

ペトリネットについて (2)

篠沢 昭二・松島 俊章

PNを解析する目的は、それによりモデル化された被対象システムの検証を行なうことであり、システム設計において重要である。

本号では、PNの基本的な解析手法である到達可能木 (reachability tree) [1], 標号機械 (token machine; 以下TMと略す) [2], および線形代数手法[3]について述べることにする。

5. 到達可能木, TMによるPNの解析

PNの性質は、その到達可能集合を知ることにより、明らかにできることが多い。しかし、到達可能集合は、しばしば無限個の刻印の集合となることがあり、また、その集合の要素である刻印間の関係を明確にしておらず、取扱いが不便である。

到達可能木は、到達可能集合の有限な木構造記述であり、到達可能集合の要素である刻印間の相互関係を表現している。到達可能木において、その木の節点 (node) は、PNの到達可能な刻印を表わしており、木の枝は、1つの刻印から他の刻印への直接到達可能性を表わしている [4]。また、通常、木の開始節点 (root) には、初期刻印 M_0 を置く。図3に、図2のPNの到達可能木を示す。図3において、節点を結ぶ矢印は、矢印の終点の刻印が、矢印の起点の刻印から直接到達可能であることを表わしている。たとえば、刻印 M_3 は、転位 t_3 の発火により、刻印 M_2 から直接到達可能であることがわかる。

さて、到達可能木は、無限個の要素を含む到達可能集合についても、有限の木構造記述ががされ

なければならない。このような場合、到達可能木の記述に当り、次のような“任意に大きな数” ω を定義し、使用する [5]。すなわち、

$$\omega \pm a = \omega$$

$$a < \omega$$

そして、開始節点から直接到達可能な刻印を順次書き加えてゆくと、新たに書き加えられる刻印が、開始節点からその刻印までの経路に現われる刻印より大きい+

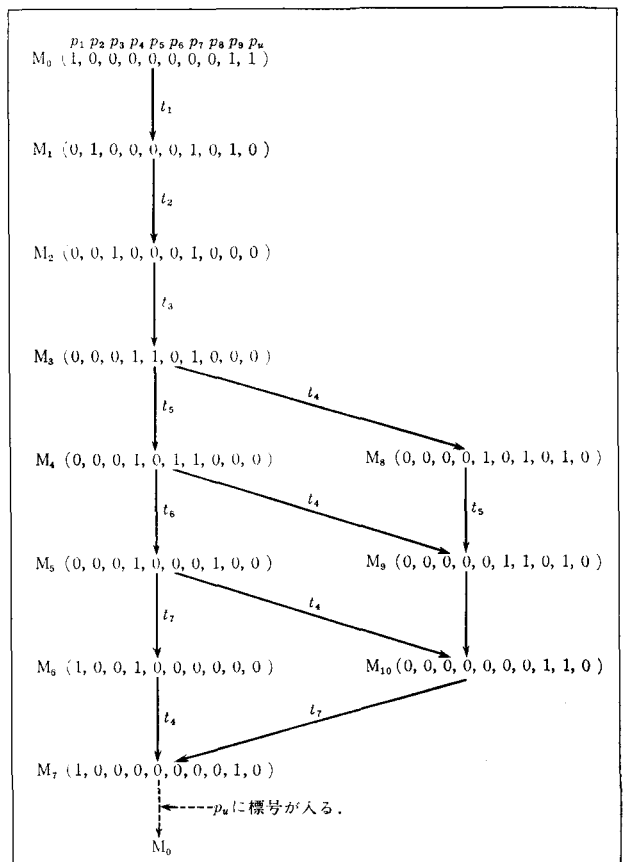


図3 図2のPNの到達可能木

しのざわ しょうじ 日本電気 情報処理営業支援本部

まつしま としあき 日本電気 伝送通信事業部

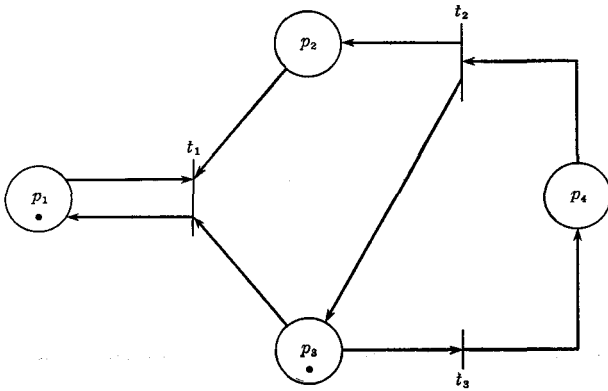


図 4 無限個の到達可能な刻印をもつPNの例 [初期刻印 $M_0=(1,0,1,0)$]

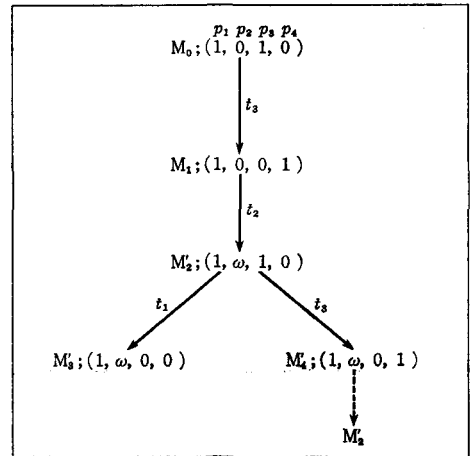


図 5 図 4 の PN の到達可能木

とき、その刻印の成分のうちで大きい部分を ω に置き換えて記述する。このことを、図 4 [5] の PN の到達可能木を例にとって示すことにしよう。図 4 の PN において、初期刻印 (開始節点) を、 $M_0=(p_1, p_2, p_3, p_4)=(1, 0, 1, 0)$ としたとき、 M_0 から直接到達可能な刻印は、 t_3 の発火による $M_1=(1, 0, 0, 1)$ のみである。次に、 M_1 から直接到達可能な刻印は、 t_2 の発火による $M_2=(1, 1, 1, 0)$ であるが、 $M_2 > M_0$ であり、 M_2 の第 2 成分が、 M_0

の第 2 成分より大きいので、これを ω に置き換えて、 $M_2'=(1, \omega, 1, 0)$ と表記する。このようにして記述した図 4 の到達可能木を、図 5 に示す。図 5 において、刻印 M_3' から直接到達可能な刻印は存在せず、したがって M_3' は、終了節点となっている。

一方、到達可能木は、PN を解析するうえでの有用な情報を含んでいる。まず、到達可能木において、その節点の刻印の成分に、 ω が含まれていないならば、その PN は有界である。これは、 ω が任意に大きな数となることから明白であろう。たとえば、図 3 の到達可能木には、 ω を含む節点がないので、図 2 の PN は有界であることがわかる。しかるに、図 5 の到達可能木は ω を含む節点をもつため、図 4 の PN は有界でなく、また当然保存的でもない。

また、到達可能木より、PN の活性や停滞を読み取ることができる。図 3 の到達可能木において、刻印 M_7 の p_u に標号が置かれると、転位 t_1 が発火可能な刻印 M_0 に復帰し、いわゆる“行き止まり”がない。すなわち、図 2 の PN は、 p_u に標号が置かれる限り、停滞が生じないことがわかる。一方、図 5 においては、 M_3' から直接到達可能な刻印は存在せず、“行き止まり”となっており、図 4 の PN が、停滞を生ずることを示している。

以上のように、到達可能木は、PN の解析に非常に有効であり、もとのシステムの特性を考察する有力な手段である。しかしながら、一般に、システムが複雑になり、それを記述した PN が複雑になるにしたがい、到達可能木は指数的にその複雑度を増し、木そのものも大きくなってしまふ欠点をもっている。

TM は、PN の刻印を 1 つの状態と考え、PN のとり得るすべての状態と、それら状態間の遷移を表わす状態機械であり、到達可能木と同じく木構造で記述される。

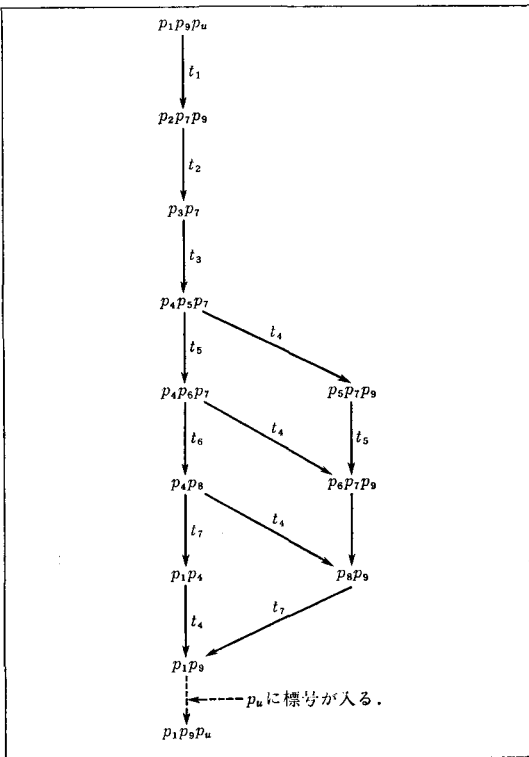


図 6 図 2 の PN の TM

図2のPNに対するTMを、図6に示す。図6からも明らかのように、TMはPNが有界である限り、到達可能木と本質的に異なることはないが、PNが有界でないとき、到達可能木において定義した“ ω ”のような表記法がないため、有限な記述とはなり得ない。また、到達可能木と同様に、TMもPNの解析に有効である。

6. 線形代数によるPNの解析

PNを解析するとき、前述の到達可能木やTMは有用であるが、PNが複雑になるにしたがい、到達可能木やTMも複雑となり、取扱いが容易でなくなってしまう。

一方、PNの解析のために、以下に述べる線形代数手法[3][6][7]を用いることができる。この線形代数手法は、PNが複雑になるにしたがい計算量は増すが、定形的な算法によるPNの解析が行なえる利点をもっている。

まず、式(1)で定義される生起行列 (incidence matrix) C を導入する。

$$C = (c(t_j, p_i)) \quad (1)$$

ここで、

$$c(t_j, p_i) = \begin{cases} 1 & p_i \in O(t_j), p_i \notin I(t_j) \text{ のとき} \\ -1 & p_i \in I(t_j), p_i \notin O(t_j) \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

また、 $t_j \in T(1 \leq j \leq |T|)$

$p_i \in P(1 \leq i \leq |P|)$

この生起行列 C と、前号で述べた発火度 $\bar{\sigma}$ を用いると、初期刻印 M_0 から到達可能な刻印の集合 $R(M_0)$ に属する任意の刻印 M は、状態方程式(2)で表わされる。

$$M = M_0 + C^t \bar{\sigma} \quad (M \in R(M_0), M \geq 0) \quad (2)$$

ここで、 C^t は C の転置行列。

式(2)の両辺に左方から、成分数 $|P|$ の行ベクトル x^t を掛けると、次の式(3)を得る。

$$x^t M = x^t M_0 + x^t C^t \bar{\sigma} \quad (3)$$

ここで、 $Cx = 0$ とすると、 $x^t C^t = 0$ であるから、次の式(4)が成り立つ。

$$x^t M = x^t M_0 = \text{定数} \quad (4)$$

式(4)はPNの到達可能な刻印についての不変の関係を表わしており、 $Cx = 0$ の解ベクトル x を p -循環 (p -cycle) という。また、 p -循環の中で、すべての成分が非負である p -循環を、 p -回路 (p -circuit) といい、すべての成分が正である p -回路を、完全 p -回路 (complete p -circuit) と呼ぶ。完全 p -回路が存在するとき、そのPNは、不変 (invariant) であるという。

同様に、 $C^t y = 0$ の解となる成分数 $|T|$ の整数ベクトル y を、 t -循環 (t -cycle) と呼び、 t -循環の中で、すべて

の成分が非負である t -循環を、 t -回路 (t -circuit) といい、すべての成分が正である t -循環を、完全 t -回路 (complete t -circuit) と呼ぶ。

いま、ある刻印 M から到達可能な任意の刻印 M' が、発火度 $\bar{\sigma}$ を用いて、

$$M' = M + C^t \bar{\sigma} \quad (5)$$

と表わされているとき、 $\bar{\sigma}$ が t -循環ならば、 $C^t \bar{\sigma} = 0$ であり、 $M' = M$ となる。これは、発火列 σ により元の刻印にもどる循環発火列を意味している。あるPNに関し、完全 t -回路が存在するとき、そのPNは、無矛盾 (consistent) であるという。

次に、上述の不変性、無矛盾性と、PNの有界性、活性との関係を明らかにする重要な定理を掲げておく。

<定理 1>

PNが不変であるための必要条件は、PNが有界であることである。(証明略)

これは、あるPNが完全 p -回路 x_c をもつとき、初期刻印 M_0 から到達可能な刻印 M に関し、 $x_c^t M = k_0 (k_0$ は有限な自然数) が、必ず成り立つことを示している。

<定理 2>

PNが有界かつ活性であるための必要条件は、PNが無矛盾なことである。(証明略)

これは、PNが有界かつ活性ならば、循環的かつ完全 t -回路の定める完全発火列 $\dagger\dagger$ が存在することを示している。なお、この定理において、無矛盾性が、PNが有界かつ安全であるための十分条件ではないことに注意する必要がある。

一方、刻印の到達可能性に関し、次の定理がある。

<定理 3>

ある刻印 M が初期刻印 M_0 から到達可能であるための必要条件は、式(6)が成り立つことである。(証明略)

$$BM = BM_0 \quad (6)$$

ここで、 B は、列数 n 階数 r なる生起行列 C に関する方程式 $Cx = 0$ の基本解より構成される $(n-r)$ 行 n 列の行列である $\dagger\dagger$ 。

定理3における式(6)は、 M が M_0 から到達可能であるための必要条件であり、十分条件ではないことに、注意しなければならない。

定理1、定理2、および定理3に示した包含関係を、図7に示す。

図7からも明らかのように、不変性や無矛盾性を調べることが、十分条件を調べてはいないが、PN解析に有効であるといえる。なぜならば、少なくともこれらが満たされていないならば、そのPNは、活性でないかあるいは有界でないのであるから。また、PNの記述に制限を加えることにより、そのPNの有界性や活性に対する必

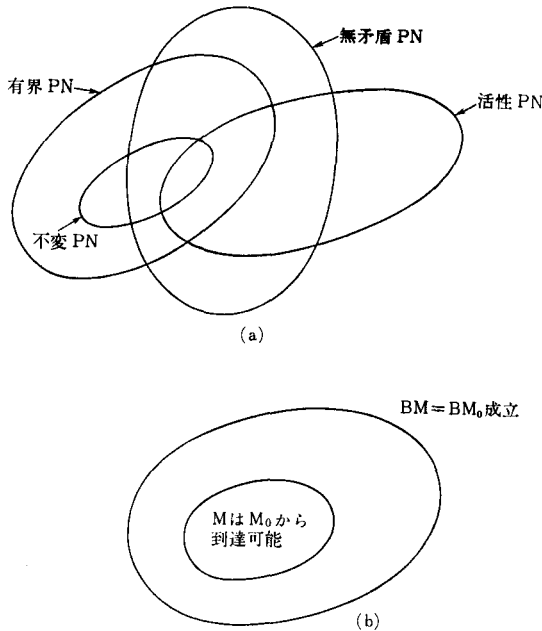


図7 定理1, 定理2および定理3を示す集合関係

要十分条件を見出すことも可能である。

付録に、図2のPNに関する生起行列等を掲げておくので参考にされたい。

7. PNの解析によるシステムの検証法

システムをPN記述する目的は、元来、そのシステムの構造を把握しやすくすると同時に、PNモデルによりシステムに不都合や誤りがないか否かを検証することである。

記述したPNを、前述の解析手段により解析し、もとのシステムを検証する一般的な手順を、図8に示す[2]。図8は、時間条件をも考慮しなければならないシステムを取り扱う場合も想定し、転位の発火に時間条件が付加されたTPN(前号参照)でシステムを記述し、それを解析する手順を示している。

システムのPN記述、解析の具体例、および発火時間条件の考察については、次号で詳しく述べることにする。(以下次号)

参考文献

- [1] T. Agerwala : Putting Petri Nets to Work, Vol. 12, No. 12, pp. 85-94, Dec. 1979
(邦訳) 応用分野が広がるペトリ・ネットの現状, 日経エレクトロニクス1980.6.9. pp. 146-169

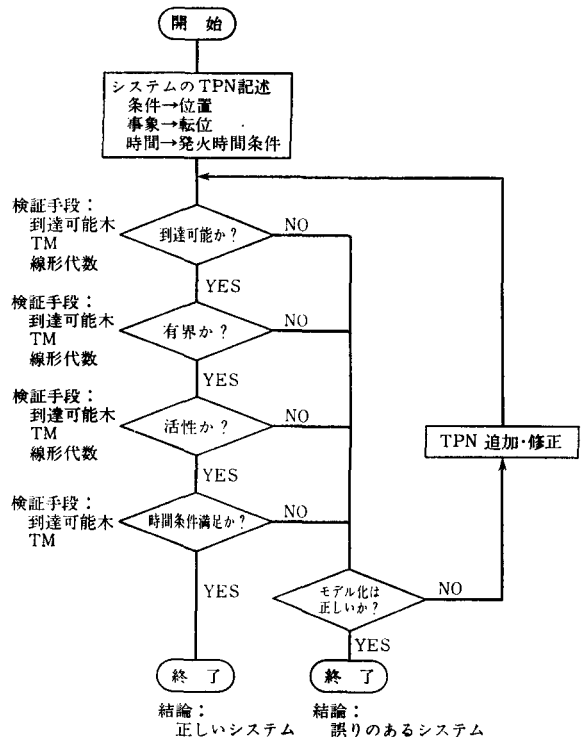


図8 システムの検証手順と検証手段

- [2] P. M. Merlin : A Methodology for the Design and Implementation of Communication Protocols, *IEEE Trans. on COM*, Vol. COM-24, No. 6, pp. 614-621, June 1976
- [3] P. Azema, B. Berthomieu, P. Decitre : The Design and Validation By Petri Nets of a Mechanism for the Invocation of Remote Servers, *Proc. IFIP*, pp. 599-604, 1980
- [4] R. M. Karp, R. E. Miller : Parallel program schemata, *J. Computer and Systems Science* 3, 4, pp. 167-195, May 1969
- [5] J. L. Peterson : Petri Nets, *Computing Surveys*, Vol. 9, No. 3, pp. 223-252, Sept. 1977
- [6] K. Lautenbach, H. A. Schmid : Use of Petri Nets for Proving Correctness of Concurrent Process Systems, *Proc. IFIP Congress 74*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, The Netherlands, 1974, pp. 184-191
- [7] T. Agerwala, M. Flynn : Comments on Capabilities, Limitations and "Correctness" of Petri Nets, *Proc. First Ann. Symp. Com-*

puter Architecture, ACM, N. Y., 1973, pp. 81-86

(付録)

図2のPN解析のための線形代数(簡単のため p_u は略す)

生起行列

$$C = \begin{matrix} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 \\ \begin{matrix} C=t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$n_1(C \text{ の列数})=9$

$r_1(C \text{ の階数})=6$

基本解: (n_1-r_1) 個 = 3 個

$x_1=(1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)^t$

$x_2=(0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^t$

$x_3=(0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0)^t$

p -循環

$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$

(a_1, a_2, a_3 ; 任意の整数)

p -回路

たとえば, 上記 p -循環中, $a_1=1, a_2=1, a_3=-1$ とすると,

$x=(1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)^t$ など.

完全 p -回路

たとえば, 上記 p -循環中, $a_1=2, a_2=1, a_3=-1$ とすると,

$x=(2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1)^t$ など.

行列 B

$$B = \begin{pmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

生起行列の転置行列

$$C^t = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 & t_7 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$n_2(C^t \text{ の列数})=7$

$r_2(C^t \text{ の階数})=6$

基本解: (n_2-r_2) 個 = 1 個

$y_1=(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^t$

t -循環, t -回路, 完全 t -回路

$y = b_1 y_1 (b_1; \text{任意の自然数})$

脚注

† 成分数の同じ2つのベクトル間で, 一方のベクトルの成分のいずれもが, 他方のベクトルの対応する成分より等しいかまたは大きいという意味である。たとえば, $M_1=(1, 1), M_2=(1, 0)$ のとき, M_1 は M_2 より大きい。

†† すべての転位が少なくとも1回は発火する発火列。

††† 列数 n , 階数 r の行列 C に関し, $Cx=0$ の解ベクトル (p 循環) x の中で, 解同士を加え合わせても得られない互いに素な解ベクトルは, $(n-r)$ 個存在し, その他の解ベクトルは, すべてこの $(n-r)$ 個の基本解の線形結合で表わされる。

● ミニ ● ミニ ● ● ○ ● R ●

ラインバランス

ある生産工場のコンサルティングを始めるようになってから, ラインバランスとか待ち行列が気になるようになった。ゴルフ場を工場に見立てると, 18台の装置をもった直列形の工程ということができる。1台の装置にショートホールで1組から, ロングホールで3組くらいまでのトランザクションを含むことが許され, トランザクションの処理時間はある範囲でバラつきのある確率事象としてとらえられる。

同じコースを何度か訪れた人は, ティーグラウンドで queue の発生しやすいホールはたいてい定まっていることに気がつくであろう。ホールごとのラインバランスの良いゴルフ場ということも, コース設計のひとつの評価と考えると良いのではなからうか。

ショートホールで, 球がグリーンに乗ったら後続組にティーショットを打たせるのは, 日本独特の習慣だそうだが, ラインバランスの点から見ると, うまい知恵だと言うことができよう。 (小野勝章)