $B_1\backslash B_0=\{y\}$ とすることによって要素 $y\in B_1\backslash B_2$ が得られるからである.

図 4.11

注1) H. Whitney : On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math.*, Vol. 57, 1935, pp. 509-533

$y\in B_1\backslash B_2$ より $y\in B_2^*\backslash B_1^*$ となり

$$E\backslash\{(B_1\backslash\{y\})\cup\{x\}\}=B_1^*\cup\{y\}\backslash\{x\}$$
$$=(B_1^*\backslash\{x\})\cup\{y\}$$

が成立する. すなわち $(B_1\backslash\{y\})\cup\{x\}$ は M の基底であるから, $E\backslash\{(B_1\backslash\{y\})\cup\{x\}\}$ は M^* の基底となり, $(B_1^*\backslash\{x\})\cup\{y\}$ が M^* の基底であることが示された.

このようにして M の基底の集合族 $\{B_i, i\in I\}$ に対して, 集合族 $\{E\backslash B_i, i\in I\}$ はマトロイドの基底の公理を満たすので, マトロイド M^* の基底をなすことが得られる. ⊠

上の定理のようにして任意のマトロイド M の双対マトロイド M^* が定義されるが, M と M^* の間の対称性から次の関係は明らかであろう.

$$(M^*)^*=M. \tag{4.10}$$

双対マトロイド M^* の階数は, M^* の基底が M の基底 B に対して $E\backslash B$ と表わされることから, ρ を M の階数関数とすると $|E|-\rho(E)$ となることがただちにわかる. またマトロイドの基底の部分集合はすべて独立集合であることから, M の双対マトロイド M^* における独立集合は, その E に関する補集合がマトロイド M における基底を含む集合であると言うことができる. したがって M^* の独立集合族を $\mathscr{I}^*$ と表わすと, E の部分集合 $I\subseteq E$ に対して次のように書くことができる. ただし次式において $\bar{I}=E\backslash I$ とする.

$$I\in\mathscr{I}^*\Leftrightarrow\sigma(\bar{I})=E. \tag{4.11}$$

さて双対マトロイド M^* の階数関数はどのように表わされるであろうか. マトロイド M, M^* の階数関数をそれぞれ ρ, ρ^* とすると, これらの間には次の関係が成立する.

$$\rho^*(A)=|A|-\rho(E)+\rho(\bar{A}), A\subseteq E. \tag{4.12}$$

式(4.12)は M^* の階数関数を与える式でもあるが, それは以下のようにして理解されるであろう.

E の任意の部分集合 $A\subseteq E$ に対して, A に含まれる M^* の独立集合を $I\in\mathscr{I}^*$ とした時, I が式(4.12)で与えられる要素数 $\rho^*(A)$ を有する M^* の独立集合 $I'\in\mathscr{I}^*$ に拡張可能であることを示す.

E に関する A の補集合 $\bar{A}(=E\backslash A)$ に含まれる M の極大な独立集合を I_0 とする. すなわち

$$I_0\in\mathscr{I}, I_0\subseteq\bar{A} \text{ かつ } |I_0|=\rho(\bar{A}). \tag{4.13}$$

この時 I_0 を M における独立集合として拡張し, $I_0\subseteq I_1\subseteq\bar{I}(=E\backslash I)$ なる集合 I_1 が次の条件を満たすようにす

ることが(4.11)によって可能である．

$$I_1 \in \mathscr{I}, I_1 \backslash I_0 \subseteq A \text{ かつ}$$

$$|I_1| = \rho(\bar{I}) = \rho(E). \tag{4.14}$$

上の中央の式は(4.13)より $\sigma(I_0) = \bar{A}$ および $I_1 \in \mathscr{I}$ であることから明らかである．また第3式は $I \in \mathscr{I}^*$ よりただちに得られる．そこで

$$I' = A \backslash (I_1 \backslash I_0) \tag{4.15}$$

とすると，$I \subseteq I' \subseteq A$ かつ $I_1 \subseteq \bar{I'} (= E \backslash I')$ であるから(4.14)を用いると次の関係が得られる．

$$\rho(\bar{I'}) = \rho(E) \text{ すなわち } I' \in \mathscr{I}^*. \tag{4.16}$$

したがって $I \subseteq I'$ なる集合 I' も M^* の独立集合となり，その要素数は次式で与えられるので，(4.12)の関係が得られる．

$$\begin{aligned} |I'| &= |A| - (|I_1| - |I_0|) \\ &= |A| - \rho(E) + \rho(\bar{A}). \end{aligned}$$

なお上述の I_0, I_1, I, A, E 等の集合間の相互の包含関係は図4.12のように模式化できる．

一方，M^* の定義として定理4.2で与えたようにマトロイドの基底を用いるかわりに，(4.12)のような階数関数の定義を用いることも可能である．この場合 ρ^* が階数関数の公理系のうちの (R1)，(R2) を満足することは明白である．ρ^* が(R3) を満足することは以下のようにして示すことができる．

集合 E の任意の部分集合 $A, B \subseteq E$ に対して以下の関係が成立する．

$$\begin{aligned} \rho^*(A) + \rho^*(B) &= |A| - \rho(E) + \rho(\bar{A}) + |B| - \rho(E) \\ &\quad + \rho(\bar{B}) \\ &\geqq |A| + |B| - 2\rho(E) + \rho(\bar{A} \cup \bar{B}) + \rho(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ &\geqq |A \cup B| + |A \cap B| - 2\rho(E) + \rho(E \backslash (A \cup B)) \\ &\quad + \rho(E \backslash (A \cap B)) \\ &\geqq \rho^*(A \cup B) + \rho^*(A \cap B). \end{aligned} \tag{4.17}$$

このようにして(4.12)で与えられる ρ^* が M^* の階数関数であることがわかる．

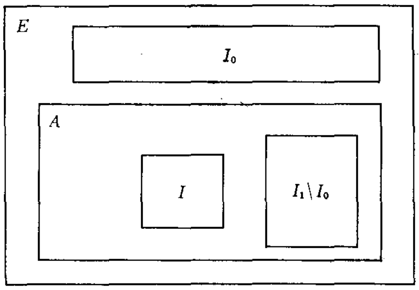

図 4.12

マトロイド M^* における独立集合は

$$\rho^*(A) = |A| - \rho(E) + \rho(\bar{A}) \geqq |A|$$

を満たす集合として定義されることから，$\rho(\bar{A}) \geqq \rho(E)$ となり，A の E に関する補集合 $\bar{A}$ が，前述のようにマトロイド M の基底を含む集合であることがわかる．

たとえば集合 E の要素 e が M においてループをなす場合には，いかなることが言えるであろうか．要素 e は，M におけるループである場合には，いかなる M の基底にも含まれない．つまり M^* のすべての基底に含まれる．逆も言えるので，要素 e がマトロイド M のループであることは e が M^* のすべての基底に含まれるのと等価である．

マトロイド M が与えられた時，M の双対マトロイド M^* における基底，独立集合，サーキット，階数関数，ループなどはそれぞれもとのマトロイド M における基底，独立集合，サーキット，階数関数，ループに対応して双対基底 (cobase)，双対独立集合 (coindependent set)，双対サーキット(cocircuit)，双対階数関数(corank function)，双対ループ(coloop)とよばれる．

マトロイド M が与えられた時にその双対マトロイド M^* は唯一に定義されるので，M における基底，独立集合，サーキット，階数関数等を考えれば，それらの“双対概念”はすべて一意的に得られるという特徴を有している．したがってマトロイド M において成立する命題をその“双対概念”を用いて別の表現をすることが可能となり，それによって興味ある結果が得られることが数多く見られる．

たとえば上述のように，ある要素 $e \in E$ が E 上のマトロイド M のループであるということは，要素 e が M のいかなる基底にも属さないということと等価である．この命題を“双対概念”を用いて表わすと，“要素 e が M の双対ループであるということは，要素 e が M のいかなる双対基底にも属さないということと等価である”，となる．

このようなマトロイドの“双対概念”およびその具体例等については次回にもひきつづいて紹介を行なう．

次 号 予 告

トップの視点

新しい工業技術製品―ソフトウェア製品の生産革新　水野　幸男

特集　生産システムの動向と問題

生産管理の現状と将来　澤村　淑郎

生産・物流管理の接点　曽我部旭弘

MRPにおける発注オーダの優先順位付に関する考察　桑原泰治・篠塚英一

解　説

最適制御理論の動向(1)　坂本　実

連載講座

マトロイド理論の基礎(6)　大山　達雄