# マトロイド理論の基礎(2)

大山 達雄

前回に引き続いて，マトロイドの公理系について述べることにする．

## 2.2 サーキット，階数関数にもとづく公理

最初にサーキット (circuit) によるマトロイドの公理を述べよう．有限個の要素からなる集合$E$の部分集合族$\mathscr{C}$(サーキットの族と呼ばれる)は次の２つの性質を満足するものとする．

(C1) $X, Y \in \mathscr{C}$(ただし$X \neq Y$)であるならば，$X \not\subseteq Y$.

(C2) $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$ (ただし $C_1 \neq C_2$) であってかつ $e \in C_1 \cap C_2$ であるならば，$C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 \setminus \{e\}, C_3 \in \mathscr{C}$, なるサーキット $C_3$ が存在する．

この時集合 $E$ 上のマトロイド $M$ は，$M=(E, \mathscr{C})$ と表わされる．任意のグラフにおける初等閉路は明らかに一方が他方を含むことはない．また図2.3からもわかるように，２つの閉路 $C_1, C_2$ が与えられた時に，それらに共通な弧があれば，それを含まない別の閉路$C_3$が$C_1 \cup C_2$の部分集合として存在する．このようにしてグラフにおける閉路が上述のサーキットの特性を有していることがわかる．

さて前節で紹介した独立集合の公理と上のサーキットの公理との関連を調べてみよう．

**定理 2.2** $E$の任意の独立集合と任意の要素との和集合は最大１個のサーキットを有する．

**証明 1** $E$の部分集合$I$をマトロイドの任意の独立集合

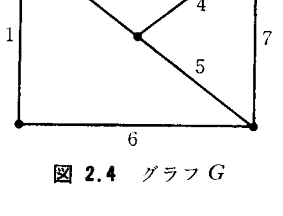



**図 2.4** グラフ $G$

おおやま たつお 埼玉大学

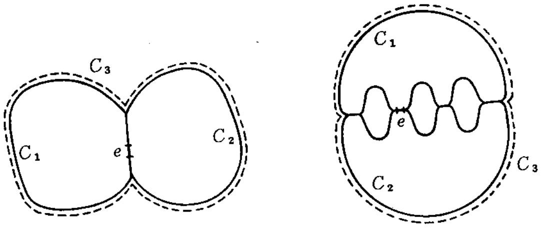



**図 2.3** ２つの閉路 $C_1, C_2$ と第３の閉路 $C_3$

($I \in \mathscr{I}$), $x$ を $E$ の任意の要素とする．いま$I \cup \{x\}$が２つのサーキット $C_1, C_2$ を含むとしよう．すると，$x \in C_1 \cap C_2$ であってかつ $C_1 \cup C_2 \subseteq I \cup \{x\}$ となるので，公理(C2)を用いるともうひとつのサーキット $C_3$ が存在することになるが，$C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 \setminus \{x\} \subseteq I$ であるから $I$ の独立性に矛盾する． ⊠

第１章に述べたグラフの弧の集合を対象として，閉路を含まない弧の集合をマトロイドの独立集合と定義した場合を考えてみよう．たとえば図2.4にあるグラフ $G$ の弧の集合 $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$ などは閉路を含まないので独立集合である．これらに１本の弧を加えた次のような弧の集合をとる．

$$E_1=\{1,2,3\} \cup \{4\}=\{1,2,3,4\}$$
$$E_2=\{1,2,3\} \cup \{7\}=\{1,2,3,7\}$$
$$E_3=\{4,5\} \cup \{6\}=\{4,5,6\}$$
$$E_4=\{4,5\} \cup \{7\}=\{4,5,7\}$$

上の４個の集合のうちで，$E_1, E_4$ はそれぞれ閉路 $\{2,3,4\}$, $\{4,5,7\}$ を１個ずつ含むが，$E_2, E_3$ はいずれも閉路を含まない．つまり閉路を含まない弧の集合にそれに含まれない弧を１本つけ加えると，最大１個の閉路ができるのが確かめられるであろう．上の定理2.2が，グラフの任意の木に対してそれに含まれない弧を１本つけ加えると最大１個の閉路ができるという自明のことを述べていることがわかる．

定理2.2の証明では，サーキットの公理および独立集合の公理の両者を前提とした．ここでは別の方法も可能

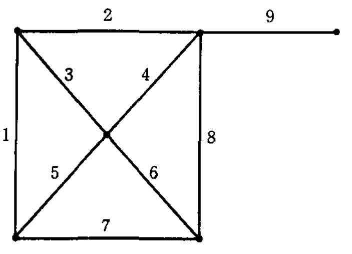
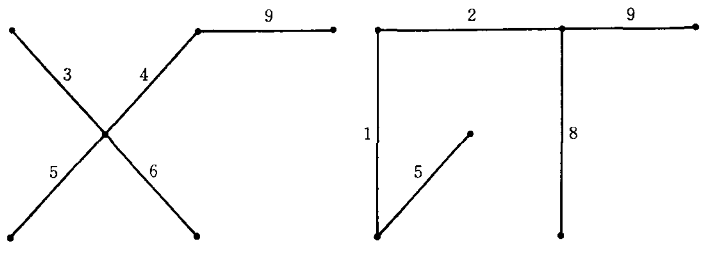



**図 2.5** グラフ $H$




(a) $H_1$ (b) $H_2$

**図 2.6** $H$ の完全木

である．つまり独立集合の公理(I1)，(I2)，(I3′) のみを前提として，定理 2.2 を以下のように証明することができる．

**証明 2** 独立集合 $I$ と要素 $x$ に対して，$I\cup\{x\}$ が 2 つの異なるサーキット $C_1$, $C_2$ を含み，集合 $I$ はこの条件を満たす最小の集合であるとする．$x\in C_1\cap C_2$ であるから，$x_1\in C_1\backslash C_2$, $x_2\in C_2\backslash C_1$ を満たす要素 $x_1, x_2$ が存在して，$I\cup\{x\}\backslash\{x_1\}\backslash\{x_2\}$ なる集合は独立集合となる．なぜならば $I\cup\{x\}\backslash\{x_1\}\backslash\{x_2\}$ が従属であるとすると，$I\backslash\{x_1\}$ が $I\backslash\{x_1\}\cup\{x\}$ に対して 2 つのサーキットを含む集合となり，$I$ の最小性に反するからである．したがって $I$ と $I\cup\{x\}\backslash\{x_1\}\backslash\{x_2\}$ がいずれも集合 $I\cup\{x\}$ に含まれる最大の独立集合になるので公理 (I3′) に反することになる． ☒

また一方，独立集合に関する公理 (I1)，(I2) と上の定理 2.2 の結果とを前提すると，公理 (I3′) の性質が得られることも以下のように示すことができる．いま $I_1$, $I_2$ がいずれも $E$ の部分集合 $A$ に含まれる最大の独立集合であって，$|I_1|<|I_2|$ であると仮定する．なお $I_1, I_2$ はそのような集合のうちで $I_1\cup I_2$ を最小にするものとする．この時 $x_1\in I_1\backslash I_2$ であって $I_2\cup\{x_1\}$ が従属となる要素 $x_1$ が存在する．定理2.2 の結果から $I_2\cup\{x_1\}$ は唯 1 個のサーキット $C$ を含み，かつそのサーキット $C$ は $x_2\notin I_1$ なる要素 $x_2$ を含む．また $|I_2|>|I_1|$ であるから，集合 $I_2$ は $x_2$ 以外にも $I_1$ に含まれない要素を含むはずである．したがって $I_1\cup I_2\backslash\{x_2\}$ は従属となる．$I_2\cup\{x_1\}\backslash\{x_2\}$ は独立集合であるので，$x_1\in I_1'\subseteq I_1\backslash I_2$ であってかつ $I_2'=I_2\cup I_1'\backslash\{x_2\}$ なる集合 $I_2'$ は $A$ に含まれる最大の独立集合となる．したがって $|I_1|<|I_2|\leqq|I_2'|$ となり，$I_1\cup I_2'\subsetneqq I_1\cup I_2$ であることから，$I_1\cup I_2$ の最小性に反する．このようにして公理(I3′)と定理2.2 の結果が等価であることが示される．

以上の議論から，前節に掲げた公理系{(I1)，(I2)，(I3)(あるいは)(I3′))} に対して，それと等価なもうひとつのマトロイドの公理系として {(I1)，(I2)，定理 2.2} が示されたことになる．後者の公理系は，サーキットの公理系 {(C1)，(C2)} と等価であることが容易に示されるので，ここでは証明は掲げない．このようにして前節に紹介した独立集合あるいは基底に関するマトロイドの公理とこの節に掲げたサーキットによる公理とがすべて等価であることが示される．

定理 2.2 からただちに得られる，マトロイドの基底とサーキットを関連づける結果を紹介しよう．

**系 2.3** マトロイド $M$ の基底を $B$, $B$ に含まれない $E$ の要素を $x$ とすると，$x\in C\subseteq B\cup\{x\}$ を満たす唯一のサーキット $C$ が存在する．

なおこのようにして得られるサーキットは $C(x,B)$ と表わすことにして，基底 $B$ における要素 $x$ の基本サーキット(fundamental circuit)と呼ぶことにする．

上の系 2.3 の意味するところを，第 1 章に紹介したグラフの弧の集合上のマトロイドをもとに考えてみよう．そこでは弧の集合のうちで閉路を含まない集合を独立集合としていることから，マトロイドの基底はグラフの完全木に対応する．図2.5のグラフ $H$ に対して，図2.6の(a)，(b)にあるグラフ $H_1, H_2$ はそれぞれ $H$ の完全木のグラフである．グラフ $H_1$ に対して，それに含まれていない弧としてたとえば 1 あるいは 8 を加えると，それぞれ閉路 {1,3,5} あるいは {4,6,8} ができる．またグラフ $H_2$ に対して，それに含まれていない弧としてたとえば 4 あるいは 7 を加えると，それぞれ閉路 {1,2,4,5} あるいは {1,2,7,8} ができる．このようにグラフの任意の完全木に，それを含まれない弧（グラフのひとつの木に対して，それに含まれない弧の集合は補木(cotree)と呼ばれる）を 1 本つけ加えると，必ずひとつの閉路が得られるということを上の系が意味しているのがわかる．

次に階数関数(rank function)によるマトロイドの公理系を与えよう．有限集合 $E$ 上における階数関数 $\rho: 2^E\to z$(整数の集合) は以下の(R1)，(R2)，(R3)を満たすものとする．

(R1) $E$ のすべての部分集合 $A$ に対して，$0\leqq\rho(A)\leqq|A|$.

(R2)　$A \subseteq B \subseteq E$ であれば，$\rho(A) \leqq \rho(B)$.

(R3)　$E$ のすべての部分集合 $A, B$ に対して，

$$\rho(A \cup B)+\rho(A \cap B) \leqq \rho(A)+\rho(B) \qquad (2.\ 1)$$

なお上の (2.1) を満足する関数は劣モデュラー関数 (submodular function)と呼ばれる．(R1), (R2), (R3) の公理を満たすような階数関数によって定義された$E$上のマトロイド $M$ は $M=(E, \rho)$ と表示される．このような階数関数によるマトロイドの公理系は，前回の冒頭に紹介した1935年の Whitney の論文で与えられたものであることをつけ加えておこう．階数関数にもとづくマトロイドの公理は，上の(R1), (R2), (R3)以外の形にも表わすことができる．たとえば (R2) の代わりに，(R1), (R2), (R3) から得られる「部分集合 $A$ に別の要素 $a$ を加えると階数が最大1だけ増加しうる」ことを示す(R2′) $\rho(A) \leqq \rho(A \cup \{a\}) \leqq \rho(A)+1,\ a \in E,\ A \subseteq E$ を用いることができる．また (R3) の代わりとして，次の条件が与えられることもある．

(R3′)　$\rho(A \cup \{a_1\})=\rho(A \cup \{a_2\})=\rho(A),\ a_1, a_2 \in E,$

ならば，$\rho(A \cup \{a_1\} \cup \{a_2\})=\rho(A)$.

(R1), (R2), (R3) の公理を前提とすると，(R3′)は容易に得られる．つまり要素 $a_1$, $a_2$ のどちらかが $A$ に入っている時は自明であるから，$a_1$, $a_2 \in E \backslash A$ とする．$\rho(A \cup \{a_1\})=\rho(A \cup \{a_2\})=\rho(A)$および関数 $\rho$ の劣モデュラー性(R3)より，

$$\rho(A \cup \{a_1\} \cup \{a_2\})+\rho(A) \leqq \rho(A \cup \{a_1\})+\rho(A \cup \{a_2\}) = 2\rho(A)$$

すなわち，$\rho(A \cup \{a_1\} \cup \{a_2\}) \leqq \rho(A)$ となるが，これと(R2)より，

$$\rho(A \cup \{a_1\} \cup \{a_2\})=\rho(A)$$

が得られる．また(R3′)の形を前提とした場合に，(R3)の形は以下に述べる階数関数にもとづく公理と独立集合による公理との関連の説明の中で得られる．

階数関数によるマトロイドの公理と独立集合による公理との関連について述べよう．$E$ の部分集合 $A$ に対して，マトロイドの階数が $A$ に含まれる最大の独立集合の要素の数として $r(A)$ の形に表示されることを前に述べた．この関数 $r(A)$ が (R1), (R2) の関係を満たすことは明白である．そこで以下に，関数 $r(A)$ が (R3)の関係を満たす劣モデュラー関数であることを図2.7を用いながら示そう．いま$r(A \cup B)=p, r(A \cap B)=q$ とし，集合 $A \cap B$ に含まれる最大の独立集合を $X$ とする．$|X|=q$ であるから，定理2.1を用いると $Y \supseteq X$ なる独立集合 $Y$ が存在し，かつ $|Y|=p$, $Y=X \cup V \cup W$, $Y \subseteq A \cup B$(ここで $V=Y \cap (A \backslash B)$, $W=Y \cap (B \backslash A)$)が成立する(図2.7参照)．$X \cup V$ が $A$ の独立な部分集合であって，$X \cup W$ が $B$ の独立な部分集合であることを用いると，

$$\begin{aligned} r(A)+r(B) &\geqq |X \cup V|+|X \cup W| \\ &=2|X|+|V|+|W| \\ &=|Y|+|X| \\ &=r(A \cup B)+r(A \cap B) \end{aligned}$$

となるので，(R3)の関係が得られる．

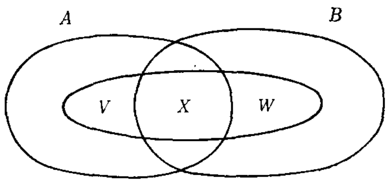


図 2.7

逆に有限集合 $E$ 上でマトロイド $M$ が階数関数によって $M=(E, \rho)$ として定義されたとする．マトロイド $M$ における独立集合を $E$ の部分集合 $A$ に対して，

$$A \in \mathscr{I} \Leftrightarrow \rho(A)=|A| \qquad (2.\ 2)$$

と定義する．このようにして定義された独立集合族 $\mathscr{I}$ の要素が前述の独立性の公理 (I1), (I2), (I3′) を満たすことは以下のようにして証明される．

(I1)は自明である．いま $X \in \mathscr{I}$ であって，$Y \subseteq X$, $Y \notin \mathscr{I}$ とすると，$\rho(Y)<|Y|$となる．そこで要素 $x \in X \backslash Y$ をとると，$\rho(Y \cup \{x\}) \leqq \rho(Y)+1<|Y|+1$. この操作を $x_1, x_2, \cdots, x_t, t=|X \backslash Y|$, まで続けると，

$$\begin{aligned} \rho(X)=\rho(Y \cup \{x_1, x_2, \cdots, x_t\}) &<|Y|+t \\ =|Y|+|X \backslash Y| &=|X| \end{aligned}$$

となり矛盾が生ずる．したがって $Y \in \mathscr{I}$ でなければならず，(I2)が成立する．

次に(I3′)に関しては，$E$ の任意の部分集合 $A$ に対して，それに含まれる極大な独立集合を $A_1, A_2$ かつ $|A_1|<|A_2|$ とする矛盾が生ずることを示すことによって得られる．$A_1 \cap A_2=A_0$ とすると，任意の $a \in A_2 \backslash A_0$ に対して $\rho(A_1 \cup \{a\})=\rho(A_1)=|A_1|$. したがって $\{a_1, a_2, \cdots, a_t\} \subseteq A_2 \backslash A_0$, ここで $t=|A_2 \backslash A_0|$, に対して上の手続きをくり返すと，

$$\rho(A_1 \cup \{a_1, a_2, \cdots, a_t\})=\rho(A_1)=|A_1|$$

となる．そこで上の関係を用いると，

$$\begin{aligned} \rho(A_2) \leqq \rho(A_1 \cup (A_2 \backslash A_0)) &=\rho(A_1 \cup \{a_1, a_2, \cdots, a_t\}) \\ &=\rho(A_1)=|A_1|<|A_2| \end{aligned}$$

となり，集合 $A_2$ の独立性に矛盾する．このようにして (I3′) が得られる．以上から階数関数を前提とするマトロイドの公理系と独立集合にもとづく公理系との等価性が示されたことになる．

階数関数によるマトロイドの公理系とサーキットによる公理系との関連について述べよう．いま階数関数 $\rho$ によってマトロイドが集合 $E$ 上で定義されているとする．

サーキット $C$ に対する階数関数の値は次式のようになる．

$$\rho(C)=|C|-1 \tag{2. 3}$$

マトロイドがグラフの弧の集合上で前章に掲げた例のように定義されている場合，つまり独立集合が閉路をもたない弧の集合として定義されている場合を考えてみよう．マトロイドのサーキットに対応するグラフの閉路 $C$ は $|C|$ 本の弧を有する．したがって閉路 $C$ に含まれる最大の独立集合，つまり閉路を含まない弧の集合の要素数が(2.3)式で与えられることは明らかとなろう．

さて階数関数にもとづくマトロイドの公理系と (2.3) の関係を用いてサーキットによる公理の (C2) を導くことができる．いま $C_1, C_2$ がサーキットであって，つまり $C_1, C_2\in\mathscr{C}$ であって，(C2) を満たすようなサーキット $C_3$ が存在しないとする．この時すべての要素 $e\in C_1\cap C_2$ に対して $C_1\cup C_2\backslash\{e\}$ は独立でなければならないから，次式が成立する．

$$\rho((C_1\cup C_2)\backslash\{e\})=|C_1\cup C_2|-1$$

一方 $C_1, C_2\in\mathscr{C}$ から $\rho(C_1)=|C_1|-1$, $\rho(C_2)=|C_2|-1$ であるから，(R3)の関係を用いて，

$$\begin{aligned}\rho(C_1\cup C_2)+\rho(C_1\cap C_2)&\leqq\rho(C_1)+\rho(C_2)\\&=|C_1|+|C_2|-2\\&=|C_1\cup C_2|+|C_1\cap C_2|-2\end{aligned} \tag{2. 4}$$

が得られる．しかしながら，

$$\rho(C_1\cup C_2)\geqq\rho((C_1\cup C_2)\backslash\{e\})=|C_1\cup C_2|-1$$

$$\rho(C_1\cap C_2)=|C_1\cap C_2|$$

を用いると，(2.4) の関係が矛盾であることがわかる．このようにして公理(C2)が導出される．

またサーキットにもとづくマトロイドの公理 (C1), (C2) が満たされているとする．この場合には，サーキットの部分集合族 $\mathscr{C}$ に対して関数 $r(A), A\subseteq E$, を

$$r(A)=\max\{|X|\,|\,X\subseteq A,\ X\text{ は }\mathscr{C}\text{ の要素を含まない}\} \tag{2. 5}$$

と定義することによって，$r(A)$ が $\mathscr{C}$ に対して定義されたマトロイドの階数関数となり，(R1), (R2), (R3)（あるいは(R3′)）を満たすことが示される．

以上のように，2.1 節および 2.2 節において，有限集合 $E$ 上のマトロイドを独立集合，基底，サーキット，階

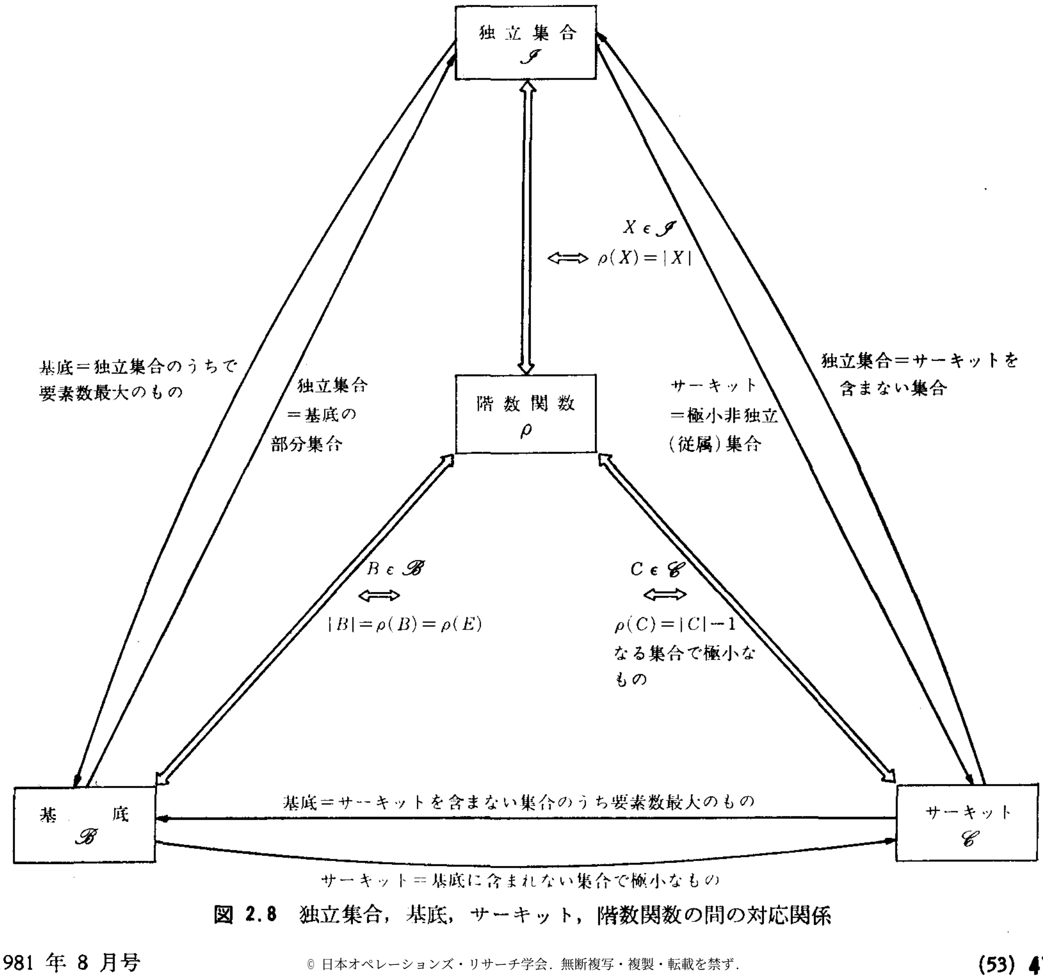



**図 2.8** 独立集合，基底，サーキット，階数関数の間の対応関係

数関数にもとづく公理によって定義し，これらの間の等価性を示した．このようにマトロイドはいろいろな概念を用いて定義されうるものであるから，最もイメージの把えやすいものをもとにして，他の公理系をそれとの相互関連として理解するのが効果的であろう．この節の最後に，これまで取り上げた諸概念によるマトロイドの公理系の対応関係を整理して図示すると，図2.8のようになるであろう．次節にはこれまでに掲げた公理以外でよく利用されるマトロイドの公理をいくつか紹介しよう．

### 2.3 その他の公理系

閉包(closure) なる概念を用いたマトロイドの公理を紹介しよう．まずマトロイド $M$ において集合 $E$ の部分集合 $A$ が閉じている〔closed, あるいはフラット(flat), 部分空間(subspace)などと呼ばれることもある〕とは，すべての要素 $x\in E\backslash A$ に対して，

$$\rho(A\cup\{x\})=\rho(A)+1 \qquad (2.\ 6)$$

が成立することである．つまり(2.6)式は，$A$ に含まれない $E$ のいかなる要素も部分集合 $A$ に追加されると階数が増加することを意味している．一方，$E$ の部分集合 $A$ に対して，

$$\rho(A\cup\{x\})=\rho(A) \qquad (2.\ 7)$$

であれば，要素 $x$ は集合 $A$ に従属である ($x$ depends on $A$)と呼ぶことにする．前章に掲げたマトロイドの例を考えてみよう．図2.9のようなグラフ$G$の弧の集合を$E$, つまり $E=\{1,2,3,4,5\}$ とする．$E$ 上のマトロイドの独立集合は閉路をもたない集合と定義されている．したがってたとえば $A=\{1,2\}$ とすると，$\rho(A)=2$は明らかである．そこで$A$に追加する要素として3あるいは4を考えれば，以下の関係が成り立つ．なお5を加えることは4を追加するのと同じである．

$$\rho(A\cup\{3\})=\rho(A)=2$$

$$\rho(A\cup\{4\})=\rho(A)+1=3$$

つまり要素3は集合 $A=\{1,2\}$ に従属である．

集合$E$の部分集合から部分集合への写像を表わす閉包演算子(closure operator) $\sigma: 2^E\to 2^E$ は，部分集合 $A$ に対して，$A$ に従属な要素から成る集合 $\sigma(A)$ を対応づける演算子と定義される．あるいはまた $\sigma(A)$ は集合 $A$ を含むような最小の閉じた集合であるということもできる．なおまた $\sigma(A)$ は，$A$ を含む集合のうちで $A$ と同じ階数をもつ最大の集合でもあり，部分集合$A$のスパン(span) と呼ばれることもある．$A$が閉じた集合であるということは，

$$A=\sigma(A) \qquad (2.\ 8)$$

であることと等価であることもわかる．また上に掲げた図2.9のグラフ $G$ の弧の例においては，$A=\{1,2\}$ あるいは $B=\{1,2,3\}$ に対して，

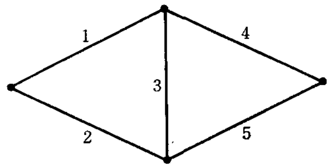



**図 2.9** グラフ $G$

$$\sigma(A)=\{1,2,3\}=B,\ \sigma(B)=B$$

となることが容易にわかるであろう．

閉包演算子 $\sigma$ を用いたマトロイドの公理を掲げよう．写像 $\sigma: 2^E\to 2^E$ は以下の条件を満たす時にマトロイド $M$ の閉包演算子と呼ばれる．$X, Y\subseteq E$ であって，$x, y\in E$ であるとする．

(S1) $X\subseteq\sigma(X)=\sigma(\sigma(X))$.

(S2) $Y\subseteq X\subseteq E$ ならば $\sigma(Y)\subseteq\sigma(X)$.

(S3) $y\notin\sigma(X)$ かつ $y\in\sigma(X\cup\{x\})$であるならば，$x\in\sigma(X\cup\{y\})$.

いま$\sigma$を$E$の任意の部分集合 $A$ に対して $A$ に従属な要素から成る集合を与えるる閉包演算子とすると，$\sigma$が上の (S1), (S2), (S3) を満たすことは以下のようにして示される．まず(S1)に関しては，前半は $\sigma(X)$の定義から明らかである．後半は，$E$ の部分集合 $X$ に含まれる最大の独立集合を $I_X$ とすると，$I_X$ は $\sigma(X)$ の中の最大の独立集合でもあるので，$\sigma(\sigma(X))=\sigma(I_X)=\sigma(X)$ となることによって示される．(S2)は明らかであろう．(S3)に関しては，いま $y\notin\sigma(X), y\in\sigma(X\cup\{x\})$ であってかつ $x\notin\sigma(X\cup\{y\})$とすると矛盾が生ずることを示そう．つまりこれらの仮定からそれぞれ，

$$\rho(X\cup\{y\})=\rho(X)+1 \qquad (2.\ 9)$$

$$\rho(X\cup\{x\}\cup\{y\})=\rho(X\cup\{x\}) \qquad (2.10)$$

$$\rho(X\cup\{y\}\cup\{x\})=\rho(X\cup\{y\})+1 \qquad (2.11)$$

となるので，(2.9)と(2.11)から，

$$\rho(X\cup\{y\}\cup\{x\})=\rho(x)+2$$

が得られ，これと(2.10)から，

$$\rho(X\cup\{x\})=\rho(X)+2$$

となり矛盾が生ずる．

さて次に，演算子 $\sigma$ が上の (S1), (S2), (S3) を満足するような関数であるとした場合に，それを用いて定義される独立性の概念が前の2.1節で与えたマイロイドの独立性の公理を満たしていることを示そう．これによって閉包演算子 $\sigma$ を用いた公理系 {(S1), (S2), (S3)} がこれまでに紹介したマトロイドの公理系と等価であることが示されることになる．演算子$\sigma$によって定義される独立集合族を，これまでの独立集合族 $\mathcal{I}$ と区別するために，$\sigma$-独立($\sigma$-independent)な集合の族として $\mathcal{I}(\sigma)$ と表記

しよう．$E$ の部分集合 $X$ が $\sigma$-独立である，つまり $X\in\vartheta(\sigma)$ とは，$X$ に含まれるすべての要素 $x\in X$ に対して，$x$ が $X\backslash\{x\}$ の閉包に含まれないことである．つまり以下のように書くことができる．

$$X\in\vartheta(\sigma)\Leftrightarrow[\forall x\in X\Rightarrow x\notin\sigma(X\backslash\{x\})] \qquad (2.12)$$

(I1)$\phi\in\vartheta(\sigma)$ は自明である．(I2) は $X\in\vartheta(\sigma), Y\subseteq X$ として，$Y\notin\vartheta(\sigma)$ とすると矛盾が生ずることを示そう．$Y\notin\vartheta(\sigma)$ であるから，$y\in Y$ に対して $y\in\sigma(Y\backslash\{y\})$ となる要素 $y$ が存在する．したがって(S2)より $y\in\sigma(X\backslash\{y\})$ となり，$X\in\vartheta(\sigma)$ に矛盾する．(I3)に関しては，代わりに(I3′)が満たされることを以下の2つの補題によって示そう．

**補題 2.4** 集合 $E$ の部分集合 $A$ に対して，$A$ に含まれる最大の $\sigma$-独立な集合を $I_A$ とすると，$\sigma(I_A)=\sigma(A)$ である．

**証明** まず $A\subseteq\sigma(I_A)$ を示す．そうでないとすると要素 $a\in A\backslash\sigma(I_A)$ が存在して，$I_A\cup\{a\}$ は $\sigma$-独立となる．なぜならば $I_A\cup\{a\}$ が $\sigma$-独立でないとすると，要素 $b\in I_A$ が存在して $b\in\sigma(I_A\cup\{a\}\backslash\{b\})$ となるので，$b\notin\sigma(I_A\backslash\{b\})$ から (S3) を用いると $a\in\sigma(I_A\backslash\{b\}\cup\{b\})=\sigma(I_A)$ となり矛盾が生ずるからである．したがって $I_A\cup\{a\}$ が $\sigma$-独立となり，$I_A$ が最大であることに反する．$A\subseteq\sigma(I_A)$ から(S1),(S2) を用いると，$\sigma(A)\subseteq\sigma(\sigma(I_A))=\sigma(I_A)$．また一方では $I_A\subseteq A$ より $\sigma(I_A)\subseteq\sigma(A)$ であるから両者は等しくなり，$\sigma(I_A)=\sigma(A)$ が得られる．☒

**補題 2.5** 集合 $E$ の部分集合 $A$ に対して，$A$ に含まれる最大の $\sigma$-独立な集合の要素数は等しい．

**証明** いま $A$ に含まれる最大の $\sigma$-独立な集合を $U,V$，かつ $|U|<|V|$ とし，さらに $|U\cap V|$ が最大となるようにとられているとする．この時 $U\nsubseteq V$ であるから，要素 $v\in V\backslash U$ をとり $D=\sigma(U\backslash V)$ とする (図2.10参照)．$D\subsetneq\sigma(A)$ であるから，$U$ の要素 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ を $V\backslash\{v\}$ に追加していくと，ある $k$ に対して，

$$\sigma((V\backslash\{v\})\cup\{u_1\}\cup\cdots\cup\{u_k\})=\sigma(A) \qquad (2.13)$$

(ただし $\sigma((V\backslash\{v\})\cup\{u_1\}\cup\cdots\cup\{u_{k-1}\})\subsetneq\sigma(A)$ とする．)

が成立する．この追加のプロセスは $|U|$ の有限性および $\sigma(U)=\sigma(A)$ (補題2.4)から有限となる．

集合 $V'=(V\backslash\{v\})\cup\{u_k\}$ を考えてみよう．集合 $V'$ が $\sigma$-独立でないとすると，

$$u_k\in\sigma(V\backslash\{v\}) \qquad (2.14)$$

かあるいは要素 $v'\in V\backslash\{v\}=W$ に対して，

$$v'\in\sigma((W\backslash\{v'\})\cup\{u_k\}) \qquad (2.15)$$

でなければならない．ところが(2.13)と(2.14)は，$\sigma(V\backslash\{v\})\subsetneq\sigma(A)$ より矛盾する．したがって (2.14) はあり得ない．(2.15) に関しては，$v'\notin\sigma(W\backslash\{v'\})$ であるから

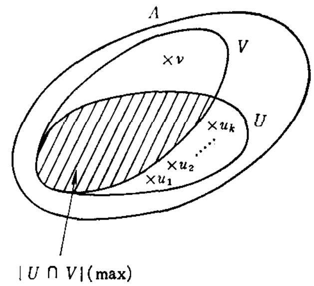



**図 2.10**

($W$ は $\sigma$-独立)，(S3) を用いると $u_k\in\sigma((W\backslash\{v'\})\cup\{v'\})=\sigma(W)=\sigma(V\backslash\{v\})$ となり矛盾が生ずる．以上から $V'$ が $\sigma$-独立であることが示された．これは $|U\cap V'|>|U\cap V|$ を意味するので，$U,V$ の選び方に矛盾する．したがって任意の部分集合 $A\subseteq E$ に含まれる最大の $\sigma$-独立な集合は，すべて同じ要素数を有することになる．☒

このようにして (S1),(S2),(S3) を満たす閉包演算子の公理がマトロイドの独立性の公理と等価であることが示された．ここで任意の要素 $e\in E$ が部分集合 $A\subseteq E$ の閉包の要素であることを特徴づける定理を紹介しよう．

**定理 2.6** マトロイド $M$ において $E$ の要素 $e$ が集合 $A\subseteq E$ の閉包に属しているための必要十分条件は，$e\in A$ であるかあるいは $M$ のサーキット $C$ が存在して $C\backslash A=\{e\}$ となることである．

前章に紹介したグラフ上の弧の集合を対象とし，閉路を含まない弧の集合を独立集合とするマトロイドを考えれば，上の定理の意味は容易に理解されるであろう．たとえば図2.11のグラフにおいて $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{1,2,5\}$ とする．この時 $A$ の閉包は $\sigma(A)=\{1,2,3,4,5\}$ で与えられるので，閉路 $C_1,C_2$ をそれぞれ $C_1=\{1,2,4\}$，$C_2=\{2,3,5\}$ とするとグラフの弧 $e$ が $\sigma(A)$ に含まれることを次のように表わすことができる．

$$e\in\sigma(A)\Leftrightarrow$$
$$[e\in A \text{ あるいは } e\in C_1\backslash A \text{ あるいは } e\in C_2\backslash A].$$

マトロイドの公理系は，これまでに紹介した以外にもスパン族によるもの，超平面族によるものなど数多くが

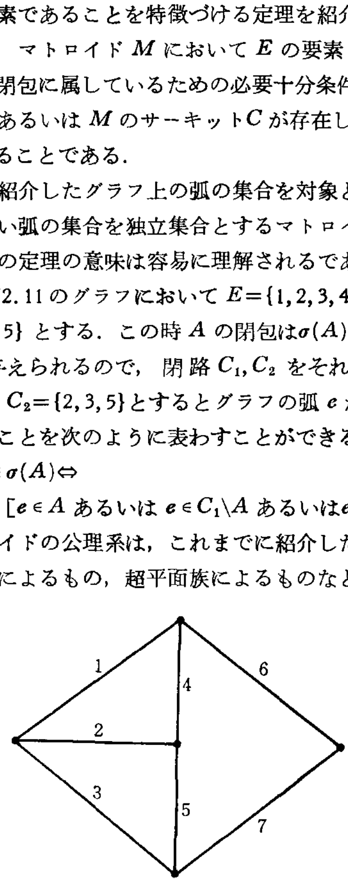



**図 2.11**

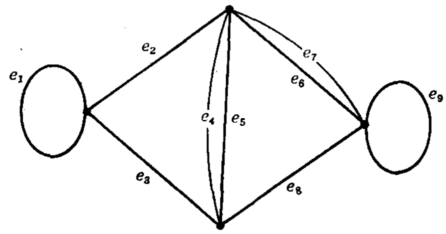



図 2.12　グラフ

存在する．これらの公理系を詳細に紹介することは本稿の目的ではないので，ここでは省略する．公理系の詳細に関しては，たとえば［4］（前回参考文献）などを参照されたい．マトロイドに関する理論と応用を含めてよく用いられる概念を2つ紹介しよう．1つはマトロイドのループ(loop)であって，要素 $e$ がそれだけで従属な集合である時に要素 $e$ はループをなすと言われる．前に紹介したグラフの弧の集合上のマトロイドについては，図2.12にあるように弧 $e_1, e_9$ がそれぞれループである．なおループをなす要素 $e$ に対してマトロイドの階数関数 $\rho$ が $\rho(\{e\})=0$ を満たすことは明らかであろう．

もう1つの概念として，集合 $E$ 上の2つの要素 $e_i, e_j$ が平行(parallel)であるとは，2つの要素のそれぞれはループではないが，$\{e_i, e_j\}$ は従属な集合である場合を言う．この時階数関数に関しては，$\rho(\{e_i, e_j\})=1$ となる．図2.12のグラフの弧を対象とした前述のマトロイドにおいては，$\{e_4, e_5\}$ および $\{e_6, e_7\}$ がそれぞれ平行な要素の集合であることも明らかであろう．

## 昭和55年度論文審査委員

昨年度投稿論文の審査委員は次の方々でした．本学会論文誌のレベルを維持するために多大のご貢献をいただいたことを厚くお礼申し上げます．（編集委員会）

阿部　統，阿部　俊一，伊理　正夫，飯田　孝久，生田　誠三，石井　博昭，茨木　俊秀，岩本　誠一，内田　富夫，江藤　肇，小河原正己，大野　勝久，岡本　吉晴，奥野　忠一，加地　郁夫，加藤　直樹，加藤　豊，加納　悟，金子　守，木瀬　洋，古林　隆，坂口　実，阪田省二郎，逆瀬川浩孝，沢木　勝茂，嶋田　正三，島　公脩，鈴木　和幸，鈴木　光男，鈴木　武次，田辺　国士，田畑　吉雄，高橋　磐郎，高橋　幸雄，高橋　豊，竹内　啓，刀根　薫，中川　覃夫，中村　義作，中村善太郎，中森真理雄，鍋島　一郎，西田　俊夫，西村　彰一，西関　隆夫，橋田　温，鳩山由紀夫，伏見　正則，藤沢　武久，古川　長太，真壁　肇，牧野　都治，松田　武彦，三根　久，宮原　秀夫，武藤　滋夫，森村　英典，柳井　浩，山下　浩，山本　芳嗣，山本　正明，山田　敬吾，吉田　照彦，河合　一

## 昭和56年度役員・委員・幹事

本学会の昭和56年度役員・委員・幹事は次の方々です．

**役員**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 会長 | 松田　武彦 | | |
| 副会長 | 今川　貞郎 | 本告　光男 | 渡辺　浩 |
| 庶務 | 川野幸三郎 | 浜　民夫 | 柳井　浩 |
| 会計 | 中井　直男 | | |
| 編集 | 伊理　正夫 | 小林　竜一 | |
| 研究普及 | 池田　孝 | 古林　隆 | |
| 国際 | 高森　寛 | | |
| 無任所 | 青沼　龍雄 | 飯原　慶雄 | 新沢　雄一 |
| 監事 | 名和小太郎 | 宮川　公男 | |

**編集委員会〔OR誌担当〕**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 委員長 | 小林　竜一 | 副委員長 | 村越　稔弘 |
| 委員 | 生田　誠三 | 大江　秀和 | 長田　洋 |
| | 木村　興治 | 佐々木浩二 | 城　信雄 |
| | 藤川洋一郎 | 山下　達哉 | 横山　和夫 |
| | 渡辺　健 | | |
| 幹事 | 荒木　勉 | 藤井　一郎 | 堀　良 |

**〔論文誌担当〕**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Editor | 伊理　正夫 | | |
| Associate Editor | 阿部　俊一 | 大山　達雄 | 今野　浩 |
| | 若山　邦紘 | | |
| Advisory Board | 青木　兼一 | 五十嵐日出夫 | 出居　茂 |
| | 佐々木　綱 | 斉藤　嘉博 | 千住　鎮雄 |
| | 竹内　清 | 竹内　啓 | 西田　俊夫 |
| | 古川　長太 | 松田　武彦 | 三根　久 |
| | 宮川　公男 | 本告　光男 | 渡辺　浩 |

**研究普及委員会**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 委員長 | 本告　光男 | | |
| 理事 | 池田　孝 | 古林　隆 | |
| 委員 | 荒木　睦彦 | 飯田　孝久 | 大山　達雄 |
| | 小出　治 | 茂原　一洋 | 神保　雅一 |
| | 高井　英造 | 高瀬　賢一 | 寺野　隆雄 |
| | 松田　寿子 | 武藤　滋夫 | 山本　芳嗣 |

**IAOR委員会**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 委員長 | 岡本　吉晴 | | |
| 委員 | 上田　徹 | 大山　達雄 | 川嶋　弘尚 |
| | 小島　政和 | 中森真理雄 | |
| **庶務幹事** | 浦谷　規 | 坂内　広蔵 | 平野　和夫 |
| **会計幹事** | 丹羽　明 | 山口　俊和 | |
| **国際幹事** | 伏見　正則 | | |