

マトロイド理論の基礎 (3)

大山 達雄

マトロイドの概念およびその数学的定義を前回までに紹介した。今回はマトロイド構造を有する具体的な例をいくつか紹介しよう。

3. マトロイドの例

マトロイドの構造を有するものは、非常に単純なものから線形代数、グラフ理論に関連するもの、組合せ理論等に関連するものまで非常に多くのものが提起されている。本講座の1章でもマトロイド構造を有する具体例を紹介したが、ここではそれらを含めて良く知られている身近なものをいくつかとりあげ、説明を加えてみよう。

3.1 単純なマトロイド

マトロイドの概念の具体的なイメージをより明確にするために、いくつかの単純な構造を有するマトロイドを紹介しよう。まず最も単純な構造を有するマトロイドとして、有限な集合 E が与えられた時に空集合のみが独立な集合であるようなマトロイドが存在する。つまり空集合以外の E のすべての部分集合は従属集合であるとするわけである。このマトロイドが2.1節のマトロイドの独立性の公理 (I1), (I2), (I3) (あるいは (I3')) を満たしていることは明らかであろう。このマトロイドにおいては、 E のすべての要素がそれ自身でサーキットをなすので、任意の部分集合 $A \subseteq E$ に対して常に階数は $r(A) = 0$ となる。このようなマトロイドは退化マトロイド (trivial matroid) と呼ばれる。

上の例と同様に単純な構造を有するマトロイドとして離散マトロイド (discrete matroid, あるいは自由マトロイド (free matroid) とも呼ばれる) がある。離散マトロイドでは集合 E のすべての部分集合が独立な集合であると定義される。したがって E の任意の部分集合の部分集合はやはり E の部分集合であるので (I2) が満たされる。また E の部分集合 U, V が $|U| = |V| + 1$ を満たす

とすると、 U の中に V に含まれない要素が存在するので、その要素を e とすると $V \cup \{e\}$ は E の部分集合となる。このようにして離散マトロイドが独立性の公理を満たしていることがわかる。またこの離散マトロイドにおいては、 E の部分集合 A の階数が A に含まれる要素の数、つまり $r(A) = |A|$ であって、かつマトロイドの基底がただひとつ存在し、集合 E 自身がそれに相当することも明らかであろう。

上に述べた2つのマトロイドを一般化したものとして、 k -様マトロイド (k -uniform matroid) がある。 k -様マトロイドは、有限集合 E に含まれる要素の数を n とすると $U_{k,n}$ と表記され、 $U_{k,n}$ の基底は E の部分集合のうちで k 個の要素から成るものである。このマトロイドが2.1節で紹介したマトロイドの基底の公理を満たしていることは明らかであろう。したがってマトロイド $U_{k,n}$ の独立な集合は、 E の部分集合のうちで要素の数が k 個以下のものとなり、このマトロイドの階数関数 r あるいは閉包演算子 σ が以下のように与えられることも明らかとなるであろう。

部分集合 $A \subseteq E$ に対して、

$$r(A) = \begin{cases} |A|, & |A| < k \text{ の時} \\ k, & |A| \geq k \text{ の時} \end{cases}$$

$$\sigma(A) = \begin{cases} A, & |A| < k \text{ の時} \\ E, & |A| \geq k \text{ の時} \end{cases}$$

以上から、本節で紹介した退化マトロイドと離散マトロイドは、それぞれ k -様マトロイドによって $U_{0,n}$, $U_{n,n}$ と表わすことができる。

3.2 ベクトルのマトロイド

マトロイドに関する理論がベクトル空間における1次独立性の概念を一般化したものとして発展してきたことは1章に述べた。いまベクトル空間 V のベクトル x_1, x_2, \dots, x_n の集合 E に対して、それらのベクトルの部分集合 $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ がベクトル空間 V において1次独立である場合に集合 $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ は独立な集

合であるとする、これはマトロイドの独立性の公理を満たす。このようにして定義されたマトロイドはベクトルマトロイド(vectorial matroid)と呼ばれる。このベクトルマトロイドの階数関数は、ベクトル空間 V の階数(rank)あるいは次元(dimension)を部分空間 E において与える関数に等しくなる。したがってこのベクトルマトロイドの基底は、ベクトル空間 V において E が張る部分空間と同じ空間を張るすべての1次独立なベクトルの集合であるといえることができる。

次のようなベクトルの集合 $E = \{x_1, x_2, \dots, x_8\}$ ($\{0, 1\}$ を用いて、それらの作る体(field) $GF(2)$ 上のベクトル空間におけるベクトルとみなす) を考えてみよう。

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

ベクトルの集合 $E = \{x_1, x_2, \dots, x_8\}$

このマトロイドにおいては、 $\{x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_6, x_7\}$, $\{x_3, x_5, x_8\}$ などそれぞれ1次独立なベクトルの集合であるので、ベクトルマトロイドの独立集合となる。また $\{x_2, x_3, x_7\}$, $\{x_3, x_6, x_8\}$ などそれぞれ $x_2 + x_3 = x_7$, $x_3 + x_6 = x_8$ が成り立つので1次従属となり、ベクトルマトロイドの従属集合となる。ベクトルの集合 E において1次独立なベクトルの組は最大3個のベクトルを有することから、このベクトルマトロイドの階数は3となる。なおベクトルマトロイドは、マトロイドの分類上でも重要な特性を有している。このことについては、後に5章でより詳細に述べられるであろう。

2つのマトロイド M_1, M_2 が同一あるいは異なる有限集合 E_1, E_2 上で $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$, $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ として与えられているとする。ここで集合 E_1 と集合 E_2 の要素間におおの独立性を維持するような1対1対応が存在する時、換言すれば E_1 の要素の集合が M_1 において独立集合であることとそれに対応する E_2 の要素の集合が M_2 において独立集合であることが常に等価であるような要素間の1対1対応が E_1, E_2 間に存在する時、2つのマトロイド M_1, M_2 は同型(isomorphic)であると言われる。任意のマトロイド M が何らかのベクトルマトロイドと同型である時、マトロイド M はベクトルの(vectorial)であると呼ばれる。

3.3 グラフ的マトロイド

1章でマトロイドの例として掲げた閉路マトロイド(cycle matroid, circuit matroid あるいは polygon matroid と呼ばれることもある)を紹介しよう。頂点の集合 V , 弧の集合 E を有するグラフ $G = (V, E)$ が与えられた時、弧の集合 E を対象としてそれらの部分集合の

うちで閉路(cycle)を含まないものを独立集合とすると、これはマトロイドを構成することがわかる。つまりグラフ G の初等的な閉路(グラフの閉路のうちで、始点と終点以外には同じ頂点を2度通らないものを特に初等閉路という)をマトロイドのサーキットとすると、これらの初等閉路の集合はマトロイドのサーキットの公理系(C1), (C2)を満たすことが証明される。このようにしてグラフ G 上に定義されたマトロイドを閉路マトロイドと呼び $M(G)$ と表記すると、次の定理が得られる。

定理 3.1 グラフ G に対して、 G の初等閉路は G の弧の集合 E 上で定義された閉路マトロイド $M(G)$ のサーキットである。

閉路マトロイド $M(G)$ について、その基底、階数関数、閉包演算子等を考えてみよう。まず $M(G)$ の基底は、1章にも述べられているように、グラフ G の完全木(より厳密には、連結グラフ G に対しては完全木が閉路マトロイド $M(G)$ の基底であるが、グラフ G が非連結の場合には完全森(spanning forest)が $M(G)$ の基底となる)である。つまり閉路を含まない G の最大の部分グラフは完全木(あるいは完全森)だからである。したがってマトロイド $M(G)$ の独立集合は、 G の弧の集合のうちで $M(G)$ のサーキットに対応する閉路を含まないものとなることも明らかである。

例を掲げよう。図3.1のような連結グラフ G_0 の弧の集合 $E = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ 上で定義された閉路マトロイド $M(G_0)$ を考える。

たとえば図3.2にある G_0 の完全木 H_1, H_2 などはマトロイド $M(G_0)$ の基底に対応している。なおグラフ G_0 の完全木、つまり $M(G_0)$ の基底が全部で16種類存在することは各自確認されたい。また閉路を含まない弧の集合は $M(G_0)$ の独立集合であるので、 G_0 のいずれかの完全木に含まれる弧の集合の任意の部分集合は $M(G_0)$ の独立集合となる。

グラフ G の頂点の個数を n , 連結成分の数を k とすると、 G の完全木(あるいは完全森)に含まれる弧の数が $n - k$ となることはグラフ理論においてよく知られている。そこでグラフ G の弧の集合 E の部分集合 A に対して、 A に含まれる弧から成る部分グラフ $H_A = (V_A, A)$ の頂点の個数 $|V_A|$ から H_A の連結成分の数 k_A を差し引いた数を H_A の階数 $\kappa(H_A)$ とすると、次のように書くことができる。

$$\kappa(H_A) = |V_A| - k_A \quad (3.1)$$

なお(3.1)で与えられる $\kappa(H_A)$ は、グラフ理論においてグラフ H_A に対するカットセット階数(cutset rank)と呼ばれるものである。このようにして与えた階数関数がマトロイドの階数関数による公理系(R1), (R2), (R3)を満

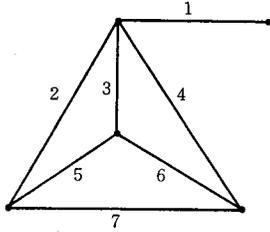
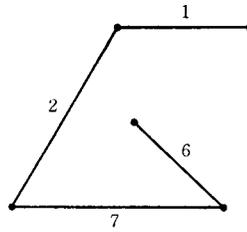
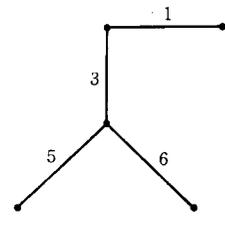


図 3.1 グラフ G_0



完全木 H_1



完全木 H_2

図 3.2 G_0 の完全木の例

たすことは容易に証明される. つまりグラフ G の弧の集合 E の任意の部分集合 A, B に対して, それぞれから成る G の部分グラフを H_A, H_B とする. ここで $H_A \cup H_B, H_A \cap H_B$ をそれぞれ 2 つのグラフ H_A, H_B の和および共通部分をとったものとする, 以下の関係 (a), (b), (c) が成り立つことは, 上のカットセット階数の定義から容易に示すことができる.

- (a) $0 \leq \kappa(H_A) \leq |A|$.
- (b) グラフ H_A がグラフ H_B の部分グラフであれば, $\kappa(H_A) \leq \kappa(H_B)$.
- (c) $\kappa(H_A \cup H_B) + \kappa(H_A \cap H_B) \leq \kappa(H_A) + \kappa(H_B)$.

したがって閉路マトロイド $M(G)$ の階数関数は, E の部分集合 A に対して, A から得られる部分グラフ H_A を用いて (3.1) のように書くことができる.

たとえば図 3.1 のグラフ G_0 に対しては, $n=5, k=1$ であるので, $\kappa(G_0) = \kappa(H_1) = \kappa(H_2) = 5 - 1 = 4$ となる. したがってグラフ G_0 の弧の集合 E 上の閉路マトロイド $M(G_0)$ の階数は 4 である.

マトロイド $M(G)$ の閉包演算子について述べよう. E の部分集合 A の閉包が A を含む最小の閉じた集合であることは前に述べた. このグラフ G 上の閉路マトロイド $M(G)$ においては, 弧の集合 E の部分集合 A に対して弧 e (ただし $e \in E \setminus A$) が A の閉包 $\sigma(A)$ に含まれているということは, グラフ G において,

$$e \in C \subseteq A \cup \{e\}$$

となる閉路 C が存在することと等価である. 換言すれば, 部分集合 A に弧 e をつけ加えることによってグラフ G における閉路が新しく構成されることが, e が $\sigma(A)$ に含まれるための必要十分条件である. このことをマトロイド全般についてより一般的に述べたのが定理 2.6 (2 章参照) である.

たとえば図 3.1 のグラフ G_0 に対する閉路マトロイド $M(G_0)$ において $A = \{3, 5, 6\}$ (図 3.3 参照) とすると, $\sigma(A) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (図 3.4 参照) で与えられる. したがって $\sigma(A) \setminus A = \{2, 4, 7\}$ であるので, $e = 2, 4, 7$ がそれぞれ集合 A と合わせて閉路 $\{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 6, 7\}$ を形成しているのがわかる. なお $e = 1$ とすると, $A \cup$

$\{1\}$ は閉路をもたないので $M(G_0)$ の独立集合となり, $e \notin \sigma(A)$ である.

本節ではグラフ G に対して定義された閉路マトロイド $M(G)$ に関して, そのサーキット, 独立集合, 基底, 階数関数, 閉包演算子等を紹介した. そこで次のような疑問が生ずるかも知れない. 任意のマトロイド M は, あるグラフ G 上で定義された閉路マトロイド $M(G)$ と同型であろうか? つまり任意のマトロイド M と閉路マトロイド $M(G)$ とが同型となるようなグラフ G が常に存在するであろうか?

たとえば 3.1 節で紹介した 3 個の要素 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 上で定義された 2-一様マトロイド $U_{2,3}$ について考えてみよう. このマトロイドの独立集合は, 3.1 節にも述べたように要素数が 2 個以下の集合である. 図 3.5 にあるグラフ H_0 の弧の集合 $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ 上の閉路マトロイド $M(H_0)$ を考えると, $M(H_0)$ の独立集合は E の部分集合のうちで要素数が 2 個以下の集合に対応している. したがって図 3.5 にあるようなグラフ H_0 上の閉路マトロイド $M(H_0)$ が 2-一様マトロイド $U_{2,3}$ と同型であることがわかる. ところが 4 個の要素の集合上の同様のマトロイドである $U_{2,4}$ については, 2-一様マトロイド $U_{2,4}$ と同型となる閉路マトロイドのグラフ G は存在しないことが容易に証明される. このようにして, 上の疑問に対する解答が NO であることがわかる.

任意のマトロイド M に対して, 上の例で示したように M と同型の閉路マトロイド $M(G)$ をもたらすグラフ G が存在する時, マトロイド M はグラフ的 (graphic) であると呼ばれる. それに対してそのマトロイドと同型

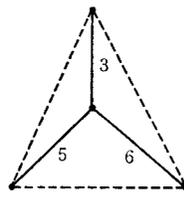


図 3.3

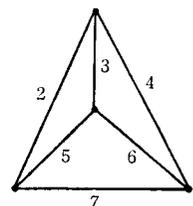


図 3.4

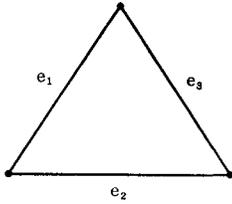


図 3.5 グラフ H_0

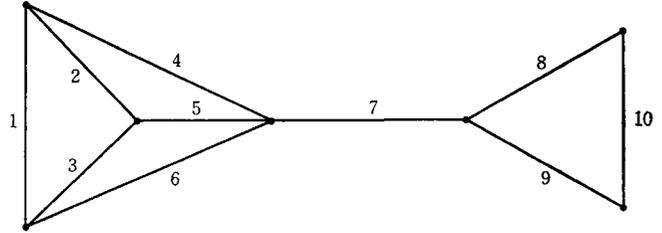


図 3.6 グラフ G_1

な閉路マトロイド $M(G)$ をもたらすグラフ G が存在しない時、マトロイド M は非グラフ的 (nongraphic) と呼ばれる。このようなマトロイドの特性化あるいは分類化については後に 5 章でより詳細に述べることにする。上に紹介したように、マトロイド $U_{2,3}$ がグラフ的マトロイドであるのに対して、マトロイド $U_{2,4}$ は非グラフ的マトロイドであることは言うまでもない。

グラフ G 上で定義されるもうひとつのマトロイドを紹介しよう。任意のグラフ G に対して、その弧の集合のうちで初等閉路の集合がマトロイドのサーキットの公理系を満たすことによって閉路マトロイドが定義された。ここではグラフ G におけるカットセット (cutset) の集合を考えてみよう。カットセットは、それに含まれる弧を除去するとグラフの連結成分の数が増加するような極小の弧の集合である。つまり連結グラフのカットセットは、それに含まれる弧を除去するとグラフを非連結にするような極小の弧の集合であると言うことができる。

たとえば図 3.6 のグラフ G_1 においては、弧の集合 $\{2, 3, 4, 6\}$, $\{7\}$, $\{8, 9\}$, $\{9, 10\}$ などがカットセットである。しかしながら集合 $E_1 = \{4, 5, 6, 7\}$, $E_2 = \{8, 9, 10\}$ などはカットセットではない。集合 E_1, E_2 に含まれる弧を除去すれば連結グラフ G_1 は非連結になるものの、 E_1 については $\{4, 5, 6\}$ あるいは $\{7\}$, E_2 については $\{8, 9\}$, $\{9, 10\}$ あるいは $\{8, 10\}$ という別のカットセットが真部分集合としてそれぞれに含まれているために E_1, E_2 は極小な弧の集合とならないからである。なおグラフ G_1 の弧 7 のように弧 1 本のみでカットセットとなるような弧は橋 (isthmus) と呼ばれる。

任意のグラフ G におけるこのようなカットセットの集合は、以下のような 2 条件、つまりサーキットによるマトロイドの公理を満足することがグラフ理論を用いて証明することができる。

- (a) どのカットセットも他のカットセットを含むことはない。
- (b) D_1, D_2 をともに弧 e を含むような 2 つの異なるカットセットとすると、弧 e を含まずに $D_1 \cup D_2$ に含まれるようなカットセットが存在する。

したがって任意のグラフ G に対して、カットセットをサ

ーキットとするようなマトロイドが存在する。このようにして定義されたマトロイドはカットセットマトロイド (cutset matroid) と呼ばれ、 $M^*(G)$ と表記される。グラフ G に対するカットセットマトロイド $M^*(G)$ の独立集合がグラフ G のカットセットを含まない集合であることは定義から明らかであろう。

カットセットマトロイド $M^*(G)$ の階数関数について考えてみよう。グラフ G の頂点の集合を V , 弧の集合を E , 連結成分の数を k とする。そして弧の集合 A の E に関する補集合を \bar{A} とした時に、弧の集合 A によって得られる部分グラフを $H_A = (V_A, A)$, $H_{\bar{A}}$ の連結成分の数を k_A とすると、 $M^*(G)$ の階数関数 $r^*(A)$ は次のように書くことができる。

$$r^*(A) = |A| - |V| + |V_A| + k - k_A. \quad (3.2)$$

なお上式に関してはここでは紹介のみにとどめるが、前述の閉路マトロイドの階数関数と後に 4 章に述べる双対マトロイドの概念を用いてただちに得られることをつけ加えておく、カットセットマトロイド $M^*(G)$ の階数は (3.2) 式より次のように表わされる。

$$r^*(E) = |E| - |V| + k. \quad (3.3)$$

上式において $|V| - k$ は閉路マトロイド $M(G)$ の階数であって、グラフ G の完全木 (あるいは完全森) の弧の数を表わしている。したがってカットセットマトロイド $M^*(G)$ の階数は、グラフ G の連結成分の数を増加させない (グラフ G の連結成分を非連結にしない) という条件の下で除去できる弧の本数の最大数を表わしていることがわかる。

例を掲げよう。図 3.7 にあるグラフ G_2 を考える。弧の集合 $E = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ に対して $A = \{3, 5, 6, 7, 9\}$ とすると $\bar{A} = \{1, 2, 4, 8\}$ となり、 A, \bar{A} から得られる G の部分グラフ $H_A, H_{\bar{A}}$ はそれぞれ図 3.8, 図 3.9 のように与えられる。したがって、

$$|A| = 5, \quad |V| = 7, \quad |V_A| = 6, \quad k = 1, \quad k_A = 2$$

を用いると、(3.2) より、

$$r^*(A) = 5 - 7 + 6 + 1 - 2 = 4$$

が得られる。

(3.1) 式で紹介したカットセット階数に対応する閉路

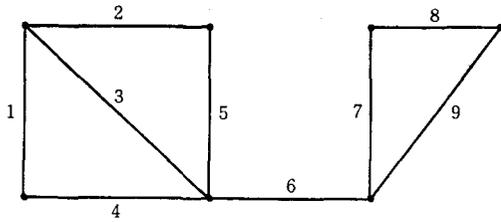


図 3.7 グラフ G_2

階数について述べよう。グラフ G の弧の集合 E の部分集合 A に対して、 A から得られる部分グラフを $H_A = (V_A, A)$ 、 H_A の連結成分の数を k_A とすると、 H_A の閉路階数(cycle rank)は次式のように与えられる。

$$\gamma(H_A) = |A| - |V_A| + k_A. \quad (3.4)$$

なお (3.4) 式の閉路階数は、グラフ H_A に対する零度(cyclomatic number あるいは nullity)とも呼ばれる。グラフ G のカットセット階数が G の完全木(あるいは完全森)に含まれる弧の本数を表わしているのに対して、 G の閉路階数はそれに含まれない弧の本数を表わしていることは前にも述べたとおりである。

(3.1), (3.4) の2つの関数の関係について少し説明を加えておこう。グラフ $G=(V, E)$ に対して、その完全木(完全森としても同様であるので、以下では完全木とのみ述べることにする)を T とする。この時、弧 $e \in E \setminus T$ に対して $\{e\} \cup T$ は唯一の閉路を生成する(この事実のマトロイド理論における表現は系 2.3 に与えられている)。このようにして完全木 T から生成される閉路の集合は、グラフ G の完全木 T に関する基本閉路系(fundamental system of cycles, マトロイドの基本サーキット系(fundamental system of circuits)に対応する)をなすと言われる。

たとえば図3.10にあるグラフ G_3 において、完全木 T を図3.11のようにとると、 G_3 の T に関する基本閉路系

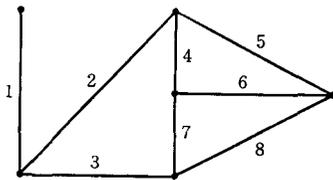


図 3.10 グラフ G_3

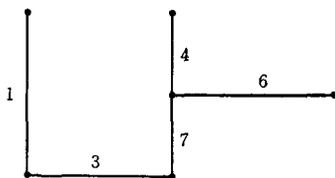
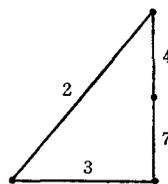
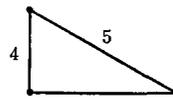


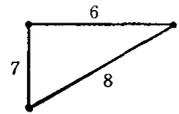
図 3.11 完全木 T



(a)



(b)



(c)

図 3.12 G_3 の基本閉路系

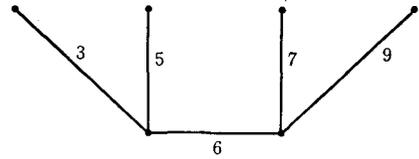


図 3.8 グラフ H_A

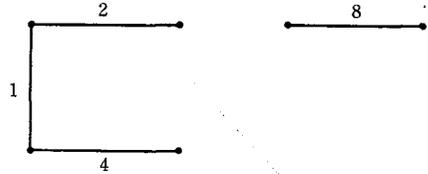


図 3.9 グラフ H_A

は図3.12のように与えられる。

グラフ $G=(V, E)$ の完全木 T に含まれる弧の本数は $|T|=|V|-1$ であるから、基本閉路系に含まれる閉路(これらはすべて異なる)の数は、

$$\gamma(G) = |E| - |T| = |E| - |V| + k$$

ただし k はグラフ G の連結成分の数

となり G の閉路階数として与えられる。図3.10のグラフ G_3 においては $|T|=5$ であるから、 $\gamma(G_3) = 8 - 5 = 3$ となることがすぐに確認できる。

一方、グラフ $G=(V, E)$ のカットセットに関しては、完全木 T に含まれるそれぞれの弧 e に対して、 e の除去は完全木 T を非連結にする。したがってグラフ G の任意のカットセットは、完全木に含まれる1本の弧とそれに含まれない弧の集合の和によって得られる。このようにして完全木 T から得られるカットセットの集合は、グラフ G の完全木 T に関する基本カットセット系(fundamental system of cutsets)と呼ばれ、この系に含まれるカットセット(これらはすべて異なる)の数は $|T| = |V| - 1$ である。これは、

$$\kappa(G) = |T| = |V| - 1$$

として、グラフ G のカットセット階数に等しい。

図3.10のグラフ G_3 に対しては、図3.11にある完全木 T をもとにすると、図3.13(a)–(e)に与えられる弧の集合 $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{5, 6, 8\}$, $\{2, 7, 8\}$ がグラフ G の基本カットセット系を構成している。

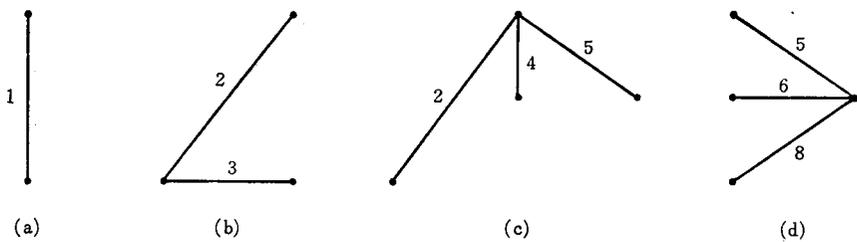


図 3.13 G_8 の基本カットセット系

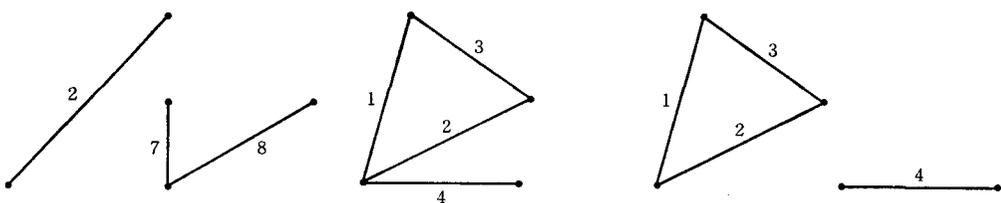


図 3.14 グラフ G_4

図 3.15 グラフ G_5

●ご利用ください●さしあげます●

下記の雑誌は、交換等によって、日本OR学会にほぼ定期的に送られてきているものです。学会事務局で保管しておりますので、どうぞご利用ください。下記のもの以外にも大学の論叢等があります。なお、1980年中に発行のものは、ご希望があれば、さしあげますので(原則として郵送はいたしません)事務局までお申し出ください。

- | | |
|---------------|--------------|
| (1) I E | (社)日本能率協会 |
| (2)運輸と経済 | (財)運輸調査局 |
| (3)ENGINEERS | (財)日本科学技術連盟 |
| (4)技術と経済 | (社)科学技術と経済の会 |
| (5)計測と制御 | (社)計測自動制御学会 |
| (6)研究と実用化報告 | 電々公社 武蔵野通研 |
| (7)高速道路と自動車 | (財)高速道路調査会 |
| (8)産業能率 | 大阪府立産業能率研究所 |
| (9)情報処理 | (社)情報処理学会 |
| (10)数理科学 | 幹サイエンス社 |
| (11)テレビピア | 日本電々公社 |
| (12)電子通信学会誌 | (社)電気通信学会誌 |
| (13)電子通信学会論文誌 | " |
| (14)土木学会誌 | (社)土木学会 |
| (15)日本機械学会誌 | (社)日本機械学会 |
| (16)標準化ジャーナル | (社)日本規格協会 |
| (17)標準化と品質管理 | " |
| (18)労働研究 | 兵庫県労働部労働調査室 |

任意のマトロイド M に対して、グラフ G 上で定義された閉路マトロイド $M(G)$ が M と同型となる時、マトロイド M はグラフ的と呼ばれることは前に述べた。それに対して、マトロイド M とグラフ G 上のカットセットマトロイド $M^*(G)$ とが同型となるようなグラフ G が存在する時、マトロイド M は双対グラフ的 (cographic) と呼ばれる。グラフ G に対する $M(G)$ と $M^*(G)$ 、あるいはグラフ的マトロイド、双対グラフ的マトロイドに対するより詳細な説明は後述されるので、ここでは定義を与えるのみにとどめる。

最後に2つのグラフの間の同型性と、それらのグラフ上で定義された閉路マトロイドあるいはカットセットマトロイドの間の同型性が必ずしも等価ではないことを追加しておこう。

たとえば図3.14、図3.15にある2つのグラフ G_4 、 G_5 は明らかに同型ではない。しかしながらこれらのグラフから得られる閉路マトロイド $M(G_4)$ 、 $M(G_5)$ 、およびカットセットマトロイド $M^*(G_4)$ 、 $M^*(G_5)$ はそれぞれの要素の集合間の独立性、従属性を維持するので両者は同型である。つまりグラフから得られた閉路マトロイドあるいはカットセットマトロイドが同型であっても、必ずしももとのグラフは同型であるとは限らないといえることができる。グラフ理論の言葉を用いると、2つのグラフに対応する閉路マトロイドあるいはカットセットマトロイドが同型となるのは、これらのグラフが互いに2同型となる時、つまり2つのグラフの弧の集合間の1対1対応の下でそれぞれの閉路(あるいはカットセット)が1対1に対応する時、そしてその時に限るといえることができる。