マトロイド理論の基礎 (4)

大山　達雄

マトロイドの中には，組合せ数学あるいは組合せ理論とよばれる学問分野でとり扱われるトピックと密接に関連しているものも数多く提起されている．今回はそのようなものの中から代表的なものをいくつか紹介してみよう．

3.4　組合せ的マトロイド

〔横断マトロイド〕

組合せ理論の一分野として横断理論 (transversal theory) とよばれるものがある．横断理論と深い関連を有する横断マトロイド (transversal matroid) についてのべよう．

有限集合 E に対して E の部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_1, S_2, \cdots\cdots, S_m\}$ を考える．添字集合を $I=\{1,2,\cdots\cdots,m\}$ とした時，E の部分集合 $S\subseteq E$ が大きさ $|S|$ の部分横断 (partial transversal) であるとは，集合 S から集合 I への1対1対応の写像 φ が存在して，すべての要素 $e\in S$ に対して $e\in S_{\varphi(e)}$ を満足することである．$|S|=m=|I|$ の時に部分横断 S は，特に横断 (transversal, あるいはSDR= system of distinct representatives) とよばれる．

たとえば有限集合 $E=\{1,2,3,4,5\}$，部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$，添字集合 $I=\{1,2,3,4\}$ に対して

$$S_1=\{1,2,3\},\quad S_2=S_3=\{2,3\}$$

$$S_4=\{3,4,5\}$$

が与えられたとする．この時 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ あるいは $\{1,2,3,5\}$ とすると，それぞれに対して集合 S から集合 I への1対1写像 φ が表3.1あるいは表3.2のように得られる．

したがって $S=\{1,2,3,4\}$ あるいは $\{1,2,3,5\}$ はいずれも $\mathscr{S}$ の横断である．また $S=\{2,4\}$ あるいは $\{3,5\}$ などはいずれも $\mathscr{S}$ の横断の部分集合であるから，$\mathscr{S}$ の部分横断である．

おおやま　たつお　埼玉大学

表 3.1

e	1	2	3	4
$\varphi(e)$	1	2	3	4

表 3.2

e	1	2	3	5
$\varphi(e)$	1	3	2	4

$\mathscr{S}$ の部分横断を独立集合と定義すると，有限集合 E 上にマトロイドが構成される．このようにして得られるマトロイドが横断マトロイドである．このことは，たとえば以下に掲げるような方法によって理解されるであろう．

(a) $\mathscr{S}$ の部分横断の集合族がマトロイドの独立性の公理を満足することを示す．

(b) E の任意の部分集合 $A\subseteq E$ に対して，A に含まれる最大の部分横断の要素数を $\rho(A)$ とした時に，関数 $\rho(A)$ がマトロイドの階数関数の公理を満足することを示す．

(c) $\mathscr{S}$ の横断の集合族を $\mathscr{B}$ とした時に，$\mathscr{B}$ の要素が基底に関するマトロイドの公理を満足することを示す．

上の(a)，(b)，(c) のすべてについて詳細な説明を加える必要はないであろう．ここでは特に(a)のみについて，その証明の概要をのべる．

有限集合 $E=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$ および E の部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_1,S_2,\cdots\cdots,S_m\}$ に対して次のような $m\times n$ 行列 $W=(w_{ij})$，$1\leqq i\leqq m$，$1\leqq j\leqq n$，を定義する．

$$w_{ij}=\begin{cases} w_{ij}{}^0\ , & j\in S_i\ \text{の時} \\ 0\ , & j\notin S_i\ \text{の時} \end{cases} \tag{3.5}$$

(ただし $w_{ij}{}^0$ は0でない不確定実数)

(3.5)で与えられる行列 W と $\mathscr{S}$ の部分横断との関連を考えてみよう．E のある部分集合 $S\subseteq E$ が $\mathscr{S}$ の部分横断であるということは，行列 W の列の集合 S に対応する $m\times|S|$ の部分小行列の階数 (rank) が $|S|$ であるということと等価である．つまり列の集合 S に対応して，行列 W の行の集合 R，ただし $|R|=|S|$，が存在して，S および R に対応して得られる W の部分小行列が正則となることが，S が $\mathscr{S}$ の部分横断であるための必要十分条件

である．この時，列の集合Sに対応して得られる行の集合Rに含まれる行はすべて1次独立であることはもちろんである．そこでいまEの部分集合U, Vが$|U|=|V|+1$を満たすような$\mathscr{S}$の部分横断であるとすると，U, Vのそれぞれに対応して上述のように得られる行の集合R_u, R_vは$|R_u|=|U|$, $|R_v|=|V|$を満たす．さらにまたR_u, R_vに含まれる行はそれぞれすべて1次独立となる．したがってベクトル空間における理論から，$R_u \backslash R_v$に含まれる行(v_rと表記する)をR_vに加えることによって$R_v \cup \{v_r\}$がすべて1次独立とすることが可能となる．行の集合$R_v \cup \{v_r\}$に対応して，列の要素$v_c \in U \backslash V$を加えた列の集合$V \cup \{v_c\}$が1次独立となるように得られるので，$V \cup \{v_c\}$は$\mathscr{S}$の部分横断となる．以上でマトロイドの独立性の公理の(I 3)が満たされることが示された．なお(I 1)，(I 2)に関しては自明であるので省略する．このようにしてEの部分集合族$\mathscr{S}$が与えられた時に，$\mathscr{S}$の部分横断の集合を独立集合とするような横断マトロイドが生成される．

〔分割マトロイド〕

横断マトロイドと同様の方法で構成されるマトロイドを紹介しよう．有限集合Eのm個の分割 (partition) $\{P_1, P_2, \cdots\cdots, P_m\}$を考える．つまり$\bigcup_{i=1}^{m} P_i=E$であってかつすべての$i \neq j$に対して$P_i \cap P_j=\phi$(空集合)とする．さらに$m$個の非負整数$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_m$が与えられている．$E$の部分集合$I \subseteq E$は，$1 \leqq i \leqq m$なるすべての$i$に対して$|I \cap P_i| \leqq p_i$を満たす場合に独立集合であるとすると，この独立集合族は独立性に関するマトロイドの公理を満足することがわかる．このようにして生成されるマトロイドが分割マトロイド (partition matroid) である．

分割マトロイドが一種の横断マトロイドであることは次のようにしてわかる．集合Eのm個の分割$\{P_1, P_2, \cdots\cdots, P_m\}$が与えられた時，$1 \leqq i \leqq m$なるそれぞれの$i$に対して部分集合$P_i$を$p_i$回ずつくり返した部分集合族$\mathscr{P}$を考える．つまり$\mathscr{P}$は$\sum_{i=1}^{m} p_i$個の部分集合から成っている．この時$\mathscr{P}$の部分横断が上述の分割マトロイドの独立集合と等価であることは，$\{P_1, P_2, \cdots\cdots, P_m\}$が$E$の分割であることからただちに得られる．以上から，$E$の分割にもとづく上述の定義による独立集合が分割マトロイドの独立集合となり，さらに分割マトロイドが横断マトロイドの一種であることが明らかとなろう．

〔結婚問題〕

横断理論注) の中で最もよく用いられる中心的な定理は，1935年にP. Hall [2] によって与えられたHallの定理であろう．もともとHallの定理は，以下のような“結婚問題”に対してその解答を与えたものである．

「m人の男性とn人の女性と彼ら男女間の知り合いの関係が与えられている．m人の男性が知り合いの女性と結婚できるためには，彼ら男女間の知り合い関係はどのような条件を満たさねばならないか？」

“結婚問題”をグラフ理論の用語を用いて表わすために準備をしておこう．頂点の集合Vと弧の集合Aから成るグラフ$G=(V, A)$が与えられた時，Vを2つの部分集合V_1, V_2に分割し，同じ部分集合に属する頂点の間には弧が存在しないようなグラフを2部グラフ (bipartite graph)という．このような2部グラフを$G=(V_1, V_2, A)$と表わすこともある．なお2部グラフ$G=(V_1, V_2, A)$において，V_1に含まれる任意の頂点とV_2に含まれる任意の頂点の間に弧が存在する時，Gを完全2部グラフ (complete bipartite graph)といい，$|V_1|=m$, $|V_2|=n$に対して$K_{m,n}$と表わす．

グラフ$G=(V, A)$におけるマッチングを定義しよう．Gの弧の集合のうちで，それに含まれるどの2本の弧も同じ頂点を共有しない(2本の弧は隣接しない)ものをマッチング(matching)という．グラフ$G=(V, A)$のマッチングの中で要素数が最大のものをGの最大マッチング (maximum matching)という．またGに含まれるすべての頂点に対してマッチングに含まれるいずれかの弧が接続している時，そのマッチングをGの完全マッチング (perfect matching) という．ある頂点$v \in V$がマッチングMに含まれる弧と接続している時，その頂点vはマッチングMに関して飽和 (saturate) しているとよぶことにすると，Gの完全マッチングとはグラフ$G=(V, A)$のすべての頂点が飽和しているようなマッチングであるということができる．

頂点の集合V_1, V_2と弧の集合Aから成る2部グラフ$G=(V_1, V_2, A)$が与えられた時，GのマッチングMの弧がV_1に含まれるすべての頂点と接続しているならば，つまりV_1に含まれるすべての頂点がマッチングMに関して飽和しているならば，Mを2部グラフ$G=(V_1, V_2, A)$におけるV_1からV_2への完全マッチングとよぶ．

例を掲げよう．図3.16にあるグラフの弧の集合$\{1, 2, \cdots\cdots, 7\}$において，$M=\{3, 5\}$は最大マッチングではあるが，ひとつの頂点が$M$に関して飽和していないので完全マッチングではない．また図3.17のグラフの弧の集合$\{1, 2, 3, 4, 5\}$において，$M=\{1, 5\}$は最大マッチングであってかつ完全マッチングである．$V_1=\{x_1, x_2\}$, $V_2=\{y_1, y_2, y_3\}$を頂点集合，$A=\{1, 2, 3, 4\}$を弧の集合とする図3.18の2部グラフ$G=(V_1, V_2, A)$において，$M=$

注) 横断理論に関する解説書としてMirsky [1] がある．

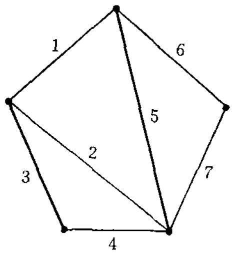

図 3.16

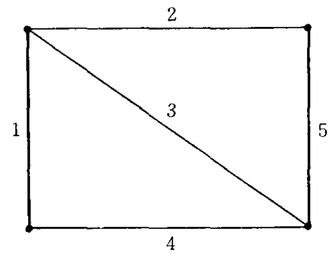

図 3.17

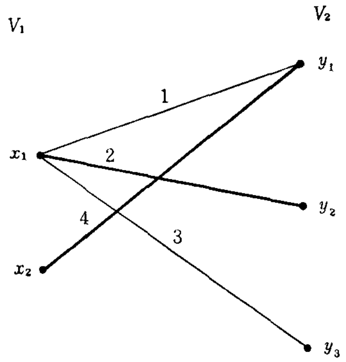

図 3.18　2部グラフ $G=(V_1, V_2, A)$

{2,4} は頂点集合 V_1 から V_2 への完全マッチングである.

“結婚問題”に話をもどそう.“結婚問題”が与えられた時に次のような2部グラフ $G=(V_1, V_2, A)$ を対応させる. G における頂点の集合 V_1, V_2 はそれぞれ男性, 女性の集合に対応するものとし, またそれぞれの男女の組が知り合いの関係にある場合にのみ対応する頂点間に弧を与えることにする.

たとえば $|V_1|=4$, $|V_2|=5$ としたひとつの例を示そう. 男性および女性の間の知り合いの関係が表3.3のように与えられている. このような前提の下における“結婚問題”に対応する2部グラフ $G=(V_1, V_2, A)$ は図3.19のようになる.

上の議論から,各男性が知り合い関係にある女性と“結婚”できるということは, 対応する2部グラフ $G=(V_1, V_2, A)$ において V_1 から V_2 への完全マッチングが存在することであるということができる. したがって Hall によって提起された“結婚問題”をマッチングの用語を用いて表現すると,「2部グラフ $G=(V_1, V_2, A)$ において V_1 から V_2 への完全マッチングが存在するための必要十分条件を求めよ」ということになる.

〔Hall の定理〕

Hall の定理を横断の用語を用いて表わしてみよう. n 個の要素から成る有限集合 $E=\{e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n\}$ と E の m 個の部分集合の族 $\mathscr{S}=\{S_i, i\in I\}$, ここで $I=\{1, 2, \cdots\cdots, m\}$ は添字集合, が与えられた時に, $\mathscr{S}$ が横断つまり SDR を有するための必要十分条件を与えるのが Hall の定理である. この Hall の定理に関しては, Hall 自身以外によってもいろいろな形の証明が与えられ, そのより一般的な形も Rado [3], Ore [4], あるいは Perfect [5] らによって得られている.注) また一方, マトロイドの分割等における Hall の定理の一般化もなされているが, これについては後にのべる.

表 3.3

男　性	知り合いの女性
m_1	w_1, w_3
m_2	w_1, w_3, w_5
m_3	w_2
m_4	w_2, w_4

定理 3.2 (Hall) 有限集合 E の部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_i, i\in I\}$ が横断 (SDR) を有するための必要十分条件は, 添字集合 I の任意の部分集合 $J\subseteq I$ に対して

$$|S(J)|\geqq|J| \tag{3.6}$$

が成立することである. ただし上式における $S(J)$ は

$$S(J)=\bigcup_{i\in J} S_i \tag{3.7}$$

を表わすものとする.

Hall の定理の証明は定理の一般化とともに多くの形で与えられている. ここでは Hall 自身によって与えられた最も簡明な帰納法を用いた証明を紹介する.

証明　条件 (3.6) が $\mathscr{S}$ に対する横断が存在するための必

注) Hall の定理の一般化の経緯は, Mirsky [1], Welsh [6] などにものべられている.

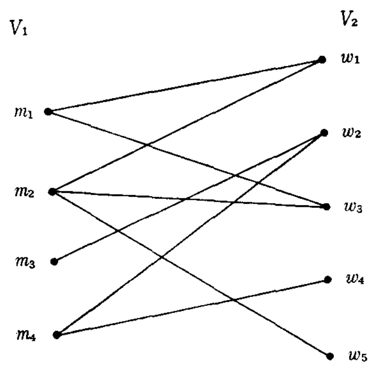

図 3.19　2部グラフ $G=(V_1, V_2, A)$

要条件であることは明らかである．そこで以下では，(3.6) の条件の十分性を添字集合 I の要素数に関する帰納法を用いて証明する．

$m=|I|=1$ の時に式(3.6)が成り立つならば，$\mathscr{S}$が横断を有することは自明である．いま $m>1$ として $m-1$ 個以下の部分集合の族に対して条件 (3.6) が成り立つならば，$\mathscr{S}$は横断を有すると仮定する．条件(3.6) に対して以下の2つのケースを考える．

ケース1：すべての $|J|<m$ に対して $|S(J)|\geqq|J|+1$.

部分集合 S_1 に属する要素 $e_1\in S_1$ に対して，各部分集合 S_i, $2\leqq i\leqq m$, から要素 e_1 を除いた集合を考える．

$$T_i=S_i\backslash\{e_1\},\quad 2\leqq i\leqq m \tag{3.8}$$

とすると，部分集合の和 $T(J)$ に関しては以下の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}|T(J)|&=|S(J)\backslash\{e_1\}|\\&\geqq|S(J)|-1\\&\geqq|J|+1-1\\&\geqq|J|.\end{aligned} \tag{3.9}$$

ケース2：$|J|<m$ なるある J に対して $|S(J)|=|J|$.

帰納法の仮定から部分集合族 $\{S_i, i\in I\}$ は横断を有する．この横断を V (ここで明らかに $|V|=|J|=|S(J)|=k$ かつ $V=S(J)$ である) として，次のような新しい部分集合を考える．

$$\begin{aligned}T_i&=S_i\backslash V\\&=S_i\backslash S(J),\quad i\in I\backslash J.\end{aligned} \tag{3.10}$$

この時 $I\backslash J$ の任意の部分集合として $J'\subseteq I\backslash J$ をとると，添字集合 J' に対する (3.10) の T_i の和集合 $T(J')$は以下の関係を満足する．

$$\begin{aligned}|T(J')|&=|T(J')|+|S(J)|-|J|\\&=|T(J')\cup S(J)|-k\\&=|S(J\cup J')|-k\\&\geqq|J'|+|J|-k\\&\geqq|J'|.\end{aligned} \tag{3.11}$$

($J'\cap J=\phi$(空集合)と Hall の条件(3.6)を利用)

したがって部分集合族 $\{T_i, i\in I\backslash J\}$ は帰納法の仮定と Hall の条件とによって横断 W を有する．$V\cap W=\phi$(空集合)であるから，$V\cup W$ は部分集合族$\mathscr{S}$の横断となる．

以上から，(3.9)，(3.11) よりいずれのケースにおいても$\mathscr{S}$の横断が存在し，Hall の条件(3.6)が部分集合族 $\mathscr{S}$ の横断が存在するための必要十分条件であることが示された． ☒

上の証明を“結婚問題”の用語と前提を用いて解釈すると，以下のようになる．なお定理3.2の前提と“結婚問題”とのひとつの対応として，有限集合 $E=\{w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n\}$ を女性の集合とし，部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_i,\ i\in I\}$ (ただし $I=\{1,2,\cdots\cdots,m\}$) の各要素 S_i を男性 m_i と知り合いの関係にある女性の集合とみなすことが可能であるので，それにしたがって議論を進める．

まずケース1においては，$1\leqq k<m$ なるどの k 人の男性の集合に対しても全部で $k+1$ 人以上の知り合いの女性がいると仮定する．このとき1組の知り合い関係にある男女を“結婚”させると，残りの $m-1$ 人の男性に対しても(3.6)の条件が成立する．したがって前提よりこれらの $m-1$ 人の男性は知り合いの女性と“結婚”することができ，m 人すべての男性が知り合いの女性と“結婚”できることが示される．

ケース2においては，$1\leqq k<m$ なるちょうど k 人の女性と知り合いである k 人の男性の集合があると仮定する．これら k 人の男性は，帰納法の仮定により k 人の女性と知り合い同志で“結婚”できる．そこで残りの $m-k$ 人の男性と $n-k$ 人の女性から成る集合を考える．いま $1\leqq h<m-k$ なる h 人の男性の集合を考えると，彼らは少なくとも h 人の女性と知り合いでなければならない．なぜならば，そうでないとすると，これらの h 人と前述の“結婚”した k 人とから成る $h+k$ 人の男性の集合は $h+k$ 人未満の女性と知り合いということになり前提に反する．したがって残りの $m-k$ 人の男性も同数の知り合いの女性とそれぞれ“結婚”できることになる．このようにしてケース2においても，すべての男性は知り合いの女性と“結婚”できる．

定理3.2を2部グラフのマッチングの用語を用いて表現すると次の系が得られる．

系3.3 頂点の集合 V_1, V_2 を有する2部グラフが与えられている．V_1 の任意の部分集合 $X\subseteq V_1$ に対して，V_2 の部分集合であって X に含まれる少なくともひとつの頂点と連結している頂点の集合を $\varphi(X)$ と表わす．頂点の集合 V_1 から V_2 への完全マッチングが存在するための必要十分条件は，V_1 の任意の部分集合 $X\subseteq V_1$ に対して

$$|\varphi(x)|\geqq|X| \tag{3.12}$$

が成立することである．

〔Hall の定理の一般化〕

Rado [3]，Ore [4] あるいは Perfect [5] らによって Hall の定理の一般化がなされたことを前にのべたが，彼らによって得られた結果を与える前にそれらを特別形として与える結果をひとつ証明とともに紹介しよう．

次の定理における SR (system of representatives) とは，前述の SDR あるいは横断において同一要素の反復をも許容したものである．SR，SDR を数学的に定義すると，次のようにのべることができる．有限集合 E，添字集合 I，そして E の部分集合族$\mathscr{S}=\{S_i, i\in I\}$ が与えられている．E の要素の族 $\{e_i, i\in I\}$ が$\mathscr{S}$の SR であ

るとは，1対1写像$\pi: I\to I$が存在して任意の$i\in I$に対して$e_i\in S_{\pi(i)}$となることである．また$\mathscr{S}$のSDRでは，上のSRにおいて$i\neq j$に対して常に$e_i\neq e_j$でなければならない．

定理3.4 有限集合E，添字集合I，そしてEの部分集合族$\mathscr{S}=\{S_i,\ i\in I\}$が与えられている．関数$\mu: 2^E\to Z^+$(非負整数の集合)が$E$の任意の部分集合$A$, Bに対して以下の(a)，(b)を満足する．

(a) $A\subseteq B$ならば，$\mu(A)\leqq\mu(B)$

(b) $\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)\leqq\mu(A)+\mu(B)$.

このとき$\mathscr{S}$がSR$\{e_i,\ i\in I\}$を有しかつ任意の$J\subseteq I$に対して

$$\mu(\{e_i,\ i\in J\})\geqq|J| \qquad (3.13)$$

となるための必要十分条件は，任意の$J\subseteq I$に対して

$$\mu(S(J))\geqq|J| \qquad (3.14)$$

が成り立つことである．

上の定理における関数μは劣モヂュラー関数であって条件(a)，(b)はそれぞれマトロイドの階数関数の満たすべき公理($R2$)，($R3$)に相当している．また関数μが$\mu(A)=|A|$, $A\subseteq E$, を満たす場合には，定理3.4が前述のHallの定理(定理3.2)となることも容易に理解されよう．定理3.4における条件(3.14)の必要性は関数μが非減少関数であることから明らかであるので，十分性のみについて証明を与える．

証明(十分性) $\mathscr{S}$の部分集合のうちで2個以上の要素を含むものがあるので(なければ終了)，それをS_1とする．そこで部分集合S_1から前提条件を変えることなく1個の要素を除去することができることを示す．この“除去手続”をくり返すことによって，最終的には各部分集合S_i, $1\leqq i\leqq m$，が1個ずつの要素を有する集合となり，しかも(3.14)が満たされるので$\mathscr{S}$のSRが得られたことになる．

“除去手続”の正当性を示そう．部分集合S_1が2つの異なる要素x, yを含み，いずれも除去すると条件(3.14)を満たさなくなると仮定する．このとき集合$\{2, 3, \cdots, m\}$の部分集合A，Bが存在して，それらは以下の関係を満たすはずである．

$$\mu((S_1\backslash\{x\})\cup S(A))\leqq|A| \qquad (3.15)$$

$$\mu((S_1\backslash\{y\})\cup S(B))\leqq|B|. \qquad (3.16)$$

したがって(3.15)，(3.16)および関数μの劣モヂュラー性を用いると

$$\begin{aligned}|A|+|B|&\geqq\mu((S_1\backslash\{x\})\cup S(A))+\mu((S_1\backslash\{y\})\cup S(B))\\&\geqq\mu(S(A\cup B)\cup S_1)+\mu(S(A\cap B))\\&\geqq|A\cup B|+1+|A\cup B|\end{aligned}$$

となるので矛盾が生ずる．したがって2個以上の要素を有する部分集合に対しては，条件(3.14)をこわさないような要素の除去が常に可能でなければならない．こうして“除去手続”の正当性が得られる． ☒

前述のように定理3.4において$\mu(A)=|A|$, $A\subseteq E$, とするとHallの定理が得られるので，定理3.4はそれ自体Hallの定理の一般化であるが，それ以外にも定理3.4から特殊なケースとして得られ，同時にHallの定理の一般形となっているものがいくつかある．それらを以下に紹介しよう．

定理3.4の関数μが任意の整数dを用いて$\mu(A)=|A|+d$(この関数が定理3.4の中のμに関する条件を満たしていることは明らかであろう)の形で与えられると，次の定理(Oreの定理)が得られる．なお定理にある部分横断の不完全度(defect)とは，有限集合Eの部分集合族$\mathscr{S}=\{S_i, i\in I\}$が与えられた時に$\mathscr{S}$の部分横断$T$に対して$|I|-|T|$によって定義される．したがって$\mathscr{S}$の部分横断$T$の不完全度が0ならば，$T$は$\mathscr{S}$の横断となる．

定理3.5(Ore) 有限集合Eの部分集合族$\mathscr{S}$が不完全度dを有する部分横断をもつための必要十分条件は，すべての部分集合$J\subseteq I$に対して

$$|S(J)|\geqq|J|-d \qquad (3.17)$$

が成立することである．

上の定理を言い換えると，次のように表わすこともできる．Eの部分集合族$\mathscr{S}$が大きさtの部分横断をもつための必要十分条件は，$1\leqq k\leqq|I|=m$なる任意のk個の部分集合S_iの和集合がすべて少なくとも$k+t-m$個の要素を含むことである．また“結婚問題”の用語を用いると，上の定理は男性の集合のうちでd人を除くすべての男性が知り合いの女性と“結婚”できるための必要十分条件を与えていることに相当する．

定理3.4における関数μがマトロイドMの階数関数rに相当する，つまり任意の$A\subseteq E$に対して$\mu(A)=r(A)$の場合に相当するのがRadoの定理である．

定理3.6(Rado) 有限集合E上で定義されたマトロイドMの階数関数をrとする．部分集合族$\mathscr{S}=\{S_i, i\in I\}$が$M$において独立であるような$\mathscr{S}$の横断を有するための必要十分条件は，$I$の任意の部分集合$J\subseteq I$に対して

$$r(S(J))\geqq|J| \qquad (3.18)$$

が成立することである．

マトロイドMにおける独立集合であるような$\mathscr{S}$の横断を特に独立横断(independent transversal)という．定理3.6がHallの定理となるのは，任意の部分集合$A\subseteq E$に対して$\mu(A)=r(A)=|A|$，つまりマトロイドMが自由マトロイド(あるいは離散マトロイド)の場合である

ことも明らかであろう．

Hall の定理の一般化であって，同時に Ore の定理(定理3.5)の一般形でもある Perfect の定理を紹介しよう．なおこの定理は，定理3.4 における関数 μ がマトロイドの階数関数 r と非負整数 d を用いて，$\mu(A)=r(A)+d$, $A\subseteq E$, とした場合に相当する．このようにして定義された関数 μ が定理 3.4 における前提(a)，(b)を満たしていることは容易にわかる．

定理3.7(Perfect)　有限集合 E の部分集合族を $\mathscr{S}=\{S_i\ i\in I\}$, さらに E 上のマトロイド M の階数関数を r とする．$d\leqq|I|$ なる非負整数 d が与えられた時に，$\mathscr{S}$ が不完全度 d の部分横断 T を有しかつ T が M において独立集合となるための必要十分条件は，I のすべての部分集合 $J\subseteq I$ に対して，$r(S(J))\geqq|J|-d$　　(3.19)

が成立することである．

上の定理において $d=0$ とすると Rado の定理（定理3.6）が得られる．これまでとりあげた Hall の定理の一般化のプロセスを図3.20に示す．矢印の方向が一般化の方向を表わし，記入した項目が一般化の内容を表わしている．

横断マトロイドの階数関数について考えてみよう．有限集合 E の部分集合 $X\subseteq E$ が与えられた時に，E の部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_i, i\in I\}$ に対して次式で与えられる新しい部分集合族を考える．

$$\mathscr{S}'=\{S_i\cap X,\ i\in I\}. \tag{3.20}$$

部分集合 $X\subseteq E$ が不完全度 d の $\mathscr{S}$ の部分横断を含むことと(3.20)で与えられる部分集合族 $\mathscr{S}'$ が不完全度 d の部分横断を有することは等価である．したがって定理3.5を用いると次の定理がただちに得られる．

定理3.8　集合 E の部分集合を $X\subseteq E$ とする．X が非負整数 d に対して不完全度 d の $\mathscr{S}$ の部分横断を含むための必要十分条件は，添字集合 I のすべての部分集合 $J\subseteq I$ に対して，$|S(J)\cap X|\geqq|J|-d$　　(3.21)

が成立することである．

定理 3.8 は次のように言い換えることもできる．集合 E の部分集合 $X\subseteq E$ が大きさの $\mathscr{S}$ の部分横断を含むための必要十分条件は，添字集合 I のすべての部分集合 $J\subseteq I$ に対して

$$|S(J)\cap X|\geqq|J|+t-|I| \tag{3.22}$$

が成り立つことである．

集合 E 上で部分集合族 $\mathscr{S}$ に対して定義された横断マトロイドにおいて，E の部分集合 $X\subseteq E$ が階数 k を有するということは，式(3.20)で定義される部分集合族 $\mathscr{S}'$ が少なくとも大きさ k の部分横断を有することと等価である．このための必要十分条件は，式(3.21)あるいは式(3.22)より I のすべての部分集合 $J\subseteq I$ に対して

$$|S(J)\cap X|\geqq|J|+k-|I| \tag{3.23}$$

が成り立つことである．以上の議論から．横断マトロイドの階数関数 $r(A), A\subseteq E$, は次式のように与えられる．

$$r(A)=\min_{J\subseteq I}\{|S(J)\cap A|-|J|+|I|\},\quad A\subseteq E. \tag{3.24}$$

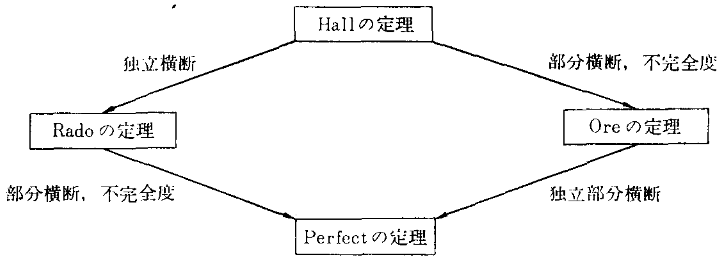

図 3.20　Hall の定理の一般化プロセス

〔もうひとつの横断マトロイド〕

これまでにのべた横断マトロイドにおいては，有限集合 E 上の部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_i, i\in I\}$ の部分横断をマトロイドの独立集合として定義した．それに対して部分集合族 $\mathscr{S}$ の添字集合 I に対しても，部分集合 $J\subseteq I$ に対応する部分集合族 $\mathscr{S}_J=\{S_i,\ i\in J\}$ が横断を有する場合に J を独立集合と定義することによってもうひとつのマトロイドが構成される．

このようにして定義されたマトロイドも横断マトロイドであるが，集合 E 上で定義された前述の横断マトロイドを $M(\mathscr{S})$ と表わすのに対して，このマトロイドを $M'(\mathscr{S})$ と表わすことにする．$M'(\mathscr{S})$ の階数関数 $r'(J)$, $J\subseteq I$, は $M(\mathscr{S})$ の階数関数を求めたのと同様の議論を進めることによって，次式のように得られる．

$$r'(J)=\min_{K\subseteq J}\{|S(K)|-|K|+|J|\},J\subseteq I. \tag{3.25}$$

有限集合 E の上の部分集合族 $\mathscr{S}=\{S_i, i\in I\}$ に対して定義されたこれらの 2 種類の横断マトロイド $M(\mathscr{S})$, $M'(\mathscr{S})$ は，2 部グラフを用いて以下のように説明することができる．図3.21の 2 部グラフ $G=(E,\mathscr{S},A)$ は，

$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$$
$$\mathscr{S}=\{S_1,S_2,S_3,S_4\},\qquad I=\{1,2,3,4\}$$
$$S_1=\{e_2,e_4\},\qquad S_2=\{e_1,e_3\}$$
$$S_3=\{e_2,e_5\},\qquad S_4=\{e_1,e_3,e_5\}$$

に対して

$$e_i\in S_j \text{ ならば，弧}(e_i,S_j)\in A$$

として得られたものである．

集合 E 上の横断マトロイド $M(\mathscr{S})$ においては，部分

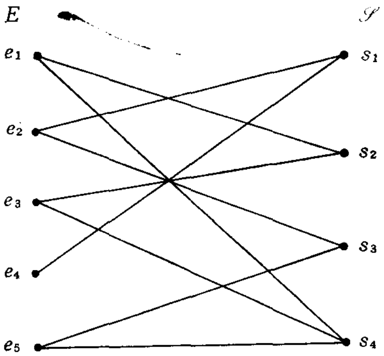

図 3.21　2部グラフ $G=(E,\mathscr{S},A)$

集合 $A\subseteq E$ に対する階数 $r(A)$ は，A に接続する弧の集合に含まれる最大マッチングの弧の数に相当する．たとえば $A=\{e_2,e_3,e_4\}$ とすると，弧の集合 $\{(e_2, S_3), (e_3, S_4), (e_4,S_1)\}$ が A に接続する弧の集合に含まれる最大マッチングとなるので，$r(A)=3$ が得られる．

一方，集合 $I=\{1,2,3,4\}$ 上の横断マトロイド $M'(\mathscr{S})$ においては，部分集合 $J\subseteq I$ に対する階数 $r'(J)$ は，頂点の集合 $\mathscr{S}_J=\{S_i,\ i\in J\}\subseteq\mathscr{S}$ に接続する弧の集合に含まれる最大マッチングの弧の数に等しい．たとえば $J=\{1,2,3\}$ とすると，頂点の集合 $\mathscr{S}_J=\{S_1,S_2,S_3\}$ に接続する弧の集合に含まれる最大マッチングは $\{(e_4,S_1),(e_3,S_2)(e_5,S_3)\}$ で与えられるので，$r'(J)=3$ となる．

これらの2つの横断マトロイド $M(\mathscr{S})$，$M'(\mathscr{S})$ の階数はいずれも対応する2部グラフの最大マッチングに含まれる弧の数に等しい．図3.21の2部グラフ $G=(E,\mathscr{S},A)$ の場合には，これらのマトロイドの階数は4（たとえば $\{(e_1,S_4), (e_2,S_1), (e_3,S_2), (e_5,S_3)\}$ が2部グラフ $G=(E,\mathscr{S},A)$ の最大マッチングに対応する）となることが容易に確かめられる．

参 考 文 献

[1] L. Mirsky : *Transversal Theory*, Academic Press, London, 1971

[2] P. Hall : On representatives of subsets, *J. London Math. Soc.*, Vol. 10, 1935, pp.26–30

[3] R. Rado : A theorem on independence relations, *Quart. J. Math.* (Oxford), Vol. 13, 1942, pp.83–89

[4] O. Ore : Graphs and matching theorems, *Duke Math. J.*, Vol. 22, 1955, pp.625–639

[5] H. Perfect : Independence spaces and combinatorial problems, *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 19, 1969, pp.17–30

[6] D. J. A. Welsh : *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976