協力ゲームの安定集合と仁

——通信衛星をめぐる業務提携交渉など——

武藤 滋夫・杉山 光正

1. 米国における通信衛星をめぐる業務提携交渉

1960年に米国で最初の通信衛星が打ち上げられ，その実用が可能になると，米国では国内衛星通信業務をめぐり，通信会社および通信衛星の製造・打ち上げ会社等の10社の間で業務提携の話し合いが始められた．それは，大規模システムの開発にともなうリスクの軽減，既存の通信設備の相互利用や技術交流を目的としたものであった．

10社とは，大規模な通信設備を保有するAmerican Telephone & Telegraph(ATT), Western Union, General Telephone & Electronics (GTE), Television Networks(Net works)の4社，小規模の通信設備を保有するRCA, MCI Lockheed, Western Telecommunicationの3社，通信衛星の製造と打ち上げを行なう，Comsat, Hughes Aircraft(Hughes), Fairchildの3社である．これらの10社のほかに，政府機関であるThe Federal Communications Commission (FCC) がルール・メーカーおよび公共の利益の代表者として，中立的な立場で話し合いに参加している．

1970年3月，FCCは国内衛星通信システムの建設と運用に関する認可を希望する企業を募った．この募集では，複数の企業による協力事業としての応募も許されており，各企業は他の企業との協力を求めて相互に打診を開始した．

10社の間でさまざまな交渉が行なわれたが，技術的制約，保有設備による制約および各社の経営方針等により，実現の可能性のある業務提携は次の7組に絞られた．

ATT＋Networks
ATT＋Comsat
GTE＋Comsat
GTE＋Hughes
GTE＋Western Union
Hughes＋Western Union
GTE＋Hughes＋Western Union

GTEとHughesとWestern Unionの3社間では任意の2社および3社間の業務提携が検討され，交渉が行なわれた．本稿では，2章で協力n人ゲームの1つの表現形式である特性関数形ゲームとその解の概念であるコア，安定集合，仁を定義し，3章で，この3社間の提携形成と利得分配をめぐる交渉を，この3社をプレイヤーとする「協力3人ゲーム」として考察してみる．さらに，4章では多数決ゲーム，5章では単純生産市場ゲームの安定集合を用いた提携形成分析を行なう．

むとう　しげお　東京工業大学　理学部情報科学学科
すぎやま　みつまさ　同大学院情報科学専攻

2. 特性関数形ゲームと解の概念

2.1 特性関数形ゲーム

特性関数形で表現された協力 n 人ゲームは，プレイヤー全体の集合 N と N のすべての部分集合にある実数値を与える関数 v との組 (N, v) で表わされる．N の部分集合を**提携**，関数 v を**特性関数**とよぶ．提携 $S \leq N$ に対し，$v(S)$ は S に属するプレイヤーが協力するときに他からの協力なしに彼らだけで獲得可能な値であり，提携 S の力，価値といったものを表わしていると考えられる．空集合 ϕ に対しては $v(\phi)=0$ としておく．特性関数 v が，任意の互いに交わりをもたない提携 S, T に対し，$v(S)+v(T) \leqq v(S \cup T)$ なる性質を満たすとき，v は**優加法的**であるという．かかる優加法的な特性関数 v をもつ協力ゲームでは，プレイヤー全員が協力した時に最も大きな値 $v(N)$ が得られるが，この $v(N)$ がいかに各プレイヤーに分け与えられるか，またその割当てをめぐってプレイヤー間でどのような提携が形成され，どのように交渉が行なわれるかが問題となる．これを分析するために，各プレイヤー $i \epsilon N$ に対する利得 x_i から成る利得ベクルト $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が満たすべき基本的な2つの条件を与える．(i) $\sum_{i \epsilon N} x_i = v(N)$，(ii) $x_i \geqq v(\{i\})\ {}^{\forall} i \epsilon N$．この2条件を満たす利得ベクトルを特に**配分**とよび，以下では配分の全体を記号 A で表わす．

2.2 コアと安定集合

配分の集合の中でいかなる配分がプレイヤーの交渉の結果達成されるかを分析するために，配分間の比較を以下のように考える．任意の2つの配分 x と y に対して，ある非空な提携 S が存在し，2条件 (i) $x_i > y_i\ {}^{\forall} i \epsilon S$, (ii) $\sum_{i \epsilon S} x_i \leqq v(S)$ が満たされるとき **x は S を通して y を支配する**という．x, y についてこのような提携が少なくとも1つ存在するとき，単に **x は y を支配する**という．もし，x が S を通して y を支配するならば，提携 S は y よりも x を選好し，しかも x は S のみによって実現可能であるので，この意味で y は安定なものとはいえないであろう．したがって，もし，いかなる配分にも支配されない配分が存在すれば，それは支配関係のもとでより安定なものと考えられる．そこで，いかなる配分にも支配されない配分の集合を**コア**と定義する．

一方，von Neumann/Morgenstern は次の2条件を満たす配分の集合 K を**安定集合**と定義した．(i) K に属する任意の2配分間には支配関係はない．(ii) K に属さない任意の配分に対して，それを支配する配分が K 内に少なくとも1つ存在する．(i) は K 内部での安定性，(ii) は K の外部に対する安定性を表わしており，それぞれ**内部安定性**，**外部安定性**とよばれる．安定集合は3.1の具体例で示すように，一般には多くの配分の集合が1つの解となり，それは利得分配をめぐるプレイヤーの行動基準と考えられ，プレイヤー間の提携形成や交渉過程をよく反映している．

2.3 仁

協力ゲームの他の解の概念の1つである**仁**を定義する，利得ベクトル $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し，提携 S_j の不満を $Q_j(x)=v(S_j)-\sum_{i \epsilon S_j} x_i$ で表わし，すべての提携の不満を大きいものから並べたベクトルを $Q(x)=(Q_1(x), Q_2(x), \cdots, Q_k(x))$ とする．このとき，2つの利得ベクトル x と y について，$Q(x)$ と $Q(y)$ の成分の値を大きいものから順に比較し，最初に異なる成分 $Q_h(x)$ と $Q_h(y)$ に対して，$Q_h(x) < Q_h(y)$ であるとき，**x は y より受容的である**という．そして，$\lambda=\mu(N)$ は，他のいかなる配分よりも受容的な配分であると定義する．仁は提携構造ごとに存在するが，ここでは全体としての提携が成立したときの仁をのべた．これはすべてのプレイヤーの共存をはかり，各提携のもつ不満を大きいものから順次バランスさせた解の概念ということができる．[10]

3. 衛星通信ゲーム

3.1 安定集合による分析

1章で述べたGTE, Hughes, Western Union をプレイヤーとする3人協力ゲームの各業務提携の値は次のとおりである.

GTE+Hughes	5.2
GTE+Western Union	2.5
Hughes+Western Union	3.0
GTE+Hughes+Western Union	1.0

3社での業務提携の値が1.0と他にくらべて低いのは,競争会社であるGTEとWestern Unionが競争相手を含む業務提携に乗り気でないためと大規模なシステムが必要となり,リスクが大きくなり過ぎるのをHughesが嫌ったためである.

上のことから,特性関数はGTEをG, HughesをH, Western UnionをWとすると,$v(\phi)=0$, $v(G)=v(H)=v(W)=0$, $v(GH)=5.2$, $v(GW)=2.5$, $v(HW)=3.0$, $v(GHW)=5.2$である.このゲームのコアは空であり,安定集合は図1のK_1, K_2, K_3, K_4の4つのタイプから成る.ただし,三角形GHWは高さ5.2の正三角形であり,配分の集合を表わしている.正三角形GHWの各点に対し,底辺HWまでの距離がGTEの利得x_G, 辺GW, GHまでの距離がそれぞれHughes, Western Unionの利得x_H, x_Wを表わしている.図1 K_1, K_2, K_3, K_4 の分析の前に,3社の交渉過程を考察してみる.

$v(GHW)=5.2$という値はGTEとHughesの業務提携による利得の増加分であるから,その分配においても,この2社が提携して分配することが考えられた.ところがWestern Unionが間に入ってGTEとHughesの2社での分配を妨害することが予想された.というのはもしGTEの利得が2.5未満ならばWestern UnionはGTEとの提携の値が2.5なので,GTEに対して,その利得以上を与える申し入れをして自社との提携に乗り換えるように説明するであろう.Hughesに対してもその利得が3未満の場合には同様のことが考えられるが,5.2をGTEには2.5以上,Hughesには3以上に分配することは不可能であるので,GTEと

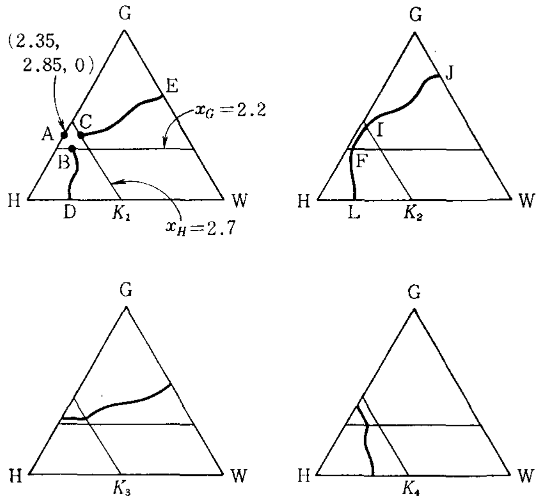

図1 通信衛星ゲームの安定集合

Hughesがどのような分け方をしても,Western Unionが提携をこわし,その配分を拒否できるからである.そこで5.2をGTEとHughesだけでなく,Western Unionを含めた3社で分けることで,その配分,ひいてはGTEとHughesの業務提携をより安定なものにすることが考えられた.ただし少なくともGTEは2.2, Hughesは2.7を得るとする.これはHughesとWestern Unionの提携の値は3であるから,この2社は3より多くを要求するだけの力をもっておらず,したがってGTEは少なくとも2.2は得ることができると考えたからである.Hughesについても同様である.

以上のような考察から利得分配は

$$x_G+x_H+x_W=5.2$$
$$x_G\geqq 2.2$$
$$x_H\geqq 2.7$$
$$x_W\geqq 0$$

の三角形の中の点に絞られた.

さて,このゲームの安定集合をみると,以上のような交渉過程は安定集合の中に如実に表わされていることがわかる.K_1ではGTEが2.2, Hughesが2.7を得た後,残りの0.3をGTEとHughesが獲得して等分配するという交渉過程を点Aが表わし点Bは残りの0.3をHughesとWestern Unionが

等分配している．そして曲線BDは，HughesとWestern Unionが0.3を等分配した後，この2社が提携してGTEと交渉し，GTEの利得x_Gを2.2以下に抑え，$2.2-x_G$を2社で分配する状況を表わしていると考えられる．このとき，GTEの利得が2.2未満になることがあるが，これは，HughesとWestern Unionが提携して，GTEにその利得を受け入れるか，あるいは業務提携を解消して利得を0とするかの選択を迫るからであり，また，曲線の多様性は各社の交渉力の多様性を表現していると考えられる．曲線CEについても同様である．残りの0.3の分配にさいし，3社が独立に自己の利得の増加を主張して争うのではなく，1社がある値で妥協して交渉からはずれることが考えられる．このような状況がK_2, K_3, K_4であり，K_2の直線FIはWestern Unionがある値cを受けとり，$0.3-c$をGTEとHughesで分配するという交渉過程を表わしている．曲線IJは，そのような状況からGTEがWestern Unionと提携してHughesの利得x_Hを2.7以下に抑え，2.7をaとbに分け，GTEは$a+(2.5-c)$，Western Unionは$b+c$を得るという交渉過程を表わしている．曲線FL，およびK_3,K_4についても同様である．

1971年5月，GTEとHughesは，業務提携を形成して5.2は2社で分配するとの見解をFCCに提出した．GTEとHughesが提携し，K_2の$c=0$の安定集合に沿った交渉が行なわれたものと考えられる．

3.2 仁による分析

1971年5月に各社が見解をFCCに提出した後それをふまえて，電波局の委員会が，Western Unionという電信電話をとり扱う公共性の高い会社が1社で行動して大きなリスクを負うのは好ましくないと指摘し，GTE, Hughesとの3社の業務提携あるいはRCAとWestern Telを含めた5社の業務提携を提案した．その結果GTEとHughesはWestern Unionを含めた業務提携は拒否したが，HughesがGTEの同意のもとにWestern Unionの技術援助をしてリスクを減らすという3社の協力体制をとることに同意した．この新しいとり決めにより，GTEは競争相手のWestern Unionを助けたという点で少し損をしたと言え，これはWestern Unionへの手付けと解釈できる．

ここでの3社の交渉は，GTEとHughesが業務提携を形成し，HughesがWestern Unionを援助するという協力体制のもとで，どれだけの手付け，すなわち援助をWestern Unionにすべきかということであった．そこで，このような状況に適当な協力ゲームの解の概念である仁を求めてみると，$(x_G, x_H, x_W)=(2.3, 2.8, 0.1)$でありWestern Unionに0.1の手付けを与えている．このことから，0.1程度の援助が適当であるといえるとともに，電波局の指摘により，3社の利得分配はGTEとHughesで5.2を分配する点から，仁に近い点に移動したと考えられる．そして，それは，電波局の公共の利益を優先するとともに，1社が大きなリスクを負うことの危険をさけ，3社全体としての共存とバランスを保たせようとする指摘を反映したものと考えられる．

以上のことから，3社間の交渉をみると，FCCへの提出以前は，業務提携と利得分配をめぐり安定集合に表わされるような交渉過程が行なわれ，電波局の指摘の後は，仁に沿った交渉が行なわれたと考えられる．

4. 多数決ゲームの安定集合

前章の通信衛星ゲームにおいても明らかになったように，安定集合は利得分配をめぐるプレイヤー間の提携形成および交渉過程をよく反映している．ここでは，多数決ゲームの安定集合とその意味をのべる．以下の分析は[1]参照．

次のような特性関数をもつ協力n人ゲームを考える．

$$v(S)=\begin{cases}1 & \text{if } k\leq|S|\leq n\\ 0 & \text{if } 0\leq|S|<k\end{cases}$$

ここでkは$n/2<k<n$となるある整数であり，$|S|$は提携Sに含まれるプレイヤーの数を表わしている．つまり，過半数以上のある数k以上の人数が協力すれば投票に勝ち，そうでなければ敗北するという状況であり，このようなゲームを多数決ゲームとよぶ．$n=3, k=2$ の場合は[10]でくわしくのべられているので，本稿では一般的な場合について述べる．このゲームの安定集合のうち対称解（各プレイヤーに対し対称であるような安定集合）は，集合$\{x\epsilon A|x_1=\cdots=x_p\geq x_{p+1}=\cdots=x_{2p}\geq\cdots\geq x_{(p-1)q+1}=\cdots=x_{pq}\geq x_{pq+1}=\cdots=x_{pq+r}=0\}$とその成分を置換して得られるものの全体である．ここで，$p=n-k+1$であり，q, rは$n=pq+r\ (0\leq r\leq p-1)$なる自然数である．かかる安定集合の意味は次のように考えられる．まず，$p(=n-k+1)$人の提携が形成されれば残りは$k-1$人であり，彼らがたとえ全員協力したとしても勝利することはできない．つまりp人提携とは，たとえみずからは勝利できなくとも残りのプレイヤーの勝利を妨げ得る最小の提携（最小妨害提携）である．したがって上記の安定集合はかかる多数決状況において利得$v(N)=1$の分配にさいし最小妨害提携が可能な限り形成されて各提携間で交渉を行なってそれぞれの提携の得る利得を決定し，各提携内では利得は等しく分割し，どの提携にも属しえなかったプレイヤーはまったく利得を得られないという状況を表わしていると考えられる．このゲームのいま1つの安定集合は$\{x\epsilon A|\sum_{i=1}^{k}x_i=1, x_i=0,\ i=k+1,\cdots,n\}$で与えられる．この安定集合は，勝利するに必要な最小の提携つまりk人提携が形成されて利得 $v(N)=1$を彼らの内部で交渉によって分割し，残りの$n-k$人は提携形成の交渉の場から除外されてまったく利得を得られないという状況を表わしている．

5. 単純生産市場ゲームの安定集合

前節の多数決ゲームの簡単な生産市場への拡張は[2]において行なわれ，その特性関数は次のように与えられる．

$$v(S)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad |S|<k\\ 1 & \text{if} \quad k\leq|S|<2k\\ 2 & \text{if} \quad 2k\leq|S|<3k\\ \cdots & \\ l & \text{if} \quad lk\leq|S|<(l+1)k\\ \cdots & \\ t & \text{if} \quad tk\leq|S|\leq n\end{cases}$$

ここで，kは$2\leq k<n/2$なるある整数であり，tはn/kをこえない最大の整数である．これは次のような生産市場のモデル化となっている．ある財の生産を目的とするn人のプレイヤーがおり，それぞれかかる財の生産のために必要な同種の原材料を1単位ずつ所有している．ただし，財1単位を生産するためには必ずk単位の原材料が必要であり，財2単位の生産には$2k$単位，一般に財l単位の生産にはlk単位の原材料が必要とされている．かかる状況において，たとえば全員提携Nを考えてみるとこの提携の所有する原材料はn単位，いま$tk\leq n<(t+1)k$であるから彼らはt単位の財を生産でき，したがって$v(N)=t$となる．他の提携に対する特性関数の値も同様にして決定される．（上記の特性関数において，もし$k>n/2$とすればこのゲームは前節の多数決ゲームとなることを注意しておく．） さて，かかるゲームの安定集合のうち対称解は，$n\geq(t+1)(k-1)$なる条件の下では，集合 $\{x\epsilon A|x_1=\cdots=x_{n-k+1}\geq\frac{1}{k}\geq x_{n-k+2}\cdots=x_n\}$とその成分を置換して得られるものの全体として与えられる．この安定集合は，かかる生産市場において$n-k+1$から成る最小妨害提携（つまり残りのプレイヤーの財の生産を不可能にする最小の提携）と残りの$k-1$人から成る提携の2つが形成され，この2提携間で交渉を行なってそれぞれの提携の得る利得を決定し，各提携内ではその利得を等しく分割するという状況を表わしている．上記の条件が満足されない場合には安定集合の形状も変化し，最小妨害提携は常に形成されるが残りの$k-1$人提携はいくつかのより小さな提携に分裂することが知られている．詳しくは[5]

参照．かかる生産市場ゲームのいま1つの安定集合は，$K=\bigcup_{j=1}^{t}K_j$，$K_j=\{x\epsilon A|\sum_{i=(j-1)k+1}^{jk}x_i=1$，$x_i=1/k$，$i=1,\cdots,(j-1)k$，$jk+1,\cdots,tk$，$x_i=0$，$i=tk+1,\cdots,n\}$ で与えられる．この安定集合は，財を生産するために必要な最小の提携（k 人提携）が可能な限り形成されて各提携は総利得 $v(N)$ を等しく分割し，残りの $n-tk$ 人のプレイヤーは提携形成の交渉から除外されてまったく利得を得られない，また利得を得た t 個の k 人提携のうち1つを除いては提携内でも等しく利得を分配するという状況を表わしている．参考のために簡単な $n=5$，$k=2$ の場合について上記2つの安定集合を記述しておく．前者の安定集合は(1/2，1/2，1/2，1/2，0）とその成分を置換したものの全体で与えられ，4人提携の形成を表わしている．また後者は，$\{x\epsilon A|x_1=x_2=1/2,\ x_3+x_4=1,\ x_5=0\}\cup\{x\epsilon A|x_1+x_2=1,\ x_3=x_4=1/2,\ x_5=0\}$ となり，提携{1，2}，{3，4}の形成およびプレイヤー5の提携形成の交渉からの除外を表わしている．

5. おわりに

本稿を終わるに当って最近の安定集合の研究と今後の課題点について，理論そして提携形成分析への応用という2つの面から簡単にふれておく．

まず理論面で最も大きな問題であるその存在については一般には否定されているが，von Neumann/Morgenstern が安定集合を最初に定義したさいに想定していた定和ゲーム，すなわちすべての提携 S に対し $v(S)+v(N-S)=v(N)$ となるようなゲーム，においてはその存在は未だ解決されておらず，1つの大きな課題である．理論面でのいま1つの大きな問題は安定集合とコアとの関連であり，これについても両者が一致するための条件の決定など研究が進められている．

次に提携形成分析への応用という面からは，通信衛星ゲームや，多数決ルール，生産市場といった現実の状況をモデル化したゲームにおいて，安定集合はプレイヤー間の提携形成過程をよく反映しているが，これ以外にも政治学，経済学などにおいて提携形成分析に安定集合を用いた例がよく見られる．たとえば[7]など．また本稿では最も基本的な別払いを前提とする特性関数形協力ゲームにおける安定集合について述べてきたが，プレイヤー間での金銭などの支払いを仮定しない別払いを前提としない特性関数形ゲームや，特性関数 $v(S)$ の値が，S 以外のプレイヤーの提携形態に依存して定まる分割関数形ゲームにおいても，支配関係をもとに安定集合はまったく同様に定義することができる．また提携形成分析には［6］などに見られる非協力ゲームからのアプローチもあり，これらの研究と安定集合によるアプローチとの関連についての考察も今後の大きな課題である．

参考文献

［1］Bott, R. : Symmetric Solutions to Majority Games. *Annals of Mathematics Studies*, No.28 (1959), 319—323

［2］Hart, S. : Symmetric Solutions of Some Production Economies. *Int. J. of Game Theory*, Vol. 2 (1973), 53—62

［3］McDonald, D.: *Games of Business*. Doubleday, New York, 1978

［4］Mckelvey, R. D. and Rosenthal, H. : Coalition Formation, Policy Distance, and the Theory of Games without Sidepayments : An Application to the French Apparentement System. *Game Theory and Political Science* (ed. P. Ordeshook), New York University Press, New York, 1978, 405—450

［5］Muto, S. : On Hart Production Games. to appear in *Math. of Oper. Res.*

［6］岡田章：提携形成をめぐる交渉プロセス，本誌

［7］Shepsle, K. A. : On the Size of Winning Coalitions. *Amer. Pol. Sci. Review*, Vol. 68 (1974), 505—518

［8］鈴木光男：ゲームの理論，勁草書房，1959

［9］鈴木光男，中村健二郎：社会システム－ゲーム論的アプローチ，共立出版，1976

［10］鈴木光男：ゲーム理論入門，共立全書，1981