ファジィ数理計画問題

田中　英夫

1. はじめに

オペレーションズ・リサーチの問題にはよく知られているように次の2つの問題がある：

(i)現実問題のモデル化の問題 (model building)と(ii)数学モデルにおける最適解を得る問題(model solving)とがある.

数理計画の研究は主に(ii)の問題に向けられていた. たとえば, 解の性質とか効率のよいアルゴリズムなどの研究が盛んである. しかし, 最近現実問題をとり扱う必要性のために, (i)のモデル化の問題にも関心がはらわれるようになってきた. (i)と(ii)との関係は矛盾的であり, また相互補完的である.

すなわち, モデルを現実問題に限りなく近づければ, モデルが複雑になり解を求めることが困難になる. このような相反する問題を同時に考えることが数理計画問題を魅惑的にさせるであろう. このような観点から人間の認識に対するファジィ性を考慮したファジィ数理計画問題が提案されている.

確率的数理計画問題は明確な事象の生起に関する不確かさをとり扱っている. すなわち, 制約条件を確率的に満たし, 目的関数の平均値を最大にしている. これに対してファジィ数理計画問題はわれわれの事象の認識に含まれるファジィ性をとり扱っている. たとえば,「だいたい1億円以下」という認識はソフトな制約条件であり, これはファジィ集合によって表わされる. このようにファジィ集合を導入することによって, われわれの認識に近い数理計画問題の定式化がなされている.

2. 基本的概念と一般的定式化

まずファジィ集合[1]を定義しておこう. 全体集合 X におけるファジィ集合 $\underset{\sim}{A}$ とは

$$\mu_A : X \to [0,1] \qquad (1)$$

なるメンバシップ関数 μ_A によって特性づけられた集合で, $\mu_A(x)$ の値は $\underset{\sim}{A}$ における x の所属度(グレード)を表わしている. メンバシップ関数は通常の集合の特性関数をなめらかにしたものである.

いま $X=[0, 10億円]$ とすると, X 上の部分集合は区間しか表現できない. これに対して, X 上のファジィ部分集合族は通常の部分集合族を含み, われわれの自然言語に近い表現を与えている. たとえば「だいたい2～3億円ぐらい」,「だいたい5億ぐらい」,「だいたい8億円以上」などが考えられる. 現実問題はまず言語的表現によって記述され, これを近似的に通常の集合的表現に変換して数学モデルが構成される. これに対して, ファジィ数学モデルは言語的表現をファジィ集合に

たなか　ひでお　大阪府立大学　工学部

よって行ない，これによってよりわれわれの認識に近いモデルを得ている．

通常の数理計画問題は制約条件のもとで，目的関数を最大にするような解を求めている．しかし現実の問題においては，制約条件および目的関数はソフトなものである．たとえば，企業の投資問題において，投資可能な全額の集合(制約条件)は特性関数的に定義するのはむずかしい．投資可能な資金は企業の資産や銀行などから得られるので，計画段階ではその金額はまだそれほど明確になっていない．

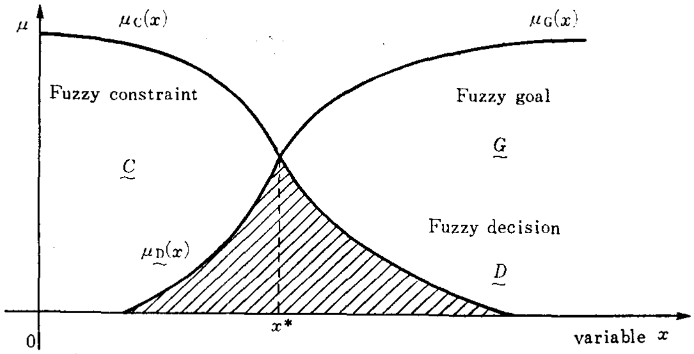

図 1 ファジィ決定集合 $\underset{\sim}{D}$ と最大化決定 x^*

そのうえに，どれぐらい投資できるかは経営者の投資対象に対する認識に依存しており，これにはファジィ性がある．したがって投資可能な資金はソフトな制約条件になる．また企業は利益を最大にするという行動をとるよりも，ある程度利益があればよいという満足度基準にしたがうことが多い．すなわち，目的関数よりもむしろ，満足度基準にしたがうような目標集合的とり扱いのほうが現実の問題に近いと考えられる．

実際 Dantzig[2] によると初期のモデルには目的関数がなかったといわれている．このことは目的関数は本質的なものでなく解を１つ限定するために導入されたといえる．この文献において，実際問題のＬＰにおける係数のあいまいさと解の関係が論じられている．

係数のあいまいさを区間としてとり扱った区間計画法(Interval Programming)[3] がある．ここでも，現実の問題は「最適化」より「満足化」にあるという立場である．区間計画法の概念をより一般化したファジィＬＰ問題を次章にのべる．

さて，Bellman と Zadeh[4] のファジィ決定問題をまずのべよう．制約および目標がファジィ集合 $\underset{\sim}{C}$ および $\underset{\sim}{G}$ で表わされ，それぞれのメンバシップ関数を $\mu_C(x)$, $\mu_G(x)$ によって与えられたとする．このとき，ファジィ決定集合 $\underset{\sim}{D}$ は制約と目標とを同時に満足するという意味で

$$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{C}\cap\underset{\sim}{G}\,;\ \mu_D(x)=\mu_C(x)\wedge\mu_G(x) \qquad (2)$$

として定義できる．ただし，∧ は min を表わす．

ここで，ファジィ決定集合 $\underset{\sim}{D}$ のメンバシップ関数 $\mu_D(x)$ は「x が決定集合 $\underset{\sim}{D}$ に属している度合」を示している．ゆえに $\mu_D(x)<\mu_D(x')$ ならば x よりも x' のほうが決定としてよいということになる．したがって最大化決定として

$$\max\,\mu_D(x)=\mu_C(x^*)\wedge\mu_G(x^*) \qquad (3)$$

となる x^* を選ぶのが妥当であると考えられる(図1)．

ここで次のことを強調しておこう．制約と目標とを区別することなく，どちらも満たさなければならない集合であると考えている．またメンバシップ関数は主観的にきめられるが，通常の場合も同様である．

たとえば，投資可能な集合の例として「1億円以下」という通常の集合も主観的にきめられている．「1億円以下」という言語的表現と集合的表現とが客観的に一致しているにすぎない．ファジィ集合の場合には，われわれの言語的表現とそれに対応するファジィ集合とが客観的に一致しないだけである．決定問題は決定者の主観的認識を反映しているほうが現実的である．すなわち，通常の決定問題を含んですべての決定問題は主観的なものが導入されているといえる．

さて，論理演算“∧”を含む関数の最大化問題

[5]についてのべよう．この最大化問題の性質をしらべるために，式(3)と等価な次の関係を導入する．

$$\sup_{x\in X}\mu_D(x)=\sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge\sup_{x\in C^\alpha}\mu_G(x)] \tag{4}$$

ただし，C^α は α-レベル集合で次のように表わされる．

$$C^\alpha=\{x\,|\,\mu_C(x)\geq\alpha\} \tag{5}$$

式(4)はファジィ制約集合 $\underset{\sim}{C}$ を α-レベル集合に置き換え，各制約集合 C^α 上で $\mu_G(x)$ を最大にすることを繰り返すことによって $\mu_D(x)$を最大化している．すなわち，$\alpha_1\leq\alpha_2$ ならば $C^{\alpha_1}\supset C^{\alpha_2}$ となり

$$\sup_{x\in C^{\alpha_1}}\mu_G(x)\geq\sup_{x\in C^{\alpha_2}}\mu_G(x) \tag{6}$$

の関係が得られるので式(4)の意味は容易に理解されるだろう．$\sup_{x\in C^\alpha}\mu_G(x)=\varphi(\alpha)$ とおき，関数 $\varphi(\alpha)$が α に関して連続ならば，最適な α^* は $\alpha^*=\varphi(\alpha^*)$として得られる．$\varphi(\alpha)$ の連続性が成り立てば，式(3)の問題は

$$\sup_x \mu_G(x)$$

$$\mu_C(x)\geq\mu_G(x)$$

という論理演算∧を含まない通常の数理計画問題になる．ファジィ制約 $\underset{\sim}{C}$ が強ファジィ凸*であれば $\varphi(\alpha)$は連続である．

3. ファジィ線形計画問題

ファジィ線形計画問題をファジィＬＰ問題と略すことにする．ファジィＬＰ問題の定式化は種々なされているが，ここでは次の3つの異なった定式化についてのべる．

3.1 ファジィ不等号によるファジィＬＰ問題

いま目標と制約とが次のようなファジィ集合で与えられているとする．

$$C^Tx\lesssim z_0,\ Ax\lesssim b,\ x\geq 0 \tag{7}$$

ただし，$\lesssim$はファジィ不等号を表わしている．

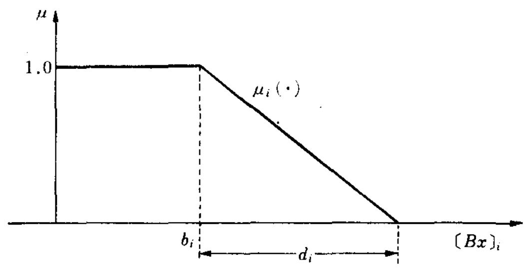

図 2 「だいたい b_i 以下」というファジィ集合

これは制約 Ax がだいたい b 以下で，費用 C^Tx をだいたい z_0 以下にしたいという問題[6]である．

目標と制約とが不等式で表わされているので，これらを統一して $Bx\lesssim b$ と簡単に表わす．この i 番目の不等式の意味「だいたい b_i 以下」を次のメンバシップ関数によって定義している．

$$\left.\begin{array}{l}\mu_i([Bx]_i)=1\ ;\ [Bx]_i\leq b_i\\ 0\leq\mu_i([Bx]_i)\leq 1\ ;\ b_i\leq[Bx]_i\leq b_i+d_i\\ \mu_i([Bx]_i)=0\ ;\ [Bx]_i\geq b_i+d_i\end{array}\right\} \tag{8}$$

ただし，$[Bx]_i$はベクトル i 番目の要素，μ_iは i 番目の不等式のメンバシップ関数，d_i は不等式の右辺の最大許容値である．

式(2)の意味でのファジィ決定集合 $\underset{\sim}{D}$ のメンバシップ関数 μ_D は

$$\mu_D(Bx)=\min_i \mu_i([Bx]_i) \tag{9}$$

となる．最大化決定は

$$\max_{x\geq 0}\min_i\{\mu_i([Bx]_i)\} \tag{10}$$

となる x を求める問題になる．

図2のような線形制約として

$$\mu_i([Bx]_i)=\begin{cases}1 & ;\ [Bx]_i\leq b_i\\ 1-\dfrac{[Bx]_i-b_i}{d_i} & ;\ b_i<[Bx]_i<b_i+d_i\\ 0 & ;\ [Bx]_i\geq b_i+d_i\end{cases} \tag{11}$$

とする．$b_i'=b_i/d_i$，$[B']_{ij}=[B]_{ij}/d_i$ と正規化し，線形制約であることを考慮すると式(10)は

$$\max_{x\geq 0}\min_x\{(b_i'-[B'x]_i)\} \tag{12}$$

となる．式(12)は次のような通常のＬＰ問題になる．

$$\max\lambda$$

* ファジィ集合 $\underset{\sim}{C}$ が強ファジィ凸⇔$\mu_C(\lambda x+(1-\lambda)y)>\mu_C(x)\wedge\mu_C(y)$.

表 1　通常の制約とファジィ制約

	Non-fuzzy	Fuzzy $\mu=0$	Fuzzy $\mu=1$
Objective function		4,200,000	3,700,000
First constraint	170	170	180
Second constraint	1,300	1,300	1,400
Third constraint	6	6	12

$$\lambda\leq b_i'-[B'x]_i \quad i=1,\cdots,m \tag{13}$$

［例 1］　これは 4 種類のトラック $x_1\sim x_4$ に関する単純化された実際の決定問題[6]であるが，ここでは単なる数値例としてのべる．通常の場合と比較するため次のＬＰ問題からスタートする．

$$\min_x z=41000x_1+44300x_2+48100x_3+49100x_4$$
$$0.84x_1+1.44x_2+2.16x_3+2.40x_4\geq 170$$
$$16x_1+16x_2+16x_3+16x_4\geq 1300$$
$$x_1\geq 6$$

このＬＰ問題の解は

$x_1=6$，$x_2=17.85$，$x_3=0$，$x_4=58.64$，

$z^*=3918850$

である．これを考慮してこの問題のファジィ化であるファジィＬＰ問題が表 1 に与えられている．表 1 におけるファジィ制約のメンバシップ関数は $\mu=0$ から $\mu=1$ まで直線で与えられている．この問題を式(13)の形で表わせば

$$\max \lambda$$
$$\lambda\leq 7.4-0.083x_1-0.089x_2-0.096x_3-0.098x_4$$
$$\lambda\leq -18+0.084x_1+0.144x_2+0.216x_3+0.24x_4$$
$$\lambda\leq -14+0.16x_1+0.16x_2+0.16x_3+0.16x_4$$
$$\lambda\leq -2+0.167x_1,\quad x\geq 0$$

となり，この問題の解は表 2 に示されている．

ファジィＬＰ問題はたとえば第 1 番目の制約では「だいたい 170 ぐらい」というファジィ情報から構成されている．したがって制約のパラメータを事前に多くの費用をかけて明確に規定する必要はない．しかし，例 1 のようにファジィＬＰ問題のコストはＬＰ問題とくらべて約 1.7 %ほど多くなっている．

表 2　例 1 のＬＰ問題とファジィＬＰ問題の解

Non-fuzzy	Fuzzy
$x_1=6$	$x_1=17.41$
$x_2=17.85$	$x_4=66.54$
$x_4=58.65$	
$Z=3,918,850$	$Z=3,988,257$
Constraints	
1.　171.5	174.2
2.　1,320	1,342.4
3.　6	17.4

3.2　線形区間法によるファジィＬＰ問題

ここでは Negoita らによって定式化されたファジィＬＰ問題[7]，[8]についてのべる．この問題の特徴は線形制約式のパラメータのあいまいさをファジィ集合で表わし，区間計画法の概念を用いている．

次のファジィＬＰ問題を考える．

$$\sup C^T x$$
$$x_1\underset{\sim}{k_1}+x_2\underset{\sim}{k_2}+\cdots+x_n\underset{\sim}{k_n}\subset\underset{\sim}{k},\quad x\geq 0 \tag{14}$$

ただし，$\underset{\sim}{k_i}$ は凸ファジィ集合*である．

この問題はレベル集合の概念を導入すると，線形区間計画問題に転化される．一般にファジィ集合 $\underset{\sim}{k}$ は

$$\underset{\sim}{k}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\cdot k^\alpha \tag{15}$$

と分解して表わせる．ただし，$k^\alpha=\{x\,|\,\mu_k(x)\geq\alpha\}$．

いまファジィ集合が r 個のレベル集合で構成できるとする．すなわち，$0\leq\alpha_1<\cdots<\alpha_r\leq 1$ を用いてファジィ集合 $\underset{\sim}{k}$ は

$$\underset{\sim}{k}=\alpha_1 k^{\alpha_1}+\cdots+\alpha_r k^{\alpha_r} \tag{16}$$

と表わせる．ただし，記号＋は式(15)の∪の意味である．レベル集合を導入すると式(14)のファジィＬＰ問題は次の線形区間計画問題になる．

*　ファジィ集合 μ が凸⇔$\mu(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\mu(x)\wedge\mu(y)$．

$$\sup C^T x$$

$$x_1 k_1^{\alpha_i} + \cdots + x_n k_n^{\alpha_i} \subset k^{\alpha_i};$$

$$i=1,\cdots,r,\ \boldsymbol{x}>0 \quad (17)$$

線形区間計画問題をNegoitaらの例［7］によって説明しよう．

［例2］ パラメータが区間で表わされている次のLP問題を考える．

$$\min 3x_1+2x_2$$

$$[0.02, 0.03]\,x_1+[0.05, 0.06]\,x_2 \subseteq [10.5, 15.6] \quad (18)$$

$$[0.1, 0.5]\,x_1-[0.01, 0.02]\,x_2 \subseteq [0.35, 0.53]$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ここで，パラメータの値が最悪のときでも解 $\boldsymbol{x}$ が制約区間の中にあることを保証するという観点から式(18)は次のLP問題に変換できる．

$$\min 3x_1+2x_2 \quad ; \boldsymbol{x} \geq 0$$

$$0.03x_1+0.06x_2 \leq 15.6$$

$$0.5x_1-0.01x_2 \leq 0.53$$

$$0.02x_1+0.05x_2 \geq 10.5$$

$$0.1x_1-0.02x_2 \geq 0.35$$

式(14)のファジィLP問題は任意の α-レベルにおける区間制約を満足するように解を求めることである．

したがって式(14)のファジィ制約は $2r$ 個の制約式に変換される．制約式の数がかなり大きくなるが，ソフトな制約をとり扱うためにはこのような複雑さは避けられないであろう．

3.3 ファジイ線形関数によるファジィLP問題

3.1では不等式の右辺のパラメータだけがあいまいであると見なしているが，ここでは不等式のすべてのパラメータがあいまいであるときのファジィLP問題［9］を定式化する．また不等式の右辺のパラメータだけがあいまいなとき，このあいまいさを考慮して解をファジィ集合として求める問題も定式化されている．

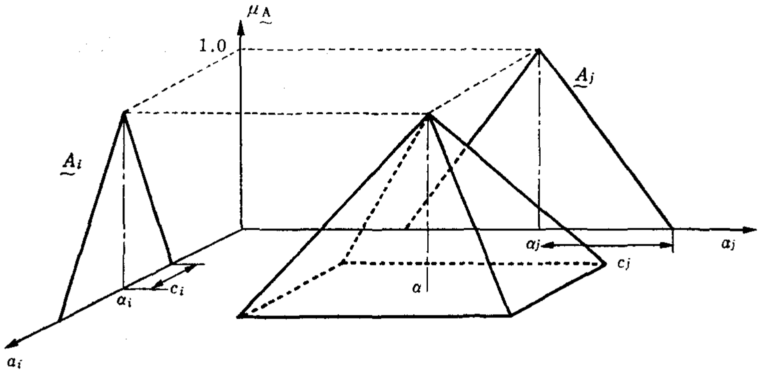

図 3 ファジィ・パラメータ $\underset{\sim}{A}$ のファジィ集合

次のファジィ・パラメータをもったファジィ不等式を考える．

$$\begin{array}{l} \underset{\sim}{A}_{11}x_1+\cdots+\underset{\sim}{A}_{1n}x_n \geq \underset{\sim}{B}_1 (\text{ファジィ目標}) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \underset{\sim}{A}_{m1}x_1+\cdots+\underset{\sim}{A}_{mn}x_n \leq \underset{\sim}{B}_m (\text{ファジィ制約}) \end{array} \quad (19)$$

ただし，$\underset{\sim}{A}_{ij}$，$\underset{\sim}{B}_j$ はファジィ集合であり，目標と制約とは区別されていない．

統一的にとり扱うためにファジィ集合 $\underset{\sim}{Y}_i$ を導入すると式(19)は次のようになる．

$$\underset{\sim}{Y}_i=\underset{\sim}{B}_i x_0+\underset{\sim}{A}_{i1}x_1+\cdots+A_{in}x_n \geq 0,$$

$$i=1,\cdots,m \quad (20)$$

ただし，$x_0=1$ であり，ファジィ集合の正負はそれぞれ $\underset{\sim}{B}_i$, $\underset{\sim}{A}_{ij}$ として考慮されているとしている．

式(20)をファジィ関数とよび，これは拡張原理［10］によって定義できる．いま集合 X から集合 Y への通常の関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) : X \to Y$ を仮定する．パラメータ $\boldsymbol{a}$ がファジィ集合 $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ によって与えらファジィ関数を $f(\boldsymbol{x}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ で表わし，このファジィ写像の集合を次のように定義する．

Y 上のファジィ集合 $\underset{\sim}{Y}=f(\boldsymbol{x}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ のメンバシップ関数 $\mu_Y(y)$ は

$$\mu_Y(y)=\begin{cases} \max[\mu_A(\boldsymbol{a})]; \{\boldsymbol{a} \mid y=f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\} \neq \phi \\ \{\boldsymbol{a} \mid y=f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\} \\ 0 \qquad\qquad ;\text{その他} \end{cases} \quad (21)$$

と定義する．ただし，$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ はパラメータの直積空間上のファジィ集合であり，そのメンバシップ関数

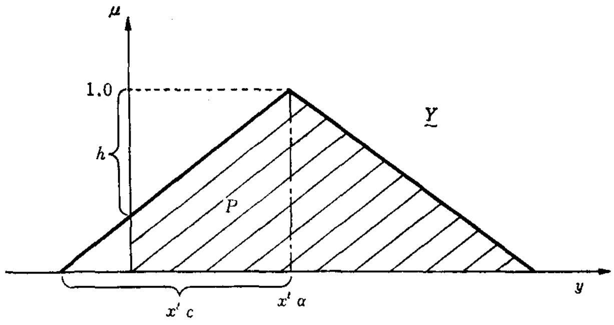

図 4 ファジィ集合 $\underset{\sim}{Y} \geq 0$ の説明

を $\mu_A(\boldsymbol{a})$ としている．

この定義は $\boldsymbol{x}$ が与えられたとき，ファジィ・パラメータ $\underset{\sim}{A}$ の度合によって y がとりうる度合を $\mu_Y(y)$ としている．これは集合の写像の概念の自然な拡張になっている．

ここで，式(20)にもどり，次の2つの問題がある．すなわち(i)式(21)の定義にしたがってファジィ集合 $\underset{\sim}{Y}_i$ をいかに簡単に計算することができるか (ii) $\underset{\sim}{Y}_i \geq 0$ というファジィ不等式をどのように解釈するかの問題がある．これらの一般的議論は Dubois, Prade [11], [12]によってなされている．

ここでは，ファジィLPとして使いやすいようにファジィ・パラメータのタイプを次のものに限定する．ファジィ・パラメータとしては，「だいたい $\boldsymbol{\alpha}$」であるというファジィ集合を図3のようなピラミッド型のメンバシップ関数によって定義する．すなわち

$$\mu_A(\boldsymbol{a}) = \min_j \{\mu_{A_j}(a_j)\} \tag{22}$$

$$\mu_{A_j}(a_j) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|a_j - \alpha_j|}{c_j} & ; \alpha_j - c_j \leq a_j \leq \alpha_j + c_j \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases} \tag{23}$$

ただし，$c_j > 0$ とする．

ファジィ・パラメータ $\underset{\sim}{A}_j$ は α_j という中心と c_j という幅とで表わされるので，$\underset{\sim}{A}_j$ を $\underset{\sim}{A}_j = (\alpha_j, c_j)$ と表わす．ファジィ集合のベクトル表示として $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = (\underset{\sim}{A}_1, \cdots, \underset{\sim}{A}_n)$ を $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{c})$ と表わす．

さて，ファジィ線形関数を説明するために，

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{A}_1 x_1 + \underset{\sim}{A}_2 x_2 \tag{24}$$

を考える．ただし，$\underset{\sim}{A}_1 = (1, 2)$, $\underset{\sim}{A}_2 = (4, 1)$ とする．いま $\boldsymbol{x}^T = (1, 2)$ とすると，ファジィ関数の定義から $\underset{\sim}{Y}$ のメンバシップ関数は $\underset{\sim}{Y} = (9, 4)$ となる．このことを一般化して次の結果を得る．

ファジィ・パラメータ $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{c})$ とし，ファジィ線形関数

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{A}_1 x_1 + \cdots + \underset{\sim}{A}_n x_n \triangleq \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{x} \tag{25}$$

のメンバシップ関数 $\mu_Y(y)$ は次のように表わされる．

$$\mu_Y(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|y - \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\alpha}|}{\boldsymbol{c}^T |\boldsymbol{x}|} & ; \boldsymbol{x} \neq 0 \\ 1 & ; \boldsymbol{x} = 0, y = 0 \\ 0 & ; \boldsymbol{x} = 0, y \neq 0 \end{cases} \tag{26}$$

ただし，$\boldsymbol{c}^T |\boldsymbol{x}| \leq |y - \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\alpha}|$ となる y に対しては $\mu_Y(y) = 0$ とする．

次に(ii)の問題であるが，ファジィ不等号 $\underset{\sim}{Y} \geq 0$ を次のように定義する．

$$\underset{\sim}{Y} \geq 0 \Leftrightarrow \mu_Y(0) \leq 1 - h,\ \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\alpha} \geq 0 \tag{27}$$

ただし，h は $\underset{\sim}{Y}_i \geq 0$ の度合を表わし，h が大きいほど「だいたい正である」という意味が強くなる(図4)．

式(20)を統一的に次のベクトル形式

$$\underset{\sim}{Y}_i = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_i \boldsymbol{x} \geq 0 \tag{28}$$

で表わし，$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_i = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{c}_i)$ とする．式(28)は式(26), (27)から容易に通常の不等式で次のように表わされる．

$$\mu_{Y_i}(0) = 1 - \boldsymbol{\alpha}_i{}^T \boldsymbol{x} / \boldsymbol{c}_i{}^T \boldsymbol{x} \leq 1 - h,\ \boldsymbol{\alpha}_i{}^T \boldsymbol{x} \geq 0 \tag{29}$$

$\boldsymbol{x} \geq 0$ と仮定しているので上式は簡単に次のようになる．

$$(\boldsymbol{\alpha}_i - h\boldsymbol{c}_i)^T \boldsymbol{x} \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m \tag{30}$$

2.でのべたように，m 個のファジィ不等式を満足する最大の度合 h となる $\boldsymbol{x}$ を求めることがここでのファジィLP問題である．すなわち，制約式(30)のもとで

$$\max h = h^* \tag{31}$$

となる h^*, $\boldsymbol{x}^*$ を求めることである．これは非線形計画問題であるが，この定式化ではすべてのパ

ラメータのあいまいさを同時に考慮して解が得られている．

次に，式(20)において $\underset{\sim}{B}_i$ という項だけがあいまいであるとする．このとき，$\underset{\sim}{B}_i$ のファジィ性を反映してどれぐらいの解の可能性があるかを考えよう．式(20)に対応させて次式を考える．

$$\underset{\sim}{Y}_i=\underset{\sim}{B}_i+a_{i1}\underset{\sim}{X}_1+\cdots+a_{in}\underset{\sim}{X}_n \quad i=1,\cdots,n \tag{32}$$

ただし，$\underset{\sim}{X}_i$ はファジィ解であり，ファジィ集合として求める．ファジィ集合のタイプを限定しているので，ファジィ・パラメータ $\underset{\sim}{B}_i=(b_i,\ d_i)$ とファジィ解 $\underset{\sim}{X}_i=(x_i,\ c_i)$ とをこのように表わす．

$\underset{\sim}{Y}_i\geq 0$に対して規準 h_i が与えられると，式(32)は前述と同様に式(26)，(27)から次の通常の不等式に変換できる．

$$\sum_j(a_{ij}x_j-h_i|a_{ij}|c_j)+b_i-h_id_i\geq 0 \tag{33}$$

ここでの問題は $\underset{\sim}{B}_i$ のあいまいさを反映して，解 $\underset{\sim}{X}_i$ の可能性を知ることである．したがって解 $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}$ の可能性の測度を

$$J=k_1c_1+\cdots+k_nc_n \tag{34}$$

とする．ただし，$k_i\geq 0$ はどの解 $\underset{\sim}{X}_i$ の可能性を大きくしたいかの重みパラメータである．

ここでの問題は式(33)の制約のもとに式(34)の J を最大にするようなファジィ解 $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})$ を求めることである．このファジィＬＰ問題から，あいまいな状況においてどのような解が可能であるかを知ることができる．ファジィ状況において，ファジィ解を得るということは自然なことである．

［例3］ 次のファジィＬＰ問題を考える．

$$\underset{\sim}{X}_1+\underset{\sim}{X}_2\gtrsim\underset{\sim}{6},\ 2\underset{\sim}{X}_1+\underset{\sim}{X}_2\lesssim\underset{\sim}{12},\ \underset{\sim}{X}_2\lesssim\underset{\sim}{5}$$

$$3\underset{\sim}{X}_1+4\underset{\sim}{X}_2\lesssim\underset{\sim}{28},\ \underset{\sim}{X}_1\lesssim\underset{\sim}{6}$$

ただし，ファジィ集合は $\underset{\sim}{6}=(6,0.6)$，$\underset{\sim}{12}=(12,1.8)$，$\underset{\sim}{5}=(5,\ 1.0)$，$\underset{\sim}{28}=(28,\ 2.8)$，$\underset{\sim}{6}=(6,\ 0.9)$ としている．また x_1 の値を恣意的に考え，$\underset{\sim}{X}_1$ の最大の可能性を知りたいとする．したがって目的関数として，

$$J=c_1 \tag{35}$$

とする．例3のファジィ不等式は

$$x_1+x_2-h_1(c_1+c_2)+6-0.6h_1\geq 0$$

$$-2x_1-x_2-h_2(2c_1+c_2)+12-1.8h_2\geq 0$$

$$-x_2-h_3c_2+5-h_3\geq 0$$

$$-3x_1-4x_2-h_4(3c_1+4c_2)+28-2.8h_4\geq 0$$

$$-x_1-h_5c_1+6-0.9h_5\geq 0$$

となる．すべての h_i を0.5として J を最大にする解 $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^*$ は

$$\underset{\sim}{X}_1{}^*=(2.94,\ 1.24),\ \underset{\sim}{X}_2{}^*=(3.98,\ 0)$$

である．解 $\underset{\sim}{X}_2{}^*$ にはあいまいさがなく，$\underset{\sim}{B}_i$ のあいまいさがすべて $\underset{\sim}{X}_1{}^*$ に集約されている．

度合0.5以上を解と考えるならば，解 x_1 の可能性は区間［2.32，3.56］となる．決定者は上の区間から恣意的に決定することができる．

4. ファジィ多目的計画問題とその応用

前述のファジィＬＰ問題はメンバシップ関数に関して max-min 戦略をとっている．すなわち，統合は同じ重みで min 演算である．したがって多目的計画問題にも適用できる．簡単な例[13]を以下に示そう．

［例4］ ある線形制約 $A\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}$ のもとに

$$\max z_1(\boldsymbol{x})=-x_1+2x_2$$

$$z_2(\boldsymbol{x})=2x_1+x_2$$

を考える．いま z_1 に対して「だいたい14以上」，z_2 に対して「だいたい21以上」あればよいというフィジァ目標が与えられたとする．これを以下のようなメンバシップ関数によって表わす．

$$\mu_1(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0 & ;\ z_1(\boldsymbol{x})\leq -3\\ (z_1(\boldsymbol{x})+3)/17 & ;\ -3<z_1(\boldsymbol{x})\leq 14\\ 1 & ;\ 14<z_1(\boldsymbol{x})\end{cases}$$

$$\mu_2(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0 & ;\ z_2(\boldsymbol{x})\leq 7\\ (z_2(\boldsymbol{x})-7)/14 & ;\ 7<z_2(\boldsymbol{x})\leq 21\\ 1 & ;\ 21<z_2(\boldsymbol{x}).\end{cases}$$

3.1 でのべた方法を用いると，この問題は

$$\max\lambda\ ;\ A\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}$$

$$\lambda\leq -0.05882x_1+0.117x_2+0.1764$$

$$\lambda\leq 0.1429x_1+0.0714x_2-0.5$$

というLP問題になる．このようなファジィLP問題の応用例は文献[14]に示されている．

次に他の統合方法についてのべよう．いままでは "and" を min に対応させていたが，and で結合されたものは補償的効果がある場合もある．

たとえば，「美しく住みやすい家」を欲しいとする．このとき，住みやすさが高ければ，美しさが少しなくても受け入れられる．

このように "and" を補償的な意味で定義できる [15]．すなわち，論理的 "and" に対応した連接 $D(\mu_A, \mu_B)$ が次の公理を満たすとする．D は(i)結合的，(ii)連続，(iii)変数に関して単射，(iv) $\wedge D(x, x)=x \Leftrightarrow x=1$，(v)実関数とする．このとき D は

$$D(\mu_A, \mu_B)=\frac{\mu_A \mu_B}{r+(1-r)(\mu_A+\mu_B-\mu_A\mu_B)}, 0<r \tag{36}$$

と表わされる．ただし，r は任意の実数である．

$r=1$ の場合のファジィ多目的計画の例が Zimmermann [13] によって示されている．

一般に目的関数 $f_1, \cdots, f_l$ の線形結合による統合

$$f=\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_l f_l \,;\, \sum \lambda_i=1 \tag{37}$$

が考えられるが，重み $\boldsymbol{\lambda}$ を明確に決定することは困難である．したがって $\boldsymbol{\lambda}$ をファジィ集合とする．たとえば，$f_1 \sim f_3$ に対して $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ は (0.6, 0.2, 0.2) の近辺でなければならないとすると，重みのファジィ集合を

$$\mu_{A*}(\boldsymbol{\lambda})=1-|\lambda_1-0.6|-|\lambda_2-0.2| \\ -|\lambda_3-0.2| \tag{38}$$

のように定義できる．このように重みをファジィ集合的にとり扱ったファジィ線形多目的計画問題の研究 [16] がなされている．ここではある α 以上の度合をもつすべての端点を求めるアルゴリズムがのべられている．またもっと一般的に $(f_1, \cdots, f_l)$ の $\boldsymbol{R}^l$ に決定者によって与えられるファジィ優越構造を導入した多目的計画問題[17]の性質がしらべられている．

最後に，ファジィ制約と目標とを加法的に統合したファジィLP問題[18]も定式化されている．

このファジィLP問題は現実の大気汚染制御問題に適用されている．

5. おわりに

われわれが直面する決定問題は種々の状況にある．したがってこれらの状況に対応して種々の定式化が可能であろう．現在のところまだあまり体系だっていないが，今後発展が期待される．

最後に，実際問題との関係についてお教えいただいた中国電力の権藤元氏，いつも有益な助言をいただいている本学浅居喜代治教授，また引用させていただいた方々に感謝の意を表します．

参考文献

[1] L. A. Zadeh : Fuzzy Sets, *Information and Control*, **8**, 3, 338～353(1965)

[2] Dantzig, 森口ら：ダンツィヒ氏との懇談会記事，経営科学，**3**, 3, 166～168(1960)

[3] 須永照雄：線形区間計画法，オペレーションズ・リサーチ，**25**, 12, 801～806(1980)

[4] R. E. Bellman and L. A. Zadeh : Decision-Making in a Fuzzy Environment, *Management Science*, **17**, 8141～8164(1970)

[5] 田中・奥田・浅居：Fuzzy 数理計画法，計測自動制御学会論文集，**9**, 607～613(1973)

[6] H. J. Zimmermann : Description and Optimization of Fuzzy Systems, *Int. J. General Systems*, **2**, 209～215(1976)

[7] C. V. Negoita, S. Minoiu and E. Stan : On Considering Imprecision in dynamic linear programming, *ECECSR Journal*, **3**, 83～95 (1976)

[8] C. V. Negoita and M. Sularia : On Fuzzy Mathematical Programming and Tolerances in Planning, *ECECSR Journal*, **1**, 3～14(1976)

[9] 田中・浅居：ファジィ関数による線形計画問題の定式化，システムと制御，**25**, 6, 351～357(1981)

[10] L. A. Zadeh : The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning-I, *Information Sciences*, **8**, 199～

249(1975)

[11] D. Dubois and H. Prade : Operations on Fuzzy Number, *Int. J. of Systems Sciences*, 9, 6, 613〜626(1978)

[12] D. Dubois and H. Prade: Systems of Linear Fuzzy Constrains, *Fuzzy Sets and Systems*, 3, 37〜48(1980)

[13] H. J. Zimmermann : Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions, *Fuzzy Sets and Systems* 1, 45〜55(1978)

[14] G. Wiedey and H. J. Zimmermann : Media Selection and Fuzzy Linear Programming, *Journal of the Operational Research Society*, 29, 11, 1071〜1084(1978)

[15] H. Hamacher : Über logishe Verknüpfungen unscharfer Aussagen und deren Zugehörigen Bewertungsfunktionen, working paper No. 75/14 Lehrstuhl für Unternehmensforschung, RWTH Aachen(1975)

[16] E. Takeda: Multiple Objective Linear Programming Problems with Fuzzy Domination Structures, Working Paper No. 46, Institute of Economic Research, Kobe University of Commerce(1978)

[17] E. Takeda and T. Nishida : Multiple Criteria Decision Problems with Fuzzy Domination Stuctures, *Fuzzy Sets and Systems*, 3, 2, 123〜136(1980)

[18] G. Sommer and M. A. Pollatschek: A Fuzzy Programming Approach to an Air Pollution Regulation problem, Progress in Cybernetics and System Research Vol. III edited by R. Trappl, G. J. Klir and L. Ricciard, Hemisphere Publ. Corp. pp. 303〜313(1978)

研究部会報告

●日本における社会システム分析

・第15回 日時：56年10月24日(土) 14:00〜17:00
場所：小野勝章事務所会議室 参会者８名
議題：経営戦略と経営戦力(Contingency Planning の見地から) 奥村誠次郎（亜細亜大学)

われわれが戦略(Strategy or Grand Strategy)を考える時，社会システムとは切っても切れない関係にあることは言をまたないが，これと戦力(Fighting Power)および資源（Resourees）との関連をどうとらえたらよいか．今後の日本の情勢を考える場合の Contingency Planning への示唆を与えるメソドロジーが得られた．

●経営コンサルタント

・第19回 日時：10月３日(土) 14:00〜17:00 場所：東京都勤労福祉会館 テーマ：企業における情報システム部門；杉野 隆（新日鉄 情報システム部)

はじめの間は総務部や経理部に所属していたが，現在では，独立の「情報システム部」となった．そして企業活動の１つの要（かなめ）として，ますます，その重要さを増しつつある．これからは情報活動の中心として，社内のシンク・タンクそして，企業内コンサルタントとして，業務にはげみ，ますます貢献度を高めたいと心がけている．

●環境システム

・10月例会 日時：10月21日(水) 18:00〜20:00
場所：日科技連 参加者：５名
テーマ：Age replacement with random failure distribution：蔵野正美（千葉大)

未知パラメータをもつマルコフ決定過程において，長期期待平均費用基準のもとで最適適応政策を Rose 等は forced-choice cycle の考え方を用いて構成した．この方法を用いて failure distribution が未知の場合の age replacement problem において最適適応政策を構成できることを示した．