書 評

相補性と不動点

アルゴリズムによるアプローチ
（講座・数理計画法９）

小島 政和 著 産業図書

本書の主題である相補性問題と不動点問題は，ともに1960年代後半から今日にかけて急速な発展を遂げた分野である．といっても，数理計画法全般を見渡したときこれらの問題自体が特に目新しいというわけではない．たとえば，相補性問題とは，不等式制約をともなった非負変数の非線形計画で Kuhn-Tucker 点を特徴づける Complementary-slackness を一般的に定式化した問題にほかならないし，２人非零和 game の Nash 平衡点を求める問題，Walras 型経済均衡を求める問題等がいずれも Brouwer ないし角谷不動点問題に帰着されることは1950年代から知られていたことであった．それが14，5年前を境に改めて注目を集めるようになったのは，相補性問題や不動点のように分離定理の射程をはみ出してはいるがある種の位相的性質はもっているというような問題を統括的に処理できる algorithm 開発への道がこの頃になってにわかに開けてきたからである．

その発端となったのは，元来 bimatrix game の代数的解法として発表され，以後相補性 algorithm の基本形を与えることになった Lemke 法であり，本書でも第２章および第４章の一部がこの方法の解説にあてられている．Lemke 法は計算手順が線形計画の simplex 法に酷似しているため，かえってその本質が見過ごされがちであるが，第１に人工変数を１つ加えることで線形方程式系を連続的にずらせながら生成された path をたどってゆくこと，次に path がある相補的単体錐のへりにきたときそのへりを共有するただ１つの他の相補的単体錐の内部へ path を延ばすこと，の２点でこの分野の原点たる独創性を有する方法と言うべきである．本書の読者は後により一般的な枠組の中でこの単純な考え方が再度形を変えて登場するのを発見するであろう．

さて，本書の主要部分をなす第３章以降の構成についてであるが，何よりも特徴的なことは問題を始めから不動点問題だけに特定せず，一般の非線形方程式系に homotopy を用いた連続変形法を適用したときそれが成功するためにはどのような位相的条件が満たされれば良いかという観点から不動点 algorithm を見てゆくというきわめて普遍的な方法論が採られていることである．以下では便宜上３つの部分に分けて以上のことを考察する．

まず，第３章では方程式系を構成する各関数が連続微分可能な場合を考える．型通り Newton 法から出発するがそこに深入りするのは本書の意図ではない．大域的収束を保証する試みとしてすぐに homotopy が導入される．このとき，線形計画の非退化の仮定に相当する正則条件（不動点問題に則して言えば homotopy 変形の各段階ですべての不動点が定義域一凸 compact 集合一のへりにないこと）を仮定すると全変形過程を通じての方程式系の解集合は有限本の滑らかな path から成ることが示される．この内，元の方程式系の解に到達する path を選んで不動点を含むいくつかの問題ではこのような path の存在は容易に保証され，かつその選択はほとんど自明である)，逐次的に path の接 vector を計算しながら進んでゆくというのがここでの解法の骨子である．

では関数が連続ではあるが微分可能でないときはどうすれば良いだろうか？ 本書の解答は homotopy 全体を区分線形近似してしまうことである．この方法は無論関数が微分可能な場合にも適用でき，しかも上記の逐次解法にくらべより構成的なもので，最近の成果のほとんどがこちらのほうに集中していると言っても過言でない．本書でも第４章から第６章までが区分線形近似にもとづく algorithm の説明に費やされている．

第４章は第５章以下への準備であって，Euclid 空間を可算個の単体で分割する方法，関数を単体分割上で区分線形近似する方法，区分線形な homotopy による連続変形法の基本手順（読者はここで Lemke 法の考え方が再現することにご注目いただきたい）等が要領よく述べられる．第５，６章ではこの解法の精度を高めるための代表的手法である Merrill 法と Eaves-Saigal 法が紹介される．ともに単体分割の目を細かくしてゆくことによって近似精度の向上を図るのであるが，Merrill 法が前の段階で得られた近似解を改めて初期点とし，さらに目の細かい単体分割上で作られた homotopy を適用するという手続きを繰り返すのに対し，Eaves-Saigal 法では homotopy が元の方程式系に近づくにつれ無限に目が細かくなってゆくような分割を始めから与えてしまうため "restart" の手続きを必要としない点が大きな違いである．より構成的なのは明らかに Eaves-Saigal 法のほうであるが，単体分割の選択の自由度は Merrill 法のほうが大きく有意な差はないようである．実際，本書巻末の数値計算例によっても両法の効率に優劣はつけがたいという結果が出ている．本書の最後にちょっと触

れられている Laan-Talman の次元伸縮法は区分線形な連続変形法に相補性問題における必要計算次元の考え方を組み込んだものなので，このことによって step 数が増すのでない限り，かなりの計算効率の改善が期待できそうである．

最後の第7，8章は第4章以降の議論に対する数学付録的性格をもった内容である．第7章は単体近似の目を細かくすることが確かに近似精度をよくすることに関して厳密な証明，Merrill 法を効率よく進めるための初期関数や目の細かさの選び方といった theme を含むが，読者に特に注目していただいたのはこの章の冒頭で述べられている path の向きに関する指数の性質についてである．これは第3章で接 vector の向きを決定するのに使った考え方に対応するものであり，連続変形法はこの指数の性質を利用することによって初期の代数的不動点解法につきものであった Sperner の補題の組合せ的性格との直接のかかわりあいを優雅に避けているからである．この指数の幾何学的意味は定義からほとんど明らかであろうが，方程式系を構成する関数である点が別の点に移ったときその点の近傍での座標系の並び方を保存するかひっくりかえすか（たとえば，右手系を左手系に変えるか）を示すものである．したがって，ある方程式系のすべての解に対して指数を調べそれを合計すれば，座標系の並び方を保存する解とひっくりかえす解の個数の差が得られることになる．これが写像度と呼ばれるものであり，第8章はこの写像度を一般の連続関数に対して定義し，かつ写像度が homotopy 変形によって変わらないことの証明を行なう．写像度は解の個数そのものを表わすわけではないが，関数の他の大域的性質と組み合わせることによって解の性質についてのかなりの情報を提供し得るものとなる．この位相的概念をどのように使いこなすかは本書の著者から読者への宿題というべきであろう．

以上，第1章の数学的準備を含めて200頁ちょっとの紙面でよくこれほどと思われる内容がぎっしり盛り込まれている．非線形方程式系の逐次解法については Ortega-Rheinboldt の名著（1970）があり，homotopy 変形も写像度の理論も微分可能な場合を中心に紹介されてはいるが，本書のように区分近似解法に対してここまで包括的扱いを行なった書物は洋書を通じてもおそらく初めてではないかと思う．記述の style は全般に簡潔でむだがなく，初心者向きというよりは専門家好みである．随所に見られる例題も，始めの凸2次計画を除いては著者自身の研究上の成果をふまえたものばかりであり，これからこの分野を志そうとする読者にとっては座右の書となるであろう．　（西野　壽一　慶応義塾大学）