多属性効用理論の発展

中村　豊

1. はじめに

社会システムのような大規模システムにおいて複数の代替案の評価を行なう場合，さまざまな観点から評価しなければならない．そのとき，それらの観点からの評価は互いにコンフリクトしているのが普通である．すなわち，すべての観点からの評価がすぐれているような代替案が存在するのはまれである．このような場合に最適な代替案を選択するための方法論の1つとして多属性効用理論がある．この理論はさまざまの観点からの評価値（属性値）をある条件のもとで統合し，統合された評価値により代替案に優劣をつけ最適な代替案を選択する方法論を与える．また，各評価値を代替案を選択した場合の結果の値であると解釈すると，その結果が不明確であっても，結果の生起する確率がわかれば，評価の期待値を計算することにより，代替案の優劣を評価することができる．

本稿では，多属性効用理論の基礎となる期待効用理論の概説を行ない，多属性効用理論で得られている主な結果について示す．

2. 期待効用理論の発展

多属性効用理論は von Neumann と Morgenstern [12],[20],[35] に始まる期待効用理論を基礎としている．この期待効用理論は確率測度の**混合集合**(mixture set) 上の順序を保存する線形な実数値関数(**効用関数**)の存在に関する理論として種々の公理系により体系づけられてきた [12],[20]．そこで，本節では基礎となる**線形効用理論** (linear utility theory) について概説し，特に近年，その拡張として確立された理論についてのべる．

2.1 線形効用理論

結果の集合を X とし，その上の単純確率測度 p の集合を P とする．単純確率測度とは確率測度であり，有限集合 $A\subset X$ に対して $p(A)=1$ となるものを言う．任意の $p, q\in P$ に対して $\lambda p+(1-\lambda)q$, $0\leq\lambda\leq 1$ も単純確率測度となるので，このように生成されるすべての単純確率測度が P に含まれるとき P を混合集合と言う．$\succ$ を P 上に定義された順序とする．すなわち，$p\succ q, p, q\in P$ は p のほうが q より好まれることを表わす．また，$p\sim q$ は $p\succ q, q\succ p$ のどちらでもないことを示し，p と q は無差別であると言う．

線形効用理論では次のような P 上の順序 $\succ$ を保存する線形な実数値関数 u が存在するための必要十分条件を種々の公理系として体系づけている．

$$p\succ q \Leftrightarrow u(p)>u(q) \tag{1}$$

$$u(\lambda p+(1-\lambda)q)=\lambda u(p)+(1-\lambda)u(q) \tag{2}$$

なかむら　ゆたか　㈱三菱総合研究所

ここで，u は正線形変換に対して一意となる．(2)の線形性によりp_xを結果xが生起する確率とすると，$u(p)=\sum p_x u(x)$ となり p の評価はおのおのの結果の評価値（効用）の期待値を与えることがわかる．

(1), (2)を満たすuが存在するための必要十分条件となる１つの公理系は，次の公理Ｉ～Ⅲである［12］．

公理Ｉ（順序）

$\succ$と$\sim$は推移律を満たし，$p \succ q \Rightarrow \text{not } q \succ p$

公理Ⅱ（独立性）

$$p \succ q,\ 0<\lambda<1$$
$$\Rightarrow \lambda p+(1-\lambda)r \succ \lambda q+(1-\lambda)r$$

公理Ⅲ（連続性）

$p \succ q \succ r \Rightarrow$ある$\alpha, \beta \in (0,1)$に対して

$$\alpha p+(1-\alpha)r \succ q,\ q \succ \beta p+(1-\beta)r$$

この公理系の他に公理Ｉの順序を陽的に仮定しない興味ある次のような公理系がuが存在するための必要十分条件として得られている［21］．

公理Ⅳ（連続性）

$p \succ q, q \succ r \Rightarrow$少なくとも１つの $0<\alpha<1$ に対して $q \sim \alpha p+(1-\alpha)r$

公理Ｖ（優越性）

(i) $p \succ q, p \succsim r \Rightarrow p \succ \lambda q+(1-\lambda)r$

(ii) $q \succ p, r \succsim p \Rightarrow \lambda q+(1-\lambda)r \succ p$

(iii) $p \sim q, p \sim r \Rightarrow p \sim \lambda q+(1-\lambda)r$

公理Ⅵ（独立性）

$$p \sim q \Rightarrow \frac{1}{2}p+\frac{1}{2}r \sim \frac{1}{2}q+\frac{1}{2}r$$

意思決定者がこれらの公理系を満たすような選好判断を行なうと仮定できるならば，u を構成することにより意思決定者のP上の選好順序を知ることができる．しかし，これらの公理系が合理的であるということに関しては数多くの批判があり議論されてきている．そこで，これらの各公理の批判をやわらげるために，それぞれの公理を満たさなくてよい線形効用理論を拡張したいくつかの理論が提案されてきている．たとえば，公理Ｉを満たす必要がない Fishburn のＳＳＢ理論［21］，公理Ⅱを弱い条件にしたChewとMacCrimmon［4］, Machida［30］の理論，公理Ⅲを満たす必要がない辞書的期待効用理論［13］などがある．

2.2 線形効用理論の拡張

本節では Fishburn が最近確立した線形効用理論の拡張の１つである**ＳＳＢ理論**についてのべる．ＳＳＢ理論は推移律を満たす必要がないように線形効用理論を拡張したもので，それはP上の順序を保存する次のような性質をもつ **skew-symmetric bilinear** な実数値関数 ϕ の存在を示したものである．

$$\phi(p,q)=-\phi(q,p) \tag{3}$$
$$\phi(\lambda p+(1-\lambda)q, r)=\lambda\phi(p,r)+(1-\lambda)\phi(q,r) \tag{4}$$

(3), (4)よりϕは双線形になることは明らかである．

ϕ が存在するための必要十分条件である公理系は公理Ⅳと公理Ｖおよび次の公理で与えられる．

公理Ⅶ（対称性）

$p \succ q \succ r, p \succ r, q \sim \frac{1}{2}p+\frac{1}{2}r$ のとき

$$\lambda p+(1-\lambda)r \sim \frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q$$
$$\Leftrightarrow \lambda r+(1-\lambda)p \sim \frac{1}{2}r+\frac{1}{2}q$$

この ϕ は正の乗数倍に対して一意に存在することが証明されている．

ϕ の双線形性により p_x, q_y をそれぞれ結果 x, y が生起する確率とすると $\phi(p,q)=\sum p_x q_x \phi(x,y)$ となる．ϕ は p が q より好ましい程度を表わすと解釈すると，p が q より好ましい程度はおのおのの結果の好ましさの程度の期待値を与えることがわかる．

3. 多属性効用理論の発展

結果 $x \in X$ がベクトル $x=(x_1,\cdots,x_n)$ として表わされているとする．このとき各x_iはi番目の評価（属性）の値を表わす．属性iの値全体をX_iとすると，結果の集合は $X=X_1\times\cdots\times X_n$ として表

わされる．X上の混合集合をPとし，$P_1, \cdots, P_n$を$p \in P$の周辺分布の集合とすると，P_1はX_1上の混合集合である．

多属性効用理論はP上の線形効用関数uが存在することを前提としている．このuを求めることができれば，互いにコンフリクトしている各属性の評価を統合した評価を行なうことができる．しかし，uを直接的に求めることは一般に非常に困難である．そこで，多属性効用理論は$p_i \in P_i$を$p \in P$のi属性の周辺分布とすると$u(p)=f(u_1(p_1), \cdots, u_n(p_n))$のように比較的求めるのが容易である各$P_i$上の線形効用関数$u_i$の関数として表現$f$（**分解表現**）を求める方法論を提供する．

この方法論としては，各P_i上の選好順序が他の属性の値$x_{\bar{i}} \in X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$によりどのように変化するかを条件づけることにより$f$の陽的な表現を構成することが中心となっている．この条件の基本的なものとして Keeney の**効用独立性** (utility independence) [24〜28] がある．効用独立性を用いてfの加法型，乗法型多種線形型の分解表現を構成する方法論は Keeney と Raiffa により体系づけられている [28]．

多属性効用理論の最近の発展は，この効用独立性を拡張し，より広範囲のfの分解表現を求める方向にある．この効用独立性を拡張するには大きく分けて2つの方向があると考えられる．1つは各u_iの形が$x_{\bar{i}}$の変化にどのように依存するかに着目した近似的な意味でのfの構成方法である．その条件としては Kirkwood の **parametric dependence**[29]，Bellの**補間独立性**(interpolation independence) [2],[3]，田村・中村の**凸依存性**[31],[33],[34]などがある．もう1つの拡張の方向としては，各P_i上の選好順序が$x_{\bar{i}}$の値により変化する条件を効用独立性を含む形で拡張するものである．その条件として Fishburn と Keeney の**一般化効用独立性** [16],[18]，Fishburn の**双独立性**(bilateral independence)[14],[15],Farquhar の **fractional independence**[5],[6],Fishburn と Farquhar の**第n効用独立性**(degree-n utility independence)[19] などがある．また，中村 [32] により第n効用独立性と凸依存性を結びつけるいくつかの独立性条件が定義されている．これら以外のものとして Bell の**条件付効用独立性**[1], Farquhar の **multivalent preference structure** [8]〜[10] が定義されている．

以下の節で，上でのべた主な独立性条件の定義とその分解表現について示す．

3.1 独立性条件

$X=Y \times Z$ となっている場合を以下で考える．$p \in P$ の Y, Z に対する周辺分布を p_Y, p_Z とし，その混合集合を P_Y, P_Z とする．$(p_Y, z), (y, p_Z)$をそれぞれ$z \in Z, y \in Y$により条件づけられたp_Y, p_Zを表わすとする．

次に若干の定義を行なう．

(i) $p \succ q \Leftrightarrow q \succ^* p$

(ii) $\sim = X \times X \Rightarrow \succ = \phi$

(iii) $p_Y \succ_z q_Y \Leftrightarrow (p_Y, z) \succ (q_Y, z)$

(iv) $p_Y \succ_{zz'} q_Y \Leftrightarrow \frac{1}{2}(p_Y, z)+\frac{1}{2}(q_Y, z')$

$$\succ \frac{1}{2}(p_Y, z')+\frac{1}{2}(q_Y, z)$$

(i)の$\succ^*$は$\succ$の双対な選好順序を表わす．(ii)より，すべてのpが互いに無差別であるとき順序$\succ$をϕで表わす．(iii)の$\succ_z$は$z \in Z$により条件づけられたP_Y上の選好順序を表わす．(iv)の$\succ_{zz'}$は$z, z' \in Z$の2つの値により条件づけられたP_Y上の選好順序を表わす．これをm個の値$(m \geq 2)$により条件づけられたP_Y上の選好順序として拡張した定義は中村 [32]，Farquhar [5] により与えられている．

以下に今までに得られている独立性条件のいくつかを示そう．

(1) 加法独立性 [11],[28]

$$Y(VI)Z \Leftrightarrow \succ_{zz'} = \phi \quad \text{for all } z' \in Z$$

これは，YがZに加法独立であるとは，$z, z' \in Z$により条件づけられたP_Y上の順序がすべて無差

別になることを示している.

(2) 効用独立性

$$Y(UI)Z \Leftrightarrow \succ_z = \succ_{z'} \text{ for all } z \in Z$$

これは，YがZに効用独立であるとは，任意の$z \in Z$により条件づけられたP_Y上の順序は$z' \in Z$により条件づけられたP_Y上の順序と一致することを示す.

(3) 一般化効用独立

$$Y(GUI)Z \Leftrightarrow \succ_z = \{\succ_{z'}, \succ_{z'}*, \phi\} \text{ for all } z \in Z$$

これは，YがZに一般化効用独立であるとは，任意の$z \in Z$により条件づけられたP_Y上の順序は$z' \in Z$により条件づけられたP_Y上の順序と一致するか，逆転するか，すべて無差別になることを示す.

(4) 双独立性

$$Y(BI)Z \Leftrightarrow \succ_{zz'} = \succ_{zz''} \text{ for all } z' \in Z$$

これは，YがZに双独立であるとは，任意のz, $z' \in Z$により条件づけられたP_Y上の順序は$z, z' \in Z$により条件づけられたP_Y上の順序に一致することを示す.

(5) 凸依存性

$$Y(CD_m)Z \Leftrightarrow v_z(y) = \sum_{i=1}^{m+1} \theta_i(z) v_{z_1}(y)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \theta_i(z) = 1$$

ただし，$v_z(y) \triangleq [u(y,z) - u(y^\circ, z)] / [u(y^*, z) - u(y^\circ, z)]$

これは，YがZに第m凸依存であるとは，任意の$z \in Z$に対するY上の正規化された条件付効用関数$v_z(y)$は$z_1, \cdots, z_{m+1} \in Z$に対する$Y$上の正規化された条件付効用関数$v_{z_1}(y), \cdots, v_{z_{m+1}}(y)$の凸結合で表わされることを示す．補間独立性は$Y(CD_1)Z$と同じ定義になっている.

(6) 第m効用独立性

$Y(UI_m)Z \Leftrightarrow$ (i)すべての$z^* \in A$に対して

$$\bigcap_{z \in A \backslash \{z^*\}} I(z) \not\subseteq I(z^*)$$

$$\text{(ii)} \quad \bigcap_{z \in A} I(z) = \bigcap_{z \in Z} I(z)$$

ここで，AはZのm個の要素をもつ部分集合である．$I(z)$は条件付無差別関係として次のように定義される.

$$p_y I(z) q_y \Leftrightarrow (p_y, z) \sim (q_y, z), p_y, q_y \in P$$

これは，YがZに第m効用独立であるとは，$z \in A$により条件づけられた無差別関係の共通集合は$z \in Z$により条件づけられた無差別関係の共通集合に一致し，しかも，そのような関係になるAの要素の最小の数がmになっていることを示す.

3.2 分解表現

多属性効用関数の分解表現fが属性ごとの効用関数を用いて構成されるために提案されている一般的な形式は Fishburn による次の**格子モデル**[17]がある.

$$u(y,z) = \sum_i \sum_j g_i(y) h_i(z)$$

前節で定義されている各独立性条件はすべてこの格子モデルに当てはまる分解表現を与える．第m効用独立性はこの一般的な格子モデルが成立するための必要十分条件になっている．また，凸依存性もこれと同値な条件になっていることが示されている[32]．前節に示した条件以外の独立性条件は格子モデルには当てはまらない分解表現を構成する．すなわち，完全には属性ごとの効用関数により分解表現を構成することはできないモデルになっている.

以下に前節で示した(1)〜(5)の条件が成り立つ場合に2属性効用関数$u(y,z)$がどのように分解表現されるかを示そう．多属性効用関数の分解表現は2属性効用関数の分解表現を用いることにより容易に導びくことができるので，本稿では割愛することにする.

(1) 加法的分解表現

$$Y(VI)Z \Leftrightarrow u(y,z) = u(y, z^\circ) + u(y^\circ, z)$$

(2) 乗法的分解表現

$Y(UI)Z, Z(UI)Y$ 又は $Y(GUI)Z, Z(GUI)Y$

$$\Leftrightarrow u(y,z) = u(y, z^\circ) + u(y^\circ, z) + ku(y, z^\circ) u(y^\circ, z)$$

(3) One-way Utility Independence 分解表現

$Y(UI)Z$ または $Y(GUI)Z$

$$\Leftrightarrow u(y,z)=u(y,z^\circ)+u(y^\circ,z)+v(y)f(y^*,z)$$

(4) **双分解表現**

$Y(BI)Z$

$$\Leftrightarrow u(y,z)=u(y,z^\circ)+u(y^\circ,z)+kf(y,z^*)f(y^*,z)$$

(5) **凸分解表現**

(i) $Y(CD_m)Z, Z(CD_m)Y$

$$\Leftrightarrow u(y,z)=u(y,z^\circ)+u(y^\circ,z)+\sum_{i=1}^{m^*}\sum_{j=1}^{m^*}k_{ij}f(y,z^i)f(y^j,z)+\sum_{i=1}^{m^*}\sum_{j=1}^{m^*}k'_{ij}G(y,z^i)H(y^j,z)$$

(ii) $Y(CD_m)Z$

$$\Leftrightarrow u(y,z)=u(y,z^\circ)+u(y^\circ,z)+v(y)f(y^*,z)+\sum_{i=1}^{m^*}\sum_{j=1}^{m}k_{ij}G(y,z^i)G(y^j,z)$$

ただし，k, k', k_{ij}, k'_{ij} は定数

$v(y)\triangleq u(y,z^\circ)/u(y^*,z^\circ)$, $u(y^\circ,z^\circ)=0$

$f(y,z)\triangleq u(y,z)-u(y,z^\circ)-u(y^\circ,z)$

$G(y,z)\triangleq u(y^*,z^\circ)f(y,z)-u(y,z^\circ)f(y^*,z)$

$H(y,z)\triangleq u(y^\circ,z^*)f(y,z)-u(y^\circ,z)f(y,z^*)$

$y^\circ, y^*, y^i\in Y(i=1,\cdots,m), z^\circ, z^*, z^i\in Z$ $(i=1,\cdots,m)$

は定まった条件レベルである．

$\sum_{i=1}^{n^*}$；第 n 項の添字を＊に変換する．

4. むすび

多目的意思決定における有力な方法論である多属性効用理論について最新の研究も含めて概説を行なった．他に Fishburn [22]，Farquhar [7]，市川 [23] らの解説も出ているので，それらも参考にしていただければと思う．

この理論は線形効用理論を基礎としているが，最近，線形効用理論を拡張した理論が提案されており，この拡張された理論を基礎として多属性効用理論を展開させていくという研究方向も考えられている．

参考文献

[1] Bell, D. E.: A Utility Function for Time Streams Having Inter-Period Dependencies, *Operations Research*, Vol. 25 (1977), 448-458

[2] Bell, D. E.: Consistent Assessment Procedures Using Conditional Utility Functions, *Operations Research*, Vol. 27 (1979), 1054-1066

[3] Bell, D. E.: Multiattribute Utility Functions, Decompositions Using Interpolation, *Management Sciences*, Vol. 25 (1979), 744-753

[4] Chew, S. H. and MacCrimmon, K. R.: Alpha-Nu Choice Theory: A Generalization of Expected Utility Theory, Working Paper No. 669, July 1979, University of British Columbia.

[5] Farquhar, P. H.: A Fractional Hypercube Decompositions Theorem for Multiattribute Utility Functions, *Operations Research*, Vol. 23 (1975), 941-967

[6] Farquhar, P. H.: Pyramid and Semicube Decompositions of Multiattribute Utility Functions, *Operations Research*, Vol. 24 (1976) 256-271

[7] Farquhar, P. H.: A Survey of Multiattribute Utility Theory and Applications, in M. K. Starr and M. Zeleny (eds.), Multiple Criteria Decision Making, North-Holland/*TIMS Studies in the Management Sciences*, Vol. 6 (1977) 59-89

[8] Farquhar, P. H.: Multivalent Preference Structures, *Mathematical Social Sciences*, Vol. 1 (1980)

[9] Farquhar, P. H.: Advances in Multiattribute Utility Theory, *Theory and Decisions*, Vol. 12 (1980) 381-394

[10] Farquhar, P. H. and Fishburn, P. C.: Equivalence and Continuity in Multivalent Preference Structures, *Operations Research*, Vol. 29 (1981) 282-293

[11] Fishburn, P. C.: Independence in Utility

Theory with Whole Products Sets, *Operations Research*, Vol. 13 (1965) 28-45

[12] Fishburn, P. C.: Utility Theory for Decision Making, Wiley, New York, 1970

[13] Fishburn, P. C.: A Study of Lexicographic Expected Utility, *Management Sciences*, Vol. 17 (1971) 672-678

[14] Fishburn, P. C.: Bernoullian Utilities for Multiple-Factor Situations, in J. L. Cochrane and M. Zeleny (eds.), Multiple Criteria Decision Making, University of South Carolina Press, Columbia South Carolina (1973) 47-61

[15] Fishburn, P. C.: von Neumann-Morgenstern Utility Functions on Two Attributes, *Operations Research*, Vol. 22 (1974) 35-45

[16] Fishburn, P. C. and Keeney, R. L.: Seven Independence Conditions and Continuous Multiattribute Utility Functions, *Journal of Mathematical Psychology*, Vol. 11 (1974) 294-327

[17] Fishburn, P. C.: Approximations of Two-Attribute Utility Functions, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 2 (1977) 30-44

[18] Fishburn, P. C. and Keeney, R. L.: Generalized Utility Independence and Some Implications, *Operations Research*, Vol. 23 (1975) 928-940

[19] Fishburn, P. C. and Farquhar, P. H.: Finite-Degree Utility Independence, unpublished manuscript, Bell Telephone Laboratories, Murry Hill, New Jersey, 1979

[20] Fishburn, P. C.: Subjective Expected Utility, A Review of Normative Theories, *Theory and Decisions*, Vol. 13 (1981) 139-199

[21] Fishburn, P. C.: Nontransitive Measurable Utility, unpublished manuscript, Bell Telephone Laboratories, Murry Hill, New Jersey, 1981

[22] Fishburn, P. C.: Multiattribute Utilities in Expected Utility Theory, in D. E. Bell, R. L. Keeney and H. Raiffa (eds.), Conflicting Objectives in Decisions, Wiley, New York (1977) 172-19

[23] 市川惇信編：多目的決定の理論と方法，計測自動制御学会，1980

[24] Keeney, R. L.: Quasi-Separable Utility Functions, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 15 (1968) 551-565

[25] Keeney, R. L.: Utility Independence and Preference for Multiattributed Consequences, *Operations Research*, Vol. 19 (1971) 875-893

[26] Keeney, R. L.: Utility Functions for Multiattributed Consequences, *Management Science*, Vol. 18 (1972) 276-287

[27] Keeney, R. L.: Multiplicative Utility Functions, *Operations Research*, Vol. 22 (1974) 22-34

[28] Keeney, R. L. and Raiffa, H., Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs, Wiley, New York, 1976

[29] Kirkwood, C. W.: Parametrically Dependent Preferences for Multiattributed Consequences *Operations Research*, Vol. 24 (1976) 92-103

[30] Machida, M. J.: 'Expected Utility' Analysis without Independence Axiom, mimeographed, University of California, San Diego, 1980

[31] 中村　豊，田村坦之：多属性効用関数の凸分解表現，計測自動制御学会論文集，Vol. 16 (1980) 140-145

[32] 中村　豊：多属性効用理論における独立性条件，第6回システムシンポジウム講演論文集，(1980) 307-312

[33] 田村坦之，中村　豊：2属性空間における凸依存性の概念と効用関数の新しい分解表現，計測自動制御学会論文集，Vol. 15 (1979) 119-125

[34] 田村坦之，中村　豊：環境汚染と経済消費のトレードオフ分析，凸依存性に基づく効用関数構成の方法論，計測自動制御学会論文集，Vol. 15 (1979) 545-548

[35] von Neumann, J. and Morgenstern, O., Theory of Games and Economic Behavior, 2nd Edition, Wiley, New York, 1947