特集 効用理論とその応用

一対比較による効用の測定

宮武 信春

1. はじめに

近年は，価値の多様化の時代であり，さまざまな商品やサービスが提供される一方で，交通問題・エネルギー問題に見られるように社会的なプロジェクトでは意見の対立が顕在化している．このような背景のもとで，利用者や住民の価値意識を測定し，その成果を製品設計やシステム設計に生かす必要性が高まっている．そこで本報告では，一対の評価対象の属性に関する情報を提示し，その選好関係を質問することによって，多属性効用関数を構成し価値意識を測定する方法を紹介する．まず，1章で一対比較データによる効用測定の考え方をのべ，2章でKeeneyの方法やProbit分析法などの測定方法を示し，3章では住宅選好に適用した事例を紹介する．

2. 選好関係と効用の測定

効用理論の発展とともに数多くの効用の測定方法が提案されてきた．効用理論は，評価対象の集合 A の上に定義された選好関係を保存する実数値関数 $u: A \rightarrow R_e$ に関する理論である．評価対象 $a \in A$ が n 次元の属性空間内の点 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$で表わされるものとする．この時，序数的効用関数は，次の性質をもつ実数値関数である．

$$a \succsim a' \Leftrightarrow u(a) \geqq u(a') \quad \text{for } \forall a, a' \in A$$

効用理論は，選好関係と順序づけにおける構造の相違から，大きく3種に大別できよう．

(1) 序数的効用理論

上記の順序関係のみを保存する効用関数の理論であり，Conjoint系の測定系の理論［1］，［2］が含まれる．

(2) 基数的効用理論

von Neumann, Morgenstern 流の効用理論であり，主観確率と期待効用の概念にもとづいている［3］．正の線形変換の範囲内で一意的(基数的）な効用の存在と一意性が示されており，測定方法の研究としてはKeeneyの研究［4］が有名である．

(3) 確率的効用理論

評価対象の選好関係が確率的である場合，すなわち $a \succsim a'$ なる確率 $P(a, a')$ の構造に関する理論である．Marshak, Luce らによって公理化が進められ，特にLuceの選択公理［5］は有名である．心理学におけるThurstonのモデル[11]，Logitモデル[7]，Probitモデル[11]，ToverskyのEBA(Elimination by Aspects)[6]モデルなどは，確率的効用モデルとして位置づけられる[12]．

このように，理論とモデル化の相違によって効用の測定方法も数多く存在するので，詳細はおのおのの文献を参照していただき，本報告では，代

みやたけ　のぶはる　㈱三菱総合研究所

表的かつ簡便な方法を紹介する．

本報告では,「アンケート調査に利用でき，かつ一対比較質問結果のデータにもとづいて多属性効用関数を構成する方法」として, Keeney の方法, Probit 法をとりあげて紹介する．いずれの方法においても，効用関数 $u(a)$ を構成するためには，属性別効用関数 $u_i(a_i)$ の推定と重み係数の推定に分解して行なう必要がある．

表 1　一対比較データの形式

質問情報			回答結果		
質問番号	A の属性	A' の属性	A が好ましい	甲乙がつけ難い	A' が好ましい
	a_1　a_2 ……… a_n	a'_1　a'_2 ……… a'_n			
1	a_{11}　a_{22} ……… a_{1n}	a'_{11}　a'_{12} ……… a'_{1n}	○		
2	a_{21}　a_{22} ……… a_{2n}	a'_{21}　a'_{22} ……… a'_{2n}			○
3	a_{31}　a_{32} ……… a_{3n}	a'_{31}　a'_{32} ……… a'_{3n}		○	
4	a_{41}		○		
⋮	⋮				

属性別効用関数の測定は, Neumann と Morgenstern のくじによる測定方法が代表的である．すなわち，最悪の属性レベルを a°, 最善レベルを a^* とするとき，p の確率で a° が $(1-p)$ の確率で a^* が得られるようなくじ $\begin{pmatrix} p, & 1-p \\ a^\circ, & a^* \end{pmatrix}$ が a と無差別となるような p を答えさせ，a の効用を $u(a)=p$ として与える方法である[4], [9].

重み係数を求めるための質問は，属性ベクトルの対 (a, a') を回答者に提示し，a が好ましいか $(a \succ a')$, 無差別か $(a \sim a')$, a' が好ましいか $(a' \succ a)$ の3種のいずれかの判断を得るという一対比較質問による．この質問と回答のデータは，表1の形に要約できる．

多属性効用関数が求まれば，評価対象を望ましく設計することは容易である．すなわち，予算や技術面の制約のもとで効用を極大化するように属性を決定すればよい．

3.　効用の測定方法

3.1　Keeney の方法

Keeney は，意思決定者の選好構造が選好独立性と効用独立性を満たすとき決定者の多属性効用関数が，加法形または乗法形で表現できることを証明している[4];[9]．この方法は，Neumann と Morgenstern の期待効用仮説にもとづくものであり，乗法形の構成手順を与えた点が高く評価できる．

Keeney による効用関数の構成手順を要約すると次のとおりである．

(手順1)　評価したい代替案の属性を決定する．

(手順2)　各属性 $i (i=1, \cdots, n)$ の最も好ましいレベル a_i^* と最も好ましくない a_i° を設定する．

(手順3)　各属性 i に対して，a_i° と a_i^* をおのおの 1/2 の確率で得ることのできるくじを $\langle a_i^\circ ; 1/2 ; a_i^* \rangle$ で表わす．意思決定者に対して $\langle a_i^\circ ; 1/2 ; a_i^* \rangle \sim \hat{a}_i$ となる確実同値レベル $\hat{a}_i$ を尋ねる．

(手順4)　各属性に対して $u_i(a_i^\circ)=0$, $u_i(a_i^*)=1$, $u_i(\hat{a}_i)=1/2$ となるように属性別効用関数 $u_i(a_i)$ を指数関数または1次関数で表わす．

(手順5)　$a^*=(a_1^*, \cdots, a_n^*)$, $a^\circ=(a_1^\circ, \cdots, a_n^\circ)$ とする．a^* を確率 p で，a° を確率 $(1-p)$ で得ることのできるくじを $\langle a^*; p; a^\circ \rangle$ で表わす．各属性 i に関して，$\langle a^*;p;a^\circ \rangle \sim (a_1^\circ, \cdots, a^\circ_{i-1}, a_i^*, a^\circ_{i+1}, \cdots, a_n^\circ)$ となるような確率 p を意思決定者に尋ねる．そして，$w_i=p$, $(i=1, \cdots, n)$ とおく．

（手順6） $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$ ならば，求める効用関数は次の加法的効用関数となる．

$$u(a)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i u_i(a_i)$$

$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\fallingdotseq 1$ のときでも，非常に1に近ければ上式が成立すると考える．そうでなければ手順7へいく．

（手順7） 次式を ω に関して解く．

$$1+\omega=\prod_{i=1}^{n}(1+\omega\,\omega_i)$$

この解 ω は $\sum_{i=1}^{n}\omega_i>1$ のとき $-1<w<0$, $\sum_{i=1}^{n}\omega_i<1$ のときは $0<w$ の範囲にただ1根だけ存在する[4]．このとき求める効用関数は次の乗法的効用関数となる．

$$1+\omega u(a)=\prod_{i=1}^{n}(1+\omega\omega_i u_i(a_i))$$

本研究では表1に示す形の質問方法にしたがっているので，手順5の $\omega_i=p$ を尋ねていない．そこで手順5を変更する必要があるので以下のような方法を用いた．

まず，比較対の属性ベクトル (a, a') の属性レベルを変えることにより，$a\sim a'$ なる回答を得る．これは $u(a)=u(a')$ を満たすので次の連立方程式を満たす重み係数を求めればよい．

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i u_i(a_{ik})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i u_i(a'_{ik})$$

または

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\omega\omega_i u_i(a_{ik}))=\prod_{i=1}^{n}(1+\omega\omega_i u_i(a'_{ik}))$$

ただし，$k=1,2,\cdots,K$ で K は $a\sim a'$ となった回答数である．加法的ならば $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，乗法的ならば $1+\omega=\prod_{i=1}^{n}(1+\omega\omega_i)$ が成立するので，$a\sim a'$ となる回答数 K が n 個以上あれば，一般に重み係数を求めることができる．

ただし，重み係数が trivial な解をもつ場合については，属性レベルを変えた $a\sim a'$ なる新たな回答を得て計算しなおす必要がある．

3.2 Probit 分析法

Probit 分析法は計量経済学や心理学の分野で用いられている推定法の一種であり，これを加法的効用関数の推定に適用することができる[9]．

この方法は一対比較質問による選好判断のデータから最尤推定法によって重みを推定する方法である．

一対比較質問とその回答結果の関係を表現する次の確率的モデルを考える．

$$\begin{cases} a>a' \text{ iff } & \varepsilon<y \\ a\sim a' \text{ iff } & -\varepsilon\leqq y\leqq+\varepsilon \\ a<a' \text{ iff } & y<-\varepsilon \end{cases}$$

ただし

$$\begin{aligned} y&=\delta U+\xi \\ &=h\omega+\xi \end{aligned}$$

δU：効用差の評価値

ξ：判断誤差を表わす正規確率変数であり，平均0，分散 σ^2 とする．

ε：判断のしきい値

y：効用差の判断値

$$h=(u_1(a_1)-u_1(a_1'),\cdots,u_n(a_n)-u_n(a_n'))$$

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^t$$

このとき n 個の一対比較質問結果から，重みベクトルを推定する問題は次のようになる．

〔推定問題〕

効用差の評価式と比較判断の式のもとで，n 個の選好判断結果 $\{z_1,\cdots,z_n\}$ のデータにもとづいて ω を推定せよ．

（効用差の評価式）

$$y_t=h_t\omega+\xi_t,\quad t=1,2,\cdots,n$$

（比較判断の式）

$$z_t=\delta(y_t),\quad t=1,2,\cdots,n$$

ただし，$\delta(\cdot)$ は図2に示す関数である．

このモデルは効用差の評価値 y が判断のしきい値 ε で区切られる3つの区間のいずれに入るかによって選好判断が行なわれると考える．t 番目の質問対 (a_t, a'_t) のもとで，3種類の選好判断を行なう確率は図1より，おのおの次のようになる．

$$\mathrm{Prob}(a_t\prec a_t')=\mathrm{Prob}(y<-\varepsilon)=\Phi\left(\frac{-\varepsilon-h_t\omega}{\sigma}\right)$$

$$\mathrm{Prob}(a_t\sim a_t')=\mathrm{Prob}(-\varepsilon\leqq y\leqq+\varepsilon)$$

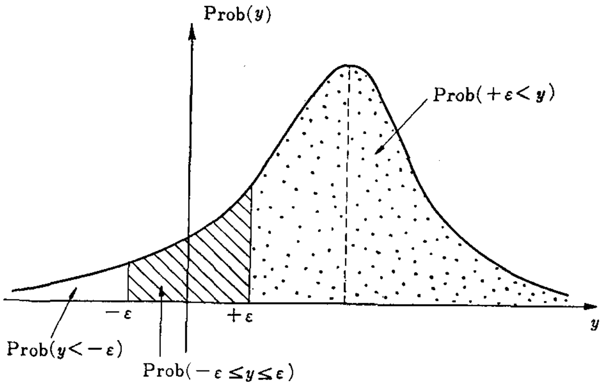


図 1 Probit 法の選好確率

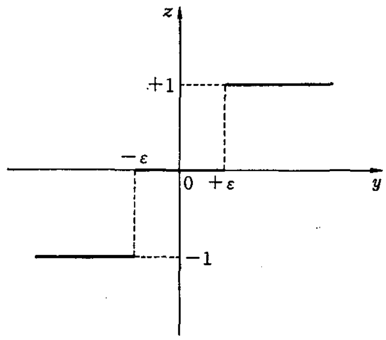


図 2 Probit 法の比較判断関数

$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon-h_t\omega}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon-h_t\omega}{\sigma}\right)$$

$$\mathrm{Prob}(a_t \succ a_t')=\mathrm{Prob}(\varepsilon<y)=1-\Phi\left(\frac{\varepsilon-h_t\omega}{\sigma}\right)$$

ただし

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-v/2)dv$$

そこで重みの推定値 $\hat{w}$ は次の尤度関数を最大化する重みベクトルとして求められる.

$$J(\omega,\varepsilon,\sigma)=\prod_{t\in I_{-1}}\Phi\left(\frac{-\varepsilon-h_t\omega}{\sigma}\right)$$

$$\times\prod_{t\in I_0}\left\{\Phi\left(\frac{\varepsilon-h_t\omega}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon-h_t\omega}{\sigma}\right)\right\}$$

$$\times\prod_{t\in I_1}\left\{1-\Phi\left(\frac{\varepsilon-h_t\omega}{\sigma}\right)\right\}$$

ただし, I_{-1}, I_0, I_{+1} はそれぞれ $z=-1, 0, 1$ に対応する質問番号の集合である. 上式を最大化する $(\omega, \varepsilon, \sigma)$ は, Newton Raphson 法などの非線形最適化手法で解くことができる.

4. 住宅選好分析への適用 [10]

アンケート調査にもとづいて, 土地付一戸建住宅の価値分析を行なった. まず, 住宅の価値を表わす属性として, 表2に示す7つの属性をとりあげた. これらの属性は, 不動産鑑定評価の評価属性を参考にして, 主なものを選択したものである.

次に, 住宅購入予定者(A氏)に対して, Keeney の方法にしたがって属性別効用関数を求めた. また, 33通りの一対比較質問を表3のような形式で行ない前章の連立方程式を解くことによって, 次の効用関数を得た.

表 2 住宅選好における属性

	属　　性	属 性 の レ ベ ル
1	住宅の価格	1000万円≦a_1≦2000万円
2	住宅の広さ	敷地面積80㎡(延べ床面積60㎡)≦a_2≦敷地面積170㎡(延べ床面積120㎡)
3	通勤の便	0分≦a_3≦90分
4	日あたり	0時間≦a_4≦12時間
5	買い物の便	日常の買物に歩く時間 0分≦a_5≦30分
6	公共サービス	学校, 病院, 公園等に近く非常に便利(a_6=0) 〃　遠く　〃　不便(a_6=1)
7	航空機騒音	まったく気にならない(a_7=0), ややうるさい(a_7=1), うるさい(a_7=2), かなりうるさい(a_7=3), 非常にうるさい(a_7=4), 耐えられないほどうるさい(a_7=5)

表 3 一対比較質問の例

住宅 A	Aを好む A≻B	甲乙なし A～B	Bを好む A≺B	住宅 B
住宅価格 1,800万円／戸 通勤時間　30分				住宅価格 1,500万円 通勤時間　60分

表 4　2つの方法による限界代替率

方法 ＼ 属性	住宅価格に対する限界代替率						
	住宅価格	住宅の広さ	通勤の便	日照時間	買物の便	公共サービス	航空機騒音
Keeney の方法	1.0	−10.28 万円/㎡	8.01 万円/分	−19.32 万円/時	22.03 万円/分	111.43 万円/単位	71.08 万円/単位
Probit 法	1.0	−10.26	9.45	−12.06	30.70	88.95	96.07

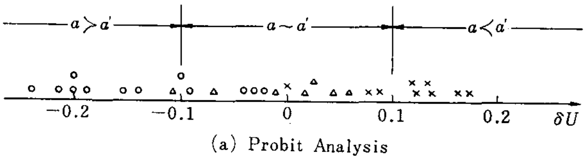
表の値は，各属性が1単位変化した場合の効用の変化を住宅価格に換算したものである。

$$1-0.928u(a)=(1-0.50u_1(a_1))(1-0.47u_2(a_2))(1-0.39u_3(a_3))(1-0.20u_4(a_4))(1-0.42u_5(a_5))(1-0.07u_6(a_6))(1-0.23u_7(a_7))$$

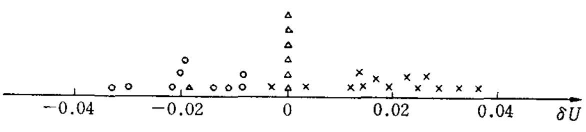
ただし，
$$u_1(a_1)=1.78-0.34\,exp(0.008a_1)$$
$$u_2(a_2)=1.31-4.72\,exp(-0.016a_2)$$
$$u_3(a_3)=2.77-1.77\,exp(0.005a_3)$$
$$u_4(a_4)=1.31-1.31\,exp(-0.120a_4)$$
$$u_5(a_5)=1.31-0.31\,exp(0.048a_5)$$
$$u_6(a_6)=-a_6+1$$
$$u_7(a_7)=-0.2a_7+1$$

属性別効用関数は，その指数部の係数が零に近いことから線形性が強いことがわかる．Keeney の方法によって，効用関数は乗法的であることがわかった．しかしながら，A氏の希望する住宅の水準の近くでは，十分線形近似できそうである．そこで，Probit 法もあわせて適用し加法形の効用関数も同時に求めてみた．

Probit 法の場合には，比較のためにより単純



(a) Probit Analysis



(b) Keeney's Method

○：$a>a'$，△：$a\sim a'$，×：$a<a'$

図 3　効用差と選好

化し，$u_i(a_i)=a_i$ とみなし，次の加法形の場合の重み係数を前章の方法で推定した．

$$u(a)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i a_i$$

この方法は，質問データの範囲内の効用関数を加法形に近似した推定値を与えている．

Keeney の方法と Probit 法の結果を比較するためには，住宅価格に対する他の属性の限界代替率(M_{i1})を用いるのが便利である．

$$M_{i1}=\frac{\partial U}{\partial a_i}\Big/\frac{\partial U}{\partial a_1}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$u(a)=\sum w_i a_i$ の場合，限界代替率は $M_{i1}=w_i/w_1$ である．限界代替率の算定結果を表4に示す．

この限界代替率は，住宅のある属性が1単位変化した場合の効用増と等価な住宅価格の増加額を示しているので，興味深い解釈が可能である．すなわち，Keeney の方法による結果から，A氏の住宅選好について，次の事柄が言えよう．

(1) 通勤時間を10分少なくできるならば，約80万円を追加的に支払ってよいと判断している．

(2) 広さが10m² 増えるならば，約100万円を追加してよいと考えている．

(3) 航空機騒音が極端にひどいことは，約350万円の住宅価格の低下であると考えている．

Probit 法と Keeney の方法の結果を表4で比較すれば，A氏の希望住宅の近隣では，2つの方法の限界代替率が非常に近い値となっていることが理解できる．

次に，推定した効用の差 $\delta U=u(a)-u(a')$

に応じて，選好判断を行なっているか否かをチェックするために，図3を作成した．効用差が零の近くで $a \sim a'$ と回答していることがわかる．

Keeney の方法では，連立方程式に組み込まれた $a \sim a'$ の回答については，完全に効用差が零となっている．Probit 法では，3種の選好判断の範囲が効用差の軸上に記入されている．

最後に，Keeney の方法と Probit 法の長所短所について箇条書きする．

(1) Keeney の方法．加法形とくらべて一般的な乗法的効用関数を構成できる．しかし，くじによる比較質問を行なうならば，回答がむずかしい．本報告の方法は，無差別となる属性レベルを質問し連立方程式を解くので，きめ細かい比較質問が必要となる．

(2) Probit 法．$a \succ a'$ なる選好確率が予測できるので便利であるが，加法形近似を行なっている．乗法形などへの拡張も考えられるが，いずれにせよ非線形最適化計算がわずらわしい．

いずれの方法も一長一短であるので，用途に応じて工夫する必要があろう．

5. まとめ

一対比較による多属性効用関数の推定方法について，Keeney の方法と Probit 法を中心に紹介した．多属性効用関数の測定方法に関する話題は多い．一対比較ではなく多対選択結果から多属性効用を測定する方法も考えられる．

また，一対比較データに適用できる方法としては，Logit モデル，回帰判別法などのさまざまな方法が考えられる[10]．さらに，計算機との対話によって，効用関数を求めたり効用を極大化する代替案を選択する方法［9］も考えられている．そして，本書でのべた個人の効用の測定ではなく，集団の選好関係を表現する数理モデルの構成方法も考えられている．これら書き足りない点も多く，本文も多属性効用の測定の一面を紹介したにすぎない．しかし，価値のアセスメントは，将来ますます重要性が高まるものであり，体系的な測定方法の整備が進むことを望むものである．

参考文献

［1］ A. Toversky : The Intransitivity of Preferences, *Psychological Review*, 76, 31/48(1969)

［2］ D. H. Krantz, R. D. Luce, P. Suppes and A. Toversky : Foundations of Measurement I, Academic Press, N. Y.(1971)

［3］ P. Fishburn : Utility Theory for Decision Making, John-Wiley, N. Y.(1970)

［4］ R. L. Keeney and H. Raiffa : Decision with Multiple Objectives, John-Wiley, N. Y.(1976)

［5］ R. D. Luce : Individual Choice Behavior, John-Wiley, N. Y.(1959)

［6］ A. Toversky : Elimination by Aspects : A Theory of Choice, *Psychol. Rev.*,(1972)

［7］ D. R. Cox : Analysis of Binary Data, Chapman an Hall, London(1970)

［8］ 市川惇信：意思決定の数理 I～III，計測と制御 13-11, 13-12,(1974), 14-2(1975)

［9］ 市川惇信編：多目的決定の理論と方法，計測自動制御学会，(1980)

［10］ 宮武信春：意思決定モデルの推定論的研究，東工大学位論文(1980)

［11］ 印東太郎編：心理測定・学習理論，森北出版(1977)

［12］ クームス，ドーズ，トヴァスキー(小野茂監訳)：数理心理学序説，新曜社(1970)