非協力ゲームのStackelberg均衡

――OPECと非OPEC間の非協力均衡――

宍戸 栄徳

1. はじめに

ゲーム理論に用いられている諸概念には，ゲーム理論の成立の歴史からも容易に推測できるように，経済理論と密接な関係をもつものが少なくない．本稿で紹介する「非協力均衡」と「寡占（複占）市場」はこのような，ゲーム理論と経済理論の出会いの場所としては典型的なものといえよう．

世界の石油市場はエネルギー問題の中心的話題として各方面から注目を集めている．政治，経済の分野はもちろんのこと，ORの分野でも，本「オペレーションズ・リサーチ」誌において，1981年7月号で,「エネルギー問題とOR」の特集号が発行され，その中でも石油市場をとり扱った報告が数編発表されており関心の高さを物語っている．本報告も国際石油市場におけるOPECの問題をモデル化したものであるが，ゲーム論的な視点に立って，非協力ゲームの非協力均衡についての考えを，OPECと非OPECの諸国の間の市場行動に適用して分析を試みたものである．

OPEC諸国は国際石油市場において自由世界の総産油量の約2/3を占めてカルテルを形成している．一方，非OPEC諸国はOPECカルテルに対して競争的限界産油国(competitive fringe)とよばれるグループとして一括してとり扱うものとする．OPEC内部にも，穏健派，強硬派等のいくつかのグループ分けがあり，必ずしも，一枚岩の団結を示しているわけではないが，この点に関しては，本特集号の船木氏の報告が協力ゲームの立場から解説されている．ここではOPECも非OPECと同様に1つの経済主体，ゲーム理論でのプレイヤーとして定式化を行なう，A. M. Ulph, G. M. Folie [2] による静的2人非協力ゲームでのNash-Cournot均衡とStackelberg均衡の比較を行ない，その後，R. J. Gilbert [1] による，微分ゲームでのStackelberg均衡による非協力均衡の分析を行なう．

2人のプレイヤー，OPEC諸国と非OPEC諸国について，市場での行動原理について考えてみる．非OPEC（競争的限界産油国）は国際石油市場において価格決定を行なうだけの力をもっていないのでOPEC（カルテル）によって設定された石油価格を所与のものとして，利潤最大化の行動をとると考えられる．これに対してOPECの行動原理は，この非OPECの利潤最大化行動をどのように推測するかによって異なる仮定を設けることができ，それにしたがって，異なる均衡を考えることができる．

まず，Nash-Cournotモデルでは，OPECは非OPECの生産量(産油量)を所与のものとし，したがってOPECの需要関数を市場需要関数か

ししど はるのり 香川大学 経済学部

ら非ＯＰＥＣの供給量を減じたものとして受けとり利潤最大化行動をとるとする．Stackelberg モデルでは，ＯＰＥＣは非ＯＰＥＣの生産量を固定的なものであるとは考えず，ＯＰＥＣ自身の設定する石油価格，生産量に対応して（非ＯＰＥＣの利潤最大化の行動原理によって）変動的にきまると考える．

このように，プレイヤーの行動原理と相手の行動の推測のしかたにより，非協力ゲームには種々の均衡解が存在することになる．

2. 非協力ゲームと解

2人非協力ゲームを考え，プレイヤーを1と2とする．各プレイヤーはそれぞれ，戦略の集合，U_1，U_2 および利得関数 $f_1(u_1, u_2)$，$f_2(u_1, u_2)$ $(u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2)$ をもっており，自分の利得を最大にする最適戦略 u_1^*，u_2^* を選ぶ．周知のようにこのような非協力ゲームの最も一般的な解の概念として Nash 均衡解がある．

定義 1

戦略の対 (u_1^*, u_2^*) は次の不等式を満たすとき Nash 均衡解といわれる．

$$f_1(u_1^*, u_2^*) \geqq f_1(u_1, u_2^*) \quad {}^{\forall}u_1 \in U_1$$
$$f_2(u_1^*, u_2^*) \geqq f_2(u_1^*, u_2) \quad {}^{\forall}u_2 \in U_2$$

定義で主張しているのは，Nash 均衡解は「相手の戦略が Nash 均衡解のまま不変であるとき，自己の戦略を Nash 均衡解から変更を加えることは自己の利得に損失をもたらす」という事実が2人のプレイヤーに同時に成立している戦略であるということである．この解の特徴は互いに相手の戦略が固定的であると考えていること，2人のプレイヤーの立場が対等，対称的であることである．経済理論ではこのような形の市場均衡を Cournot 均衡というので，Nash-Cournot 均衡といういい方もする．

これに対し，非対称的なゲームでプレイヤーの戦略決定が同時に行なわれない場合に Stackelberg 均衡解の概念が導入される．

定義 2

プレイヤー1の任意の戦略 u_1 に対するプレイヤー2の戦略の集合

$$T_2(u_1) = \{u_2(u_1) \in U_2 \mid f_2(u_1,\ u_2(u_1)) \geqq f_2(u_1,\ u_2),\ {}^{\forall}u_2 \in U_2\}$$

を戦略 u_1 に対するプレイヤー2の最適反応集合，$u_2(u_1) \in T_2(u_1)$ を最適反応関数という．

戦略対 $(u_1^*,\ u_2^*) = (u_1^*,\ u_2(u_1^*))$ が不等式

$$f_1(u_1^*,\ u_2(u_1^*)) \geqq f_1(u_1,\ u_2(u_1)) \quad {}^{\forall}u_1 \in U_1$$

を満たすとき，プレイヤー1を先導者(leader)，プレイヤー2を追随者(follower)とする Stackelberg 均衡という．

最適反応関数は先導者1のとる戦略 u_1 に追随者2が自己の利潤を最大にする戦略 $u_2(u_1)$ を対応させる写像である．したがって，Stackelberg 均衡解は先導者1が追随者2のこの「合理的反応」を考慮にいれて自己の利潤を最大にするように決定した戦略 u_1^* と，対応する $u_2^* = u_2(u_1^*)$ の対である．この均衡解の特徴は先導者が戦略を先に決定し，その結果を追随者に強制できるという状況にある．

3. OPECと非OPEC間の静的ゲーム

石油市場の2人非協力ゲームの2人のプレイヤーＯＰＥＣと非ＯＰＥＣの諸国のグループを示す添字としてそれぞれ，l (leader, cartel) と f (follower, fringe)を用いることとする．

両プレイヤーの生産量を x_l, x_f で示し，総生産量を x，石油価格を P とすれば，需要関数によりこれらの諸変数の間には

(1) $P = \phi(x) = \phi(x_l + x_f)$

の関係が成立している．生産費用は各プレイヤーの生産量の関数として表現され

(2) $C_i(x_i)$，$i = l,\ f$

さらに，限界生産費用関数 $m_i(x_i)$ は定義により

(3) $m_i(x_i) = \dfrac{d}{dx_i} C_i(x_i)$

で与えられる．

Nash-Cournot 均衡，Stackelberg 均衡および完全競争（perfect competitive）均衡の比較を行

なうため，需要関数，限界生産費用関数に次のような関数形を仮定する．

(4) $P=\phi(x)=F-a(x_l+x_f)$, $F, a>0$

(5) $m_i(x_i)=k_i+d_ix_i$, $k_i, d_i>0$, $i=l,f$

プレイヤーiの評価関数は利潤$Px_i-C_i(x_i)$にとられる．

(1) 完全競争均衡

両プレイヤーが石油価格を所与のものとして，限界収入＝限界生産費用を満たし総生産量と価格が需要関数を満たすようにx_l, x_fを決定する．

(6) $P=m_l(x_l)=m_f(v_f)$

(7) $F-a(x_l+x_f)=k_l+d_lv_l$
$$=k_f+d_fx_f$$

(7) 式の解は

(8) $x_l=\dfrac{U_l}{Z}$, $x_f=\dfrac{U_f}{Z}$, $P=\dfrac{V}{Z}$

ただし

$$U_l=d_f(F-k_f)+a(k_l-k_f)$$
$$U_f=d_l(F-k_f)+a(k_l-k_f)$$

(9) $V=Fd_ld_f+ad_lk_f+ad_fk_l$
$$Z=ad_l+ad_f+d_ld_f$$

完全競争均衡は各プレイヤーの生産量が直接，価格を変動させないような市場での均衡であるので，x_l, x_fとして各グループの生産量を集計した形になっているが，実際には，グループとしての活動ができていない，すなわち，ＯＰＥＣのカルテルが形成されていない状態を反映するものと考えられる．

(2) Nash-Cournot 均衡

追随者２は石油価格を所与のものとして，利潤最大にする生産量を決定するので

(10) $P=m_f(x_f)$, $F-a(x_l+x_f)=k_f+d_fx_f$

の条件を満たすx_fを最適戦略とする．

これに対し，先導者は均衡において追随者の生産量x_fは固定的であると考えて，利潤最大化の条件は$d(Px_l)/dx_l=P+(dP/dx_l)x_l$より

(11) $P-ax_l=k_l+d_lx_l$

(7) 式のd_lを$a+d_l$で置き換えると (11) 式が得られるから，Nash-Cournot 均衡解は

(12) $\bar{x}_l=\dfrac{\bar{U}_l}{\bar{Z}}$, $\bar{x}_f=\dfrac{\bar{U}_f}{\bar{Z}}$, $\bar{P}=\dfrac{\bar{V}}{\bar{Z}}$

ただし

(13) $\bar{U}_l=U_l$, $\bar{V}=V+a(Fd_f+ak_f)$
$$\bar{U}_f=U_f+a(F-k_f),\quad \bar{Z}=Z+a(a+k_f)$$

である．

(3) Stackelberg 均衡

Stackelberg 均衡では，先導者はx_fを固定的であると考えず，(10)式を最適反応関数を与える関係であるとする，(10) 式をx_fについて解き，需要関数(4)に代入することにより，先導者の需要関数が得られる．

(14) $P=F-a\left(x_l+\dfrac{F-k_l+ax_l}{a+d_f}\right)$

(14) 式を用いて限界収入が計算でき，先導者の利潤最大化の条件は

(15) $F-a(x_l+x_f)+\dfrac{ad_f}{a+d_f}x_l=k_l+d_lx_l$

となり，Stackelberg 均衡解は(10)，(15)の解であり

(16) $\hat{x}_l=\dfrac{\hat{U}_l}{\hat{Z}}$, $\hat{x}_f=\dfrac{\hat{U}_f}{\hat{Z}}$, $\hat{P}=\dfrac{\hat{V}}{\hat{Z}}$

ただし

$$\hat{U}_l=U_l,\quad \hat{V}=F\hat{d}_ld_f+ad_fk_l+a\hat{d}_lk_f$$
$$\hat{U}_f=U_f+(F-k_f)(\hat{d}_l-d_l)$$
$$\hat{Z}=Z+(a+d_f)(\hat{d}_l-d_l)$$
$$\hat{d}_l=\frac{Z}{a+d_f}$$

4. 3つの均衡解の比較

3種類の市場での均衡解と対応する価格が得られたので，各生産量が正であるとの仮定のもとでそれらの比較をすると

$$x_l>\hat{x}_l>\bar{x}_l$$

(19) $x_f<\hat{x}_f<\bar{x}_f$
$$P<\hat{P}<\bar{P}$$

であることが示される．

完全競争均衡解と Nash-Cournot 均衡解が両極端でStackelberg均衡解が両者の中間に位置する．カルテルの形成は市場価格と競争的限界産油国(非ＯＰＥＣ)の生産量を上昇させるが，カルテ

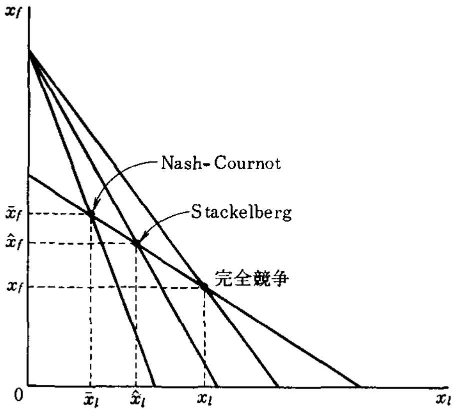

図 1　3種の均衡解と反応曲線

ル(ＯＰＥＣ)自身の生産量はかえって減少することを示している．さらに，それぞれの均衡においてカルテルの利潤の大小関係を調べてみる．(1), (2), (3)の各場合の利潤を π_l, $\bar{x}_l$, $\hat{\pi}_l$ とすると

$$\pi_l=\frac{d_l}{2}x_l^2,\quad \bar{\pi}_l=(a+\frac{1}{2}d_l)\bar{x}_l^2$$

(20)

$$\bar{\pi}_l=\frac{ad_l+2ad_f+d_ld_f}{2(a+d_f)}\hat{x}_l^2$$

であり

(21)　$\hat{\pi}_l>\bar{\pi}_l,\ \hat{\pi}_l>\pi_l$

が常に成立するのに対して，Nash-Cournot 均衡と完全均衡の利潤の差

(22)　$\bar{\pi}_l-\pi_l=\frac{U_l^2}{2}\left(\frac{2a+d_l}{\bar{Z}^2}-\frac{d_l}{Z^2}\right)$

は $Y=2ad_f^2+d_l(d_f^2-a^2)$ の正負に依存して，正または負になる．このことは，完全競争市場での生産者のグループがカルテルを形成してもNash-Cournot 戦略をとった場合には必ずしも利潤の増加をもたらさないことを示している．また，たとえ利潤の増加をもたらしてもStackelberg戦略を採用したときのほうが常により大きな利潤をもたらすことも示している．

このように２人のプレイヤーの力が対等でないとき，Nash-Cournot 均衡はより力の大きなプレイヤーにとって必ずしも良い戦略でないことがある．Stackelberg 均衡では先導者の有利さが生かされている．Stackelberg 戦略を用いる場合，両方のプレイヤーがともに先導者になろうとして，２人とも不利益を受ける，いわゆる Stackelberg 不均衡の問題があるが，国際石油市場のようにＯＰＥＣと非ＯＰＥＣ間の力関係に明らかな差があるときは Stackelberg 均衡による分析が合理性をもっていると考えられる．このような考えに立ち，最後に同じ石油市場を微分ゲームによるモデル化を行ない，両プレイヤーが Stackelberg 戦略をとるときの分析をする．

5.　微分ゲームによるモデル

石油資源の有限性を考慮し，さらに代替財として合成石油の生産が行なわれる市場をモデル化してみる．石油を涸渇性資源(exhaustibleresource)とするために各時点での石油埋蔵量が生産量に影響を与えることになる．

２人のプレイヤー（ＯＰＥＣと非ＯＰＥＣ）は初期時点 $(t=0)$ で $S_0^i(i=l,f)$ の石油埋蔵量を保有しているものとする．時刻 t での埋蔵量を $S^i(t)$ とし，t から $t+dt$ の間の生産量を $Q^i(t)dt$, 生産費用を $C^i(Q^i(t),\ S^i(t))dt$ とする．C^i は Q^i に関して非減少，凸で，S^i に関して非増加，さらに微分可能性も仮定しておく，これらの諸変数の間には

(23)　$\frac{dS^i(t)}{dt}=-Q^i(t)$

(24)　$S^i(0)=S_0^i,\ i=l,f$

の状態方程式が成立し，$S^i(t)$, $Q^i(t)$ はそれぞれ状態変数，制御変数になる．埋蔵量の制限から

(25)　$\int_0^\infty Q^i(t)dt\leqq S_0^i,\ Q^i(t)\geqq 0,\ i=l,f$

の条件が課せられる．両プレイヤーは評価関数として現在価値の利潤をとる．すなわち

(26)　$\pi^l=\int_0^\infty\{P(Q^l(t)+Q^f(t))Q^l(t)-C^l(Q^l(t),S^l(t))\}e^{-r^lt}dt$

(27)　$\pi^f=\int_0^\infty\{P(Q^l(t)+Q^f(t))Q^f(t)-C^f(Q^f(t),S^f(t))\}e^{-r^ft}dt$

ここで，$P(\cdot)$は需要関数であり，$r^i(>0, i=l,f)$は時間割引き率である．(23)～(25)の条件のもとで，それぞれ，(26)，(27)の評価関数を最大にするのが石油市場の微分ゲームによるモデル化である．

Stackelberg 均衡解を求めるために，追随者の最適反応関数を決定する．先導者であるカルテルが生産径路 $\{\bar{Q}^l(t)\}$ を追随者に通知すると，追随者は $Q^l(t)=\bar{Q}^l(t)$ と価格 P を所与とした最適制御問題を解くことになる．最大値原理を適用すれば，補助変数 $\lambda^f(t)e^{-r^f t}$ が存在して

(28) $\lambda^f(t)=P(\bar{Q}^l(t)+Q^f(t))-C^f{}_1(Q^f(t),S^f(t))$

(29) $\dfrac{d\lambda^f(t)}{dt}-C_2{}^f(Q^f(t),S^f(t))=r^f\lambda^f(t)$

が成立する．($C_i{}^f$ は第 i 成分の偏導関数を示す．)

先導者は $\{\bar{Q}^l(t)\}$ に対応して追随者が (28)，(29)によって決定される最適反応関数にしたがって行動すると推測して，利潤 π^l を最大にすべく $\{\bar{Q}^l(t)\}$ の選択をする．

石油を涸渇性資源とし，代替財の合成石油の存在を仮定しているが，合成石油の価格 $\bar{P}$ は現在の石油価格より十分大きいとできる．石油価格が上昇して $\bar{P}$ にまで達したとき，合成石油の生産が始められるとする．したがってＯＰＥＣは非ＯＰＥＣの石油埋蔵量が０になったとき，石油価格を $\bar{P}$ より低く，しかもいくらでも $\bar{P}$ に近く設定することで石油市場を独占市場とすることができる．この事実より，$P(t)\equiv P(Q^l(t)+Q^f(t))\leqq\bar{P}$ の条件を付け加えて石油価格の径路を調べる．

両プレイヤーの生産費用関数が

(30) $C^i(Q^i(t),\ S^i(t))=m^iQ^i(t)g^i(S^i(t)$

であるとする．このとき，(28)，(29)式は

(31) $\dfrac{dP(\bar{Q}^l(t)+Q^f(t))/dt}{P(\bar{Q}^l(t)+Q^f(t))-m^fg^f(S^f(t))}=r^f$

の価格 P に関する微分方程式に帰着される．

石油価格 P は非ＯＰＥＣの埋蔵量が０になるまで (31)にしたがって上昇し，時刻 T 以後 $P(t)=\bar{P}$ の水準に落ちつく．T はカルテルの生産径路 $\{\bar{Q}^l(t)\}$ と初期価格 P_0 に依存する．カルテルが P_0 を高く設定すると区間$[0,T]$ではカルテルの利潤は小さくなるが非ＯＰＥＣの石油資源の涸渇が早まり，$t=T$ 以後の利潤が大きくなる．このような価格径路の性質を考慮して先導者は Stackelberg 戦略を決定することになる．

(例 1) 両プレイヤーの生産費用が０で，さらに割引き率がともに r で共通であると仮定して，Stackelberg 均衡解を調べる．

カルテルの利潤は，$Q=Q^l+Q^f$ として

(32) $\pi^l=\int_0^\infty P(t)\{Q(P(t))-Q^f(t)\}e^{-rt}dt$

で，$Q^f(t)$は価格径路に対応する最適反応である．このとき価格径路は

(33) $P(t)=P_0e^{rt},\ 0\leqq t\leqq T$
$P(t)=\bar{P},\qquad T\leqq t$

となる．T は非ＯＰＥＣの石油資源が涸渇する時点を示し，さらに，$T+T_f$ でＯＰＥＣの石油資源も涸渇するものとすると

(34) $T_f=\dfrac{1}{Q(\bar{P})}\left[S_0{}^l+S_0{}^f-\int_0^T Q(P(t))\,dt\right]$

であり，T は

(35) $T=\dfrac{1}{r}\ln\left(\dfrac{\bar{P}}{P_0}\right)$

の関係式で与えられる．価格径路(33)よりカルテルの利潤は

(36) $\pi^l=P_0\left[\int_0^T Q(P_0e^{rt})\,dt-S_0{}^f+\dfrac{Q(\bar{P})}{r}(1-e^{-rT_f})\right]$

で計算される．$P<\bar{P}$ のときの需要関数を

(37) $Q=\alpha P^{-\varepsilon},\ 0<\varepsilon<1,\ \alpha>0$

とし，また，カルテルの埋蔵量が十分に大きく，$e^{-rT_f}\ll 1$ と仮定すると，(36)式の右辺最終項を無視することができて，利潤は

(38) $\pi^l=\dfrac{\alpha}{\varepsilon r}P_0{}^{1-\varepsilon}+\dfrac{\alpha}{r}\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)P_0{}^{1-\varepsilon}e^{-\varepsilon rT}-PS_0{}^f$

で表わされる．この π^l を P_0 の関数であるとして，最大にする P_0 の満たす必要十分条件は

(39) $P_0=\left[\left(\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\dfrac{rS_0{}^f}{\alpha}+(1-\varepsilon)(\bar{P})^{-\varepsilon}\right]^{-1/\varepsilon}$

である．(39)式より明らかなように，最適な初期価格P_0はカルテルの埋蔵量には関係せず，非ＯＰＥＣの需要の弾力性，埋蔵量そして代替財の価格に依存している．

(例 2) 石油の生産能力に制約のある場合について考える．ＯＰＥＣは1975年で日産3800万バレルの生産能力に対して，生産量は日産2520万バレルの実績であり，約2/3の生産しかしていないので生産能力による制約は不必要としてよい．非ＯＰＥＣについては$Q^f(t) \leqq K^f$の制約が課せられるとする．(28)式より，この場合，非ＯＰＥＣの生産量は

(40) $Q^f(t) = \min\{Q(C_1{}^f + \lambda^f(t)) - \bar{Q}^l(t), k^f\}$

で決定され，カルテルの埋蔵量が十分大きく，特に$S_0{}^l \to \infty$の極限では，$Q^f(t) = k^f$となるときには(40)の右辺第1項に常に単調に減少して

(41) $Q^f(t) = k^f,\ 0 \leqq t \leqq \tau$

$Q^f(t) < k^f,\ \tau < t$

なる$\tau \geqq 0$が存在する．

また，k^fが十分小さければ，カルテルは非ＯＰＥＣの反応関数を$Q^f(t) = k^f$とできるから，利潤最大化のための条件は，$P(k^f + \bar{Q}^l(t)) < \bar{P}$のとき

(42) $$\frac{d}{d\bar{Q}^l(t)}\left\{P(k^f + \bar{Q}^l(t))\,\bar{Q}^l(t)\right\} = C_1{}^l + \lambda^f(t)$$

となる．この場合，非ＯＰＥＣは最初k^fの値を大きくするために投資をし，このため生産量$Q^f(t) = k^f$が増加するので，石油価格がさがり，生産能力の制約が拘束的でなくなるときから価格の上昇が始まり，やがて$\bar{P}$に到達することになる．

7. おわりに

国際石油市場をモデルとして，非協力ゲームのStackelberg均衡の特徴をNash-Cournot均衡と完全競争均衡との比較を通して述べてきた．

個人の主体性を尊重する限り競争的な状況を避けることはできない．ゲーム理論による競争的状況の分析が争いを助長するのでなく，むしろ，無用な争いを防ぐことになると考えることができる．このためにも，ゲーム理論が広く理解されることは有益であると思われる．

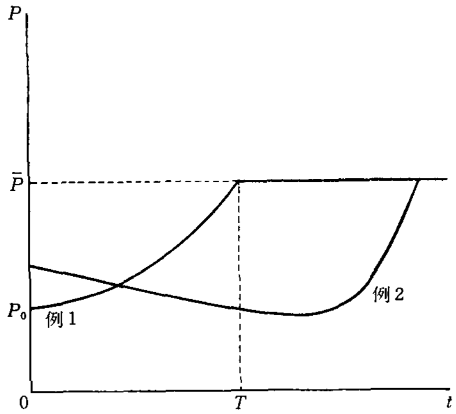

図 2 最適価格径路

参考文献

[1] Gilbert, R. J. : Dominant firm pricing policy in a market for an exhaustible resource. *Bell Journal of Economics*, 9 (1978), pp. 385-395

[2] Ulph, A. M. and Folie, G. M. : Economic implications of Stackelberg and Nash-Cournot equilibria. Zeitschrift für Nationalökonomie *Journal of Economics*, Vol. 40 (1980), No. 3-4, pp. 343-354