あいまい推論

菅野 道夫

1. はじめに

あいまい推論(fuzzy reasoning)というのは，われわれが日常的に行なっている意思決定や予測行為の際の思考過程に表われる近似的推論のモデルのことである．このモデルはあいまい集合，あいまい論理を使って表わされるので，あいまい推論とよばれる．

すげの みちお 東京工業大学 システム科学専攻

ある夏の朝，とても涼しいけれど，日中は暑くなるだろうという予想や，きのう彼女とケンカ別れしたばかりだから，今日電話しても相手にしてくれないだろうというような想像に表われる推論は，古典論理で行なわれる推論とくらべ，よく言ってあいまいで，悪く言えばいいかげんである．

特集に当って

野 尻 秀 之

ファジィ・システムに関する研究は，基礎理論から応用面まで広範囲にわたっており，その研究の概要については，Gaines と Kohout (1977) の報告の中で詳しく論じられている．この特集においては特に応用面に重点を置いて，意思決定における人間とコンピュータとの対話の問題をとりあげ，推論，診断，情報検索，数理計画，意思決定の各分野の最近の研究状況について紹介している．

始めの2編は，あいまい推論とその応用についての報告である．まず，「あいまい推論」では，意思決定や予測行為の際の思考過程に表われる近似的推論のモデルについてのべており，「あいまい診断法」では，あいまい推論の応用として，病気や機械の故障診断法について解説している．次に，「あいまい情報検索」では，人間の有するすぐれた情報処理能力，特に類推機能と概念学習能力をコンピュータに付与する試みについてのべている．

あとの2編は，数理計画法と意思決定支援システムに関するものである．「ファジィ数理計画問題」では，人間の認識に含まれるファジィ性を考慮した数理計画問題について説明しており，また「研究開発におけるファジィ意思決定問題」では，研究開発の意思決定におけるファジィ概念の応用可能性について議論し，ファジィ性を考慮した意思決定支援システムの設計概念について報告している．

今回は紙面の都合上，ファジィ・システムに関する研究のごく一部についてしか紹介することができなかったが，ファジィ理論とその応用については，他に数理科学，計測と制御誌等において特集されているので，本号と合わせてお読みいただければと思う．

しかし，人間はこのようなあいまい推論にもとづいて多くの行動をきめているのである．失敗してもとり返しがつくということが背景にあるにせよ，あいまいな推論をしばしば根拠にして行動するというのは，それによってなにかしらの利益を受けとっているからに他ならない．

あいまい推論の研究は，第1に，人間はあいまいな推論を行なっているという事実，第2に，それは有効であるという評価，第3に，古典論理で表現するのはむずかしいという認識から出発している．本稿はこれら3つのことがらを認めたうえで，近似的推論を数学的に扱う手法をのべる．

2. 近似的推論のモデル

古典論理の推論形式には，よく知られているように modus ponens と modus tollens の2つがある．P，Q を命題，$P\to Q$ を implication(含意)とすると，modus ponens は

$$\frac{P,\ P\to Q}{Q}$$

modus tollens は

$$\frac{\neg Q,\ P\to Q}{\neg P}$$

と表わされる．modus ponens は $P\to Q$ が真で，P が真ならば，Q は真であると推論するもので，たとえば，偶数を2乗すると偶数になる，526は偶数である，よって526の2乗は偶数であるという推論形式である．注意すべきことは，前提が少しでも P と異なれば，たとえ $P\to Q$ が真であっても，結果(Q の真偽)は完全にわからないということである．一方，modus tollens はこの対偶で，$\neg Q$(Q の否定) が真，つまり Q が偽ならば前提 P は偽であると推論するものである．

さて，あいまい推論には，大別して2通りの方法がある．1つは compositional rule of inference とよばれるあいまい関係の合成則を用いるもので，もう1つは無限値論理を拡張したあいまい論理にもとづくものである．本稿では主に後者の話が中心になるが，最初の方法も簡単にふれておく．

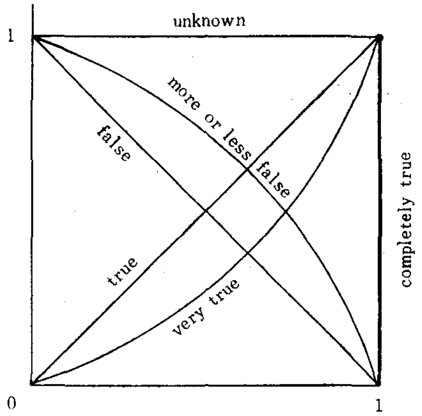

図 1　言語的真理値

X，Y をふつうの集合，A, B をそれぞれ X，Y のあいまい部分集合とする．いま，x is $A\to y$ is B をたとえば，“if x is small then y is big” のようなあいまいな implication とする．これを x と y の間のあいまい関係と考えると，直積集合 $X\times Y$ のあいまい部分集合 $R_{A\to B}$ で表わすことができる．前提 x is A' が与えられたとき，y is $A'\circ R_{A\to B}$ と推論するのが compositional rule of inference とよばれるものである．ただし，$\circ$ はあいまい集合 A' とあいまい関係 $R_{A\to B}$ の max min 合成を表わす．この方法は計算が簡単で，implication の真理値(あいまいなものと考えるべきだが)を考えないという特徴がある．しかし，あいまい関係の構成の統一的方法がなく，推論の表現能力がはっきりしないという欠点がある．

さて，あいまい論理にもとづく方法は，塚本の提案したものが，表現能力もあり，すじ道もしっかりしている．理解のために，いくつかの知識が必要なので，まずそれをのべることにする．

言語的真理値

古典論理や多値論理などのように真理値を区間 [0, 1] の数値ではなく，very true, more or less false などのように言葉によってあいまいに表わしたものを言語的真理値(LTV と略す)とよぶ．これらは真理値空間 [0, 1] のあいまい部分集合で表わすことができる．代表的な LTV のメンバー

シップ関数を図1に示す．古典論理の真は completely true に対応する．

命題の真理値限定

F をあいまい集合で表わされる言語変数，τ を LTV としたとき，命題 "x is F is τ" を "x is F^+" のような意味的に等価な命題に変換することを真理値限定という．たとえば

x is big is more or less true

$=x$ is more or less big

と翻訳する方法である．F^+ を次のように定めると，上のような変換が得られる．

$$h_{F^+}(x)=h_\tau(h_F(x)) \tag{1}$$

h はメンバーシップ関数である．逆に，F, F^+ を与えて，τ を求めることも必要になるが，(1)式は一般には解けないので，通常次のようにする．

$$h_\tau(u)=\sup_{u=h_F(x)} h_{F^+}(x),\ u\in[0,1] \tag{2}$$

強 α-cut

あいまい集合 A の強 α-cut A_α とは次のような非あいまい集合のことである．

$$A_\alpha=\{x\,|\,h_A(x)>\alpha\},\quad \alpha\in[0,1) \tag{3}$$

強 α-cut からメンバーシップ関数を次式により構成できる．

$$h_A(x)=\sup_{\alpha\in[0,1)}[\alpha\times X_{A_\alpha}(x)] \tag{4}$$

ただし，X_{A_α} は A_α の定義関数である．あいまい集合を数学的に扱うには強 α-cut を使ったほうが便利なことが多い．

拡張原理

拡張原理というのは，関数

$$f: X\to Y: x\longmapsto f(x)$$

を X のあいまい部分集合をも変数とし得るように拡張する方法のことである．E を X のふつうの部分集合とすると，E の像 $f(E)$ は定義により

$$f(E)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in E\} \tag{5}$$

あいまい部分集合 A については，$f(A)$ は Y のあいまい部分集合で

$$f(A)_\alpha=f(A_\alpha) \tag{6}$$

によって定義される．メンバーシップ関数は

$$h_{f(A)}(y)=\sup_{y=f(x)} h_A(x) \tag{7}$$

関数 f が2変数関数

$$f: X\times Y\to Z: (x,y)\longmapsto f(x,y)$$

の場合は，A, B をそれぞれ X, Y のあいまい部分集合とすれば

$$f(A,B)_\alpha=f(A_\alpha,B_\alpha) \tag{8}$$

たとえば，$f(x,y)=x+y$ (x,y は実数) とすると

$$(A+B)_\alpha=A_\alpha+B_\alpha \tag{9}$$

のようにして，あいまい集合 A と B の加算が定義される．

あいまい論理

ルカシビッチの無限値論理を拡張したあいまい論理について考える．簡単のために，implication だけを対象にすると，ルカシビッチ論理では

$$/P\to Q/=(1-/P/+/Q/)\wedge 1 \tag{10}$$

ただし，$/P/$, $/Q/\in[0,1]$ で，$/P/$ は命題 P の真理値を表わす．いま，P, Q があいまいな命題で，LTV $\underline{P}$, $\underline{Q}$ をもつものとすると，$P\to Q$ の LTV $\underline{P\to Q}$ は(10)式を拡張することにより

$$\underline{P\to Q}_\alpha=(1-\underline{P}_\alpha+\underline{Q}_\alpha)\wedge 1 \tag{11}$$

と求められる．ここで，$\underline{P\to Q}$ と $\underline{P}$ から $\underline{Q}$ を求める方法を考えよう．実際上，$\underline{P\to Q}$ は true に近いものだけを考えればよく，また $\underline{P}$ は normal ($\Leftrightarrow \sup_{u\in[0,1]} h_{\underline{P}}(u)=1$), convex ($\Leftrightarrow \forall u\in[a,b]$, $h_{\underline{P}}(u)\geq h_{\underline{P}}(a)\wedge h_{\underline{P}}(b)$) と仮定してよいので，$\underline{R}\triangleq \underline{P\to Q}$ とすれば

$$\underline{R}_\alpha=(r(\alpha),1) \tag{12}$$

$$\underline{P}_\alpha=(p_1(\alpha),p_2(\alpha)) \tag{13}$$

となる．ここで $r(\alpha)$, $p_1(\alpha)$ などは $\underline{R}$, $\underline{P}$ のメンバーシップ関数から強 α-cut を求めるとき定まる値である．(11)式を解くと

$$\underline{Q}_\alpha=((p_1(\alpha)+r(\alpha)-1)\vee 0,1] \tag{14}$$

以上の準備のもとに，あいまい論理における推論形式を考えよう．はじめに，あいまいな implication の例をあげてみよう．

(1) 高速道路を走行中，車間距離が短くなったら，減速せよ．

(2) 雨が降りそうなら，傘をもって行け．

いま，車間距離が約20mになったとしたら，ど

うするか．(1) の知識が正しいと思う人は“だいぶ減速する”にちがいない．また，(2) の場合，西の空に黒い雲が出てきたら，“傘をもって行ったほうがよい”と思うに違いない．われわれが日常行なう推論は上のような形で表現される経験や知識にもとづくものが多い．つまり，“距離が約20m”，“黒い雲”という状況のもとに，知っている規則と，その規則の正しさ，あるいは信頼性を参照して，どうすればよいか推論するのではないだろうか．

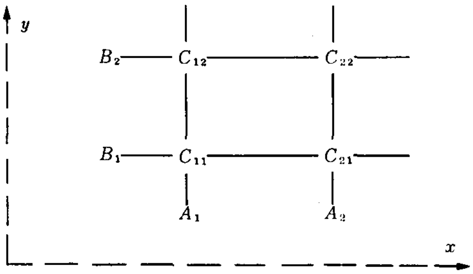

図 2 implication の配置

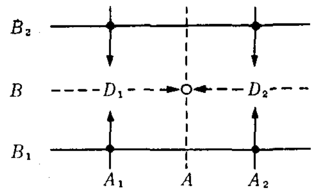

図 3 推論アルゴリズム

強調すべきことは，距離が80m なら10km/h の減速，50m なら15km/h の減速というような形で知識を貯えているのではなく巨視的かつあいまいな形で貯えているということである．あいまい推論の考えはこのような知識による近似的推論の過程を数学的に表現しようとするものである．modus ponens の形で推論過程を一般的に書くと

$$\frac{x \text{ is } P', \text{“}x \text{ is } P \rightarrow y \text{ is } Q\text{” is } \tau}{y \text{ is } Q'}$$

ここで，τ は $\underline{P \rightarrow Q}$ を表わす LTV である．Q' は次のようなアルゴリズムで簡単に求めることができる．

ステップ 1　x is $P' \simeq x$ is P is $\underline{P}$ となるような $\underline{P}$ を求める．

ステップ 2　$\underline{P}$ と $\tau = \underline{P \rightarrow Q}$ とから $\underline{Q}$ を求める．

ステップ 3　y is $Q' \simeq y$ is Q is $\underline{Q}$ となるような Q' を求める．

この方法によると，implication が “x is small $\rightarrow y$ is big” is true で前提が x is more or less small なら，推論結果はおよそ y is more or less big となる．また，前提が x is not P なら，y is unknown が推論される．

ここで，注意しなければならないのは，1つの implication だけでは，一般に前提が異なる($P' \neq P$)とき，P' と P がきわめて近い場合を除いては何も推論できないはずだということである．上の例で，x が more or less small のとき，y が more or less big だろうというのはまちがいで，実は逆の very big であるかも知れない．そこで一般的には，少なくとも 2 つの implication

x is $P_1 \rightarrow y$ is Q_1

x is $P_2 \rightarrow y$ is Q_2

を設定して，前提が P_1 と P_2 の間で与えられた場合のみ，推論できると考えるべきである．この場合の推論は modus ponens により，別々に Q_1' と Q_2' を求め，2 つの結果の平均 $\frac{1}{2}(Q_1'+Q_2')$ か，論理積 $Q_1' \cap Q_2'$ をとることによってなされる．

次に，多次元推論について考えよう．多次元推論とは

$(x$ is A, y is $B) \rightarrow z$ is C

の形の implication によるもので，およそシステムと名のつくものを対象とする場合，多次元というのは本質的である．しかし，この面の研究はこれまで深くなされてはこなかった．

上のタイプの implication は従来，安易に

(1)　$(x$ is $A \rightarrow y$ is $B) \rightarrow z$ is C

(2)　x is A and y is $B \rightarrow z$ is C

(3)　x is $A \rightarrow z$ is C と y is $B \rightarrow z$ is C の組合せ

の形で 1 次元の場合に準じて処理されてきた．けれども，(x is A, y is B) を x is $A \rightarrow y$ is B あるいは x is A and y is B と翻訳したとたん，すでに x と y の間に特殊な関係を仮定しているのであって，それは決して一般的ではない．たと

えば，$z=x^2y$ のような関係があったとき，これと論理関係 (x is $A \to y$ is $B) \to z$ is C とは全然別物である．したがって，変数関係を多次元 implication によって記述するとき，特に注意が必要である．以下，(x is A, y is $B) \to z$ is C を直接扱う方法をのべ，推論形式の記述力について簡単にふれる．

1次元のとき，2つの implication を必要とすれば，2次元のときは4つ必要である．そこで

I_{11} : (x is A_1, y is $B_1) \to z$ is C_{11}

I_{12} : (x is A_1, y is $B_2) \to z$ is C_{12}

I_{21} : (x is A_2, y is $B_1) \to z$ is C_{21}

I_{22} : (x is A_2, y is $B_2) \to z$ is C_{22}

の4つの implication が与えられたとき，(x is A, y is B) という前提に対して，z の値を推論する方法を考える．ただし，A はおよそ A_1 と A_2 の間，B は B_1 と B_2 の間にあるものとする．4つの implication の配置を概念的に図2に示す．アルゴリズムの概略を図3に示す．

はじめに，(x is A_1, y is B) という前提に対し，I_{11} を使って z の値を推論しよう．図3の左側の上向きの矢印がこれを表わしている．modus ponens は次のように書ける．

$$\frac{(x \text{ is } A_1,\ y \text{ is } B),\ (x \text{ is } A_1,\ y \text{ is } B_1) \to z \text{ is } C_{11}}{z \text{ is } C_{11}'}$$

implication の真理値は簡単のために true とし，ここでは省略する．まず

(x is A_1, y is B) $\simeq$ (x is A_1, y is B_1) is τ

となるような τ を求める必要があるが，x is A_1 は固定されているので，この τ は

y is $B \simeq y$ is B_1 is τ

の τ と同じと見なせるので，前述の方法で求めることができる．後は1次元の場合と同じで，結局 C_{11}' を計算できる．次に，I_{12} を使って同様に z の値を推論する．つまり

$$\frac{(x \text{ is } A_1,\ y \text{ is } B),\ (x \text{ is } A_1,\ y \text{ is } B_2) \to z \text{ is } C_{12}}{z \text{ is } C_{12}'}$$

ここで

$$D_1=\frac{1}{2}(C_{11}'+C_{12}')$$

とおいて，D_1 を前提(x is A_1, y is B)に対する z の推定値とする．前提 (x is A_2, y is B) について図のように D_2 を求めると，あらたに2つの implication を得たことになる．すなわち

(x is A_1, y is $B) \to z$ is D_1

(x is A_2, y is $B) \to z$ is D_2

こんどは，図の横向きの矢印に沿って，同じことを繰り返せば，最終的に(x is A, y is B)に対する z の値が推論できる．

この方法はアルゴリズムが示すように，2次元の前提をそのままの形で扱っているところに特徴があり，適当に A_i, B_j, C_{ij} を選ぶことにより，任意の線形関係 (たとえば $z=x+2y$) を4つの implication で正確に表現できるという能力をもっている．関係が非線形であれば，その線形近似が求まるわけである．

3. 結　言

あいまい推論は最近，注目を集めているプロダクションシステムに考え方が似ている．つまり，規則 (implication) の形で，ものごとを記述するわけである．しかし，プロダクションシステムは全体として，どのような能力をもっているのかわかりにくいのに対して，あいまい推論は，いわゆる論理システムから，ふつうの関数システムまで記述でき，また，記述能力も定性的にわかるという特徴をもっている．あいまいな命題を扱えるのはもちろんである．何か，システムを記述し，表現する tool が与えられて，それを使おうとするとき，tool の性質や記述力がわからないと話にならない．たとえば，線形代数がなぜいいかと言えば，その性質はもちろんのこと，線形代数を使って表現すれば，どういう利点があるか，非線形関係の局所的線形近似の仕方にいたるまで，よくわかっているからである．

あいまい推論の応用分野は主に問題解法のアルゴリズム，病気や機械の故障診断，プロセスの制御，システムのモデリングが考えられる．これま

で主に応用されてきたのは制御および診断の分野である．最近はシステムのモデリングへの応用が関心をひいている．またあいまい推論を実行できるような計算機言語の開発も始められている．

システムのモデリングにあいまい推論を応用する際の考え方は，従来のたとえば微分方程式による記述をあいまいなimplicationのセットによる記述に置き換えることによって，システムの物理的性質，観察データ，システムに対する経験的知識等々の手がかりを総合的に使い，複雑なシステムのモデルを作ろうとすることである．

以上，数学的記述が多くなってしまったが，あいまい推論の目的，性質および何ができるかということを理解していただければ幸いである．

参考文献

本稿の内容に関連する文献をいくつかあげる．

一般的なもの：

浅居，Negoita：あいまいシステム理論入門，オーム社(1978)

D. Dubois and H. Prade: Fuzzy sets and systems : theory and applications, Academic Press(1980)

あいまい論理と推論：

L. A. Zadeh : The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Part 1, *Information Science*, Vol. 8, 199/244 (1975), Part 2, ibid., Vol. 8, 301/357 (1975), Part 3, ibid. Vol. 9, 43/80(1975)

Y. Tsukamoto : Fuzzy logic based on lukasievicz logic and its applications to diagnosis and control, Doctoral dissertation, Tokyo Institute of Technology(1979)

J. F. Baldwin : A new approach to approximate reasoning using a fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 2, No. 4(1979)

M. Sugeno and T. Takagi : Multi-dimensional fuzzy reasoning, to appear

あいまい制御：

E. H. Mamdani : Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controller, *Int. J. Man-Machine Studies*, Vol. 8, 669/678(1976)

W. J. M. Kickert and E. H. Mamdani : Analysis of a fuzzy logic controller, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1, No. 1(1978)

Y. Tsukamoto et al. : Fuzzification of LALEPH-1 and its application to control, Proc. ICCS-78, Tokyo(1978)

菅野：あいまい集合と論理の制御への応用，計測と制御，Vol. 18, No. 2(1979)

システムのあいまいモデル：

W. J. M. Kickert : An example of linguistic modelling, in Advances in *Fuzzy Set Theory and Applications* (M. M. Gupta et al. eds.), North Holland(1979)

R. M. Tong : The evaluation of fuzzy models derived from experimental data, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 4, No. 1(1980)

計算機プログラム：

馬野他：Fuzzy 集合処理システムの構成，情報処理，Vol. 18, 884/892(1977)

R. Giles: A computer program for fuzzy reasoning, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 4, No. 3(1980)

M. Itoh and M. Sugeno : On fuzzy sets manipulating language, *Summary of Papers on General Fuzzy Problems*, Report No. 6(1980)

●ミニミニ●　　●OR●

続 まゆつば省エネルギー

自動車を運転するとき，車が動き出したら早めにギヤをシフトアップするように心がけたほうが，燃料消費が少なくなって省エネに寄与するという説がある．心は…．エンジン1回転あたり走る距離が長くなるから．もしそれがほんとなら，ギヤ類はいっさい使わずに，エンジンに車軸を直結してしまうのが一番良いはずだ．

内燃機関には，いちばん効率の良い回転数と負荷の組合せがあるので，早めにシフトアップして低い回転数で荷をかける方法は，決して得策とは言えない．自動変速車では，加速中にアクセルをはなすとギヤがシフトアップされるから，十分加速するまでは不用意にアクセルをはなさないほうが良い結果が得られよう．

(小野勝章)