マトロイド理論の基礎

大 山 達 雄

開講にあたって

“マトロイド(matroid)”という言葉が初めて用いられたのは1935年の H. Whitney の論文 “On the abstract properties of linear dependence” (*Amer. J. Math.*, Vol. 57, pp. 509–533) であろうと思われる．そこではベクトル空間における“独立性”の概念がより一般化された形として紹介され，マトロイド理論がこれまでに得られているベクトル空間における種々の分析あるいはグラフ理論における多くの結果の一般化としての役割を果たすきっかけを与えているということができる．H. Whitney 以来，マトロイドに関する研究は W. T. Tutte, J. Edmonds らをはじめとする数多くの研究者によって積極的に行なわれ，多くの研究結果が得られている．マトロイドの理論がグラフ理論，組合せ理論等における多くの分野でこれまでに得られた結果を統一的に説明し，さらにはより一般的な結果をも導出したという点で大きな貢献をしていることは事実である．ことに最近では，マトロイドに関連した概念や手法が有効に適用できる多くの実際的な問題が発見され，その応用上の価値も注目されている．より具体的には，オペレーションズリサーチの分野における典型的な問題としての割当問題あるいは輸送問題を一般化した独立フロー問題の解法アルゴリズムの開発，さらにはマトロイド理論の電気回路網理論，情報理論への応用などといった広範囲にわたる応用もなされつつある．

本講座においては，まずマトロイドの概念を紹介し，そのグラフ理論，ネットワーク理論，組合せ理論等との関連についても随時述べつつ，マトロイド理論においてこれまでに得られている基礎的結果の整理，紹介を行なう．

おおやま　たつお　埼玉大学

1. 序論

マトロイドに関する理論はベクトル空間における線形独立性 (linear independence) の概念の一般化として始まったが，その後の研究によってグラフ理論とも密接な関係を有していることが知られている．そこで本章では，マトロイドの公理，定義を与える前に，グラフ理論の分野においてよく知られている，あるいは容易に理解される事実であってかつマトロイドの概念と密接に関連しているものをいくつか紹介する．本章に掲げる例は，マトロイドがいかなる概念であるかの理解をするうえで役立つであろう．

グラフ理論における基本的な定義を与えよう．グラフは頂点(node)の集合 $N=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$注) と N の上の2項関係を表わす弧(edge)の集合 $E=\{(x_i, x_j)\mid x_i\in N, x_j\in N, 1\leqq i, j\leqq n\}$ とによって $G=(N, E)$ と表わされる．たとえば図 1.1, 1.2 にあるのはグラフの例である．

グラフ $G=(N, E)$ の各弧 $e\in E$ に対してその向きが定義されている場合にはグラフ G は有向グラフ (directed graph) と呼ばれ，また向きが無視されている場合には無向グラフ (undirected graph) と呼ばれる．したがって図 1.1 のグラフ G_1 は有向グラフ，図 1.2 のグラフ G_2

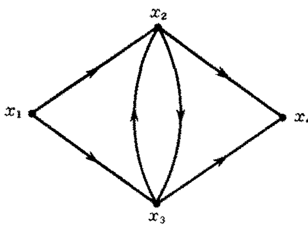

図 1.1　グラフ G_1

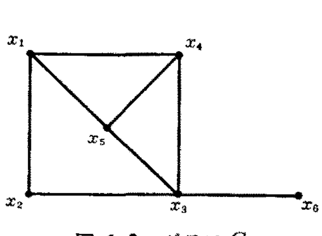

図 1.2　グラフ G_2

注) 以下において $e, f, g, \cdots$ を要素とする集合を $\{e, f, g, \cdots\}$ と表わすことにする．また集合 E に対して，$|E|$ は E に含まれる要素の数を表わすとする．したがってこの頂点の集合 N に関しては $|N|=n$ となる．

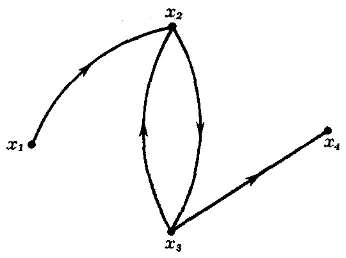

図 1.3 グラフG_1'

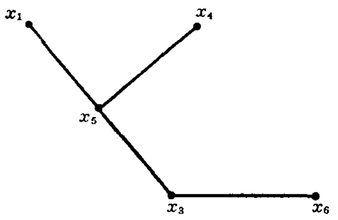

図 1.4 グラフG_2'

は無向グラフである．グラフ $G=(N, E)$ に対してグラフ $G'=(N', E')$ が G の部分グラフ(subgraph)であるというのは，$N' \subseteq N$ かつ $E' \subseteq E$ の場合をいう．なおこの場合 G' はグラフであるから，E' に属する弧に接続している頂点は V' に含まれていなければならない．たとえば図 1.3，1.4 のグラフ G_1'，G_2' はそれぞれ図1.1，1.2 のグラフ G_1，G_2 の部分グラフである．

頂点の集合 $N=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ と弧の集合 $E=\{(x_i, x_j) \mid x_i \in N,\ x_j \in N,\ 1 \leqq i,\ j \leqq n\}$ を有するグラフ $G=(N, E)$に対して，

$$x_{i_1},\ (x_{i_1}, x_{i_2}),\ x_{i_2},\ (x_{i_2}, x_{i_3}),\ x_{i_3}, \cdots,$$
$$(x_{i_{k-1}}, x_{i_k}),\ x_{i_k} \qquad (1.1)$$

のように頂点および弧を交互に並べた系列を頂点 x_{i_1} と頂点 x_{i_k} の間の道(chain, path)という．頂点 x_{i_1} と頂点 x_{i_k} との間に道が存在する時，これらの 2 頂点は連結(connected)しているという．無向グラフにおいて任意の 2 頂点が連結している時，そのグラフは連結であるといい，それ以外の場合には非連結 (disconnected) であるという．有向グラフにおいては，弧の向きを無視することによって得られる無向グラフが連結である場合にその有向グラフは連結であるといい，それ以外の場合には非連結であるという．たとえば図 1.5 のグラフ G_1 は連結であり，また図 1.6 のグラフ G_2 は非連結である．

グラフ $G=(N, E)$ の頂点 x_i，x_j に対して，「$x_i=x_j$ であるかまたは $x_i \neq x_j$ であって x_i と x_j が連結している」という関係を $x_i \equiv x_j$ と表わすと，この関係は以下の 3 条件を満足する．

(i) $x_i \equiv x_i$ (反射律)

(ii) $x_i \equiv x_j \Rightarrow x_j \equiv x_i$ (対称律)

(iii) $x_i \equiv x_j,\ x_j \equiv x_k \Rightarrow x_i \equiv x_k$ (推移律)

つまりこの関係は同値関係であることがわかる．したがってこの同値関係を用いると，グラフ Gの頂点の集合Nはいくつかの同値グループに分割される．これらの各同値グループは Gの連結成分 (connected component)と呼ばれ，Gの連結な部分グラフを生成する．たとえば図1.5のグラフは 1 つ，図1.6 のグラフは 2 つの連結成分をもっている．

グラフにおける閉路を定義しよう．閉路 (cycle) とは (1.1)式で与えられるような頂点x_{i_1}から頂点x_{i_k}への道において $x_{i_1}=x_{i_k}$ であってかつこの道に含まれる弧の列において同じ弧が 2 度以上現われない場合をいう．したがって図 1.5 のグラフ G_1 において道 x_1，(x_1, x_2)，x_2，(x_2, x_3)，x_3，(x_3, x_1)，x_1 は閉路であるが，もうひとつの道 x_1，(x_1, x_2)，x_2，(x_2, x_3)，x_3，(x_3, x_1)，x_1，(x_1, x_4)，x_4，(x_4, x_3)，x_3，(x_3, x_1)，x_1 は弧(x_1, x_3)が 2 度現われるので閉路とはいわない．

弧の集合Eを有するグラフGが与えられたとしよう．E の部分集合のうちで閉路を含まないような集合を“独立な(independent)集合”であると呼ぶことにする．つまり“独立な集合”とはグラフGの弧の集合のうちで閉路を含まないようなものである．この時，以下の性質(i)，(ii)が成立する．

(i) “独立な集合”の部分集合はすべて“独立”である．

(ii) I，Jがともに“独立な集合”であって，かつJの弧の数がIの弧の数より 1 だけ多いとすると，Jの弧のうちでIに含まれていない弧eをとると，$I \cup \{e\}$が“独立な集合”となるような弧eが存在する．

例を示そう．図 1.7 にあるようなグラフ Hを考える．

弧の集合を$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$とすると，集合$\{2, 4, 8\}$(集合は非連結でもよい)，$\{1, 4, 6, 7\}$あるいは$\{2, 3, 5, 6, 7\}$ などは閉路を含まないので“独立な集合”であ

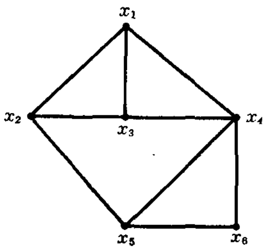

図 1.5 グラフ G_1

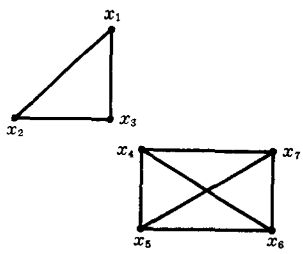

図 1.6 グラフ G_2

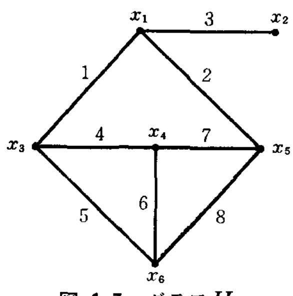

図 1.7 グラフH

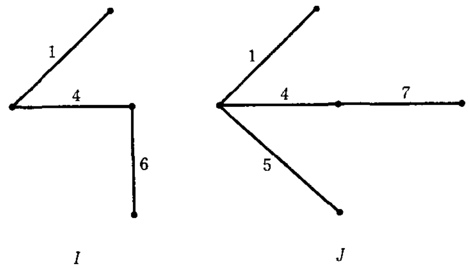

図 1.8 “独立な集合” I および J

る．そこで(i)が成立することは明らかであろう．(ii)については，たとえば $I=\{1,4,6\}$，$J=\{1,4,5,7\}$，つまり $|I|=3$，$|J|=|I|+1=4$としてみよう(図1.8)．なおここでは“独立な集合” I および J が図 1.8 にあるようにいずれも連結グラフとなっているが，これらは非連結でもかまわない．そこで J に含まれる弧 7 をとると，$I\cup\{7\}$ が“独立な集合”となることがわかる．また弧 5 をとると，$I\cup\{5\}$ の部分集合が閉路 $\{4,5,6\}$ を含むので“独立な集合”とはならない．性質(ii)においては，$I\cup\{e\}$ が“独立な集合”となるような弧 e(この例では弧 7 に相当) が J の中に常に存在するということが述べられていることに注意されたい．なお性質(ii)が任意のグラフにおいて成立することは，そのような弧 e が J の中に存在しないとすると $|J|>|I|$ より J は閉路を含むことになり“独立な集合”ではあり得ないことを示すことによって得られる．

図 1.7 のグラフ H において，たとえば集合$\{1,7,8\}$に含まれる弧をすべて除去すると，グラフは非連結になる．このようにその集合に含まれるすべての弧を除去するとグラフの連結成分の数は増加するが，その集合のどんな真部分集合に含まれる弧を除去しても連結成分の数は増加しないような弧の極小な集合をカットセット (cutset) という．したがってこのグラフ H においては，$\{1,2\}$，$\{1,4,6,8\}$ などはカットセットであるが，$\{1,2,3\}$，$\{1,4,6,7,8\}$などはカットセットとは呼ばれない．またカットセットのもうひとつの定義として，グラフ$G=(N,E)$の頂点の集合 N を 2つの部分集合 N_1, N_2 に分割した時 ($N_1\cup N_2=N$，$N_1\cap N_2=\phi$)，N_1 の頂点と N_2 の頂点を結ぶ弧の集合がカットセットであるとも言うことができる．たとえば図 1.7 のグラフ H のカットセット $\{1,7,8\}$ は頂点の集合 N を $N_1=\{x_3,x_4,x_6\}$，$N_2=\{x_1,x_2,x_5\}$に分割する弧の集合であることがわかる．

上述のグラフの弧の“独立な集合”の定義で用いた“閉路”のところを“カットセット”と置きかえてみよう．つまりグラフの弧の集合のうちでカットセットを含まない集合を“独立な集合”と呼ぶことにしよう．この場合にも上述の(i)，(ii)の性質が任意のグラフに対して成立する．図 1.7 のグラフHを考えてみよう．たとえば弧の集合$\{1,3,5,7\}$，$\{4,6,7,8\}$はいずれもそれぞれ $\{3\}$ あるいは $\{4,6,7\}$ なるカットセットを含んでいるので“独立な集合”ではない．一方$\{1,4,8\}$，$\{5,6,7\}$などはカットセットを含んでいないので，いずれも“独立な集合”である．また“独立な集合”として $I=\{1,7\}$，$J=\{1,4,8\}$ とすると，J に含まれる弧 4 をとることによって $I\cup\{4\}$ が“独立な集合”となり性質(ii)の成立が確かめられる．

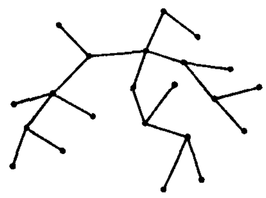

図 1.9

無向グラフ注1)における木，完全木を定義しよう．閉路を含まない連結グラフを木(tree)という．図 1.9 は木の一例である．いくつかの木の集まりは森(forest)と呼ばれる．閉路を含まない集合という意味で木が前述の“独立な集合”であることは明らかであろう．グラフの部分グラフであってかつそれ自身が木であるようなものをそのグラフの木という．あるグラフの木であってかつそのグラフのすべての頂点を含むものをそのグラフの完全木 (spanning tree)という．したがって連結成分 1 個から成るグラフGの部分グラフとしての完全木とは，閉路を含まない連結グラフであってかつGのすべての頂点を含むようなものである．たとえば図1.10(a)のグラフGに対しては，(b)，(c)にあるグラフはGの完全木であるが，(d)のグラフはGのすべての頂点を含んではいるもののグラフの木ではない(連結グラフでない)ので，G の完全木とはならない．

任意のグラフ G において，T_1，T_2 をいずれも G の完全木であるとすると，次の性質(i)が成立する．

(i) T_1 に含まれるいかなる弧 e に対しても，T_2 の弧fをとって$(T_1\backslash\{e\})\cup\{f\}$注2) (グラフ T_1 において弧 e と弧 f を置き換えたもの) がやはりGの完全木となるような弧 f が存在する．

グラフの完全木から任意の弧を除去すると，完全木は

注1) 以下では特に断わらない限り，グラフは無向グラフを意味するものとする．

注2) 集合 X，Y に対して記号 \ は $X\backslash Y=\{z\mid z\in X,\ z\notin Y\}$ なる X と Y の差集合を表わす．

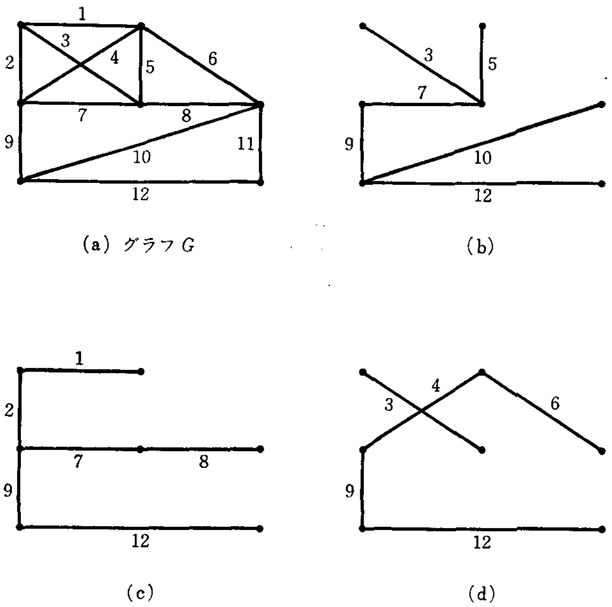

図 1.10

2つの木に分断される．つまり完全木に含まれる各弧に対応して，グラフ G の頂点集合がこれら2つの木の頂点から成る2つの部分集合に分割される．このことを考慮すると，上の完全木の性質(i)における弧 e と弧 f の対応が明らかになるであろう．図1.10(a)のグラフ G を考えてみよう．図1.10(b)，(c)にある G の完全木をそれぞれ T_1, T_2 とする．弧 $7\in T_1$ を T_1 から除くと，$(T_1\backslash\{7\})\cup\{2\}$ とすることによって新しい完全木が得られる．また弧10を T_1 から除くと，$(T_1\backslash\{10\})\cup\{8\}$ とすることによって新しい完全木が得られる．一方弧 $9\in T_1$ を T_1 から除くと，$(T_1\backslash\{9\})\cup\{9\}$ つまり T_2 に含まれる弧9を追加することになり，(i)において $e=f$ となる場合に相当する．

以上，グラフ理論におけるよく知られた事実を2例とりあげたが，これらはいずれも任意のグラフにおける弧の集合を対象としたマトロイドの例である．ここで紹介したそれぞれの概念の性質が，より一般的なものであることを利用してマトロイド理論が構成される．次章ではマトロイドの概念をより明確に数学的に定義しよう．

2. マトロイドの定義

2.1 独立集合，基底にもとづく公理

マトロイドは有限個の要素から成る集合に関するひとつの概念である．その満たすべき公理(定義)としては非常に多くの種類のものが与えられている．ここではそれらのうちの代表的なものをいくつかとりあげ，それらの間の等価関係について説明を加えることにする．

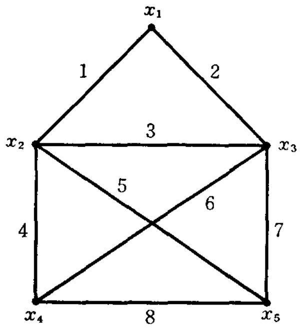

図 2.1 グラフ G

まず前章の最初に述べた“独立な集合”を用いた公理を紹介しよう．マトロイド(matroid) M は，有限集合 E と以下の$(I1)$，$(I2)$，$(I3)$を満足するような E の部分集合の族 $\mathscr{I}$ (独立集合 (independent set)の族という)の対$(E, \mathscr{I})$で表わされる．

$(I1)$　$\phi\in\mathscr{I}$．(ϕ は空集合を示す)

$(I2)$　$X\in\mathscr{I}$ であってかつ $Y\subseteq X$ であれば，$Y\in\mathscr{I}$．

$(I3)$　$U, V\in\mathscr{I}$ であってかつ $|U|=|V|+1$ であれば，$V\cup\{e\}\in\mathscr{I}$ を満足する要素 e が $U\backslash V$ の中に存在する．

したがって集合族 $\mathscr{I}$ を構成する要素は，E の部分集合のうちでマトロイドの独立集合なるものである．閉路をもたない弧の集合を“独立な集合”と定義した前章の例における性質(i)，(ii)が上の公理の$(I2)$，$(I3)$に対応することは明らかであろう．集合 E の部分集合のうちで $\mathscr{I}$ に含まれないもの，つまり独立集合でないものは従属集合(dependent set)と呼ばれる．特に極小な従属集合（それ自身は従属であるが，その真部分集合はすべて独立集合であるようなもの)はサーキット(circuit)と呼ばれる．したがって前章に紹介した最初の例では，グラフ G において閉路を含む弧の集合が E 上のマトロイドの従属集合であって，グラフの初等的な閉路（閉路を1周する際に，始点と終点以外は同じ頂点を2度通らないようなもの）そのものがマトロイドのサーキットと対応していることが容易に理解されるであろう．たとえば図2.1で与えられるグラフ G において，弧の集合 $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ に対して，E の部分集合のうちで閉路を含まない集合を独立集合と定義するマトロイド$(E, \mathscr{I})$を考える．この時図2.2(a)，(b)にある弧の集合 $E_1=\{3,4,5,6\}$ および $E_2=\{1,2,3,6,7,8\}$ はいずれもこのマトロイドの従属集合であるが，サーキットではない．集合 E_2 で与えられる閉路が G の初等的閉路でないことは，この閉路が同じ頂点 x_3 を2度通っていることから明らかであろう．一方図2.2(c)にある弧の集合 $E_3=\{3,4,6\}$

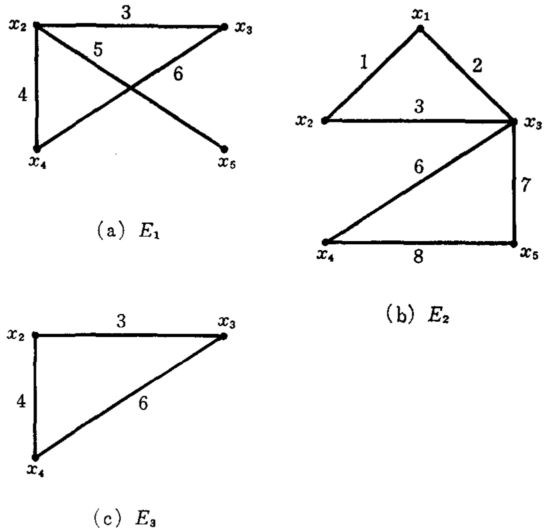

図 2.2

は従属集合であってかつサーキットである．

集合Eに含まれるマトロイドMの独立集合のうちで極大（その集合を含んでかつその集合より多くの要素数を有するものがない，したがって最大の要素数を有するという意味）なものはMの基底(base)と呼ばれる．前章の最初の例では，グラフGが連結グラフならば，完全木が弧の集合の上で定義されたマトロイドの基底である．

独立集合を用いたもうひとつのマトロイドの公理を紹介しよう．$(I1)$, $(I2)$は上述の公理と同様である．$(I3)$のかわりに以下の条件$(I3')$によってマトロイドを定義することも可能である．

$(I3')$ Eのいかなる部分集合Aに対しても，Aに含まれるすべての極大な独立集合は同一の個数の要素を有する．

なお上の$(I3')$に述べられた部分集合Aに含まれる最大の独立集合の要素の数は，集合Aの階数(rank)と呼ばれ，$r(A)$で表わされる．独立集合を用いた2種類のマトロイドの公理$(I1)$, $(I2)$, $(I3)$および$(I1)$, $(I2)$, $(I3')$が等価であることを示すことは容易である．まず$(I3)$を前提として$(I3')$が成立しないとすると，大きさの異なる極大な独立集合が存在することになる．したがって$(I3)$を用いると，少ない個数の要素から成る独立集合に別の独立集合に含まれる要素を加えることによってより大きな独立集合を作ることができるので，その極大性に矛盾する．また一方$(I3')$が成立することを前提としてみよう．この時$(I3)$にあるように$U, V\in\mathscr{I}$であってかつ$|U|=|V|+1$とする．いま$U\cup V$なる集合を考えると，$(I3')$よりこの集合に含まれる極大な独立集合は同一個数の要素を含む．したがって要素$e\in U\cup V$が存在して$|V\cup\{e\}|=|U|$を満足するので，$(I3)$が成立する．このようにして条件，$(I3)$, $(I3')$間の等価性が得られる．

前章のグラフGにおける完全木の例で紹介した特性を用いたマトロイドの公理について述べよう．この公理はマトロイドの基底を用いた公理と呼ばれるものであって，そこではマトロイドMは，有限な集合Eと，以下の$(B1)$を満足するようなEの部分集合の族$\mathscr{B}$（基底の集合族と呼ばれる）との対$(E, \mathscr{B})$として表わされる．

$(B1)$ $B_1, B_2\in\mathscr{B}$であってかつ要素$e\in B_1\backslash B_2$であるならば，$f\in B_2\backslash B_1$であって，かつまた$B_1\cup\{f\}\backslash\{e\}\in\mathscr{B}$となるような要素$f$が存在する．

さて独立集合を用いたマトロイドの公理と基底を用いた公理との関連について考えてみよう．まず独立集合を用いた公理$(I3)$を用いると，より一般的な形として次の定理が容易に得られる．

定理 2.1 Eの部分集合X, Yがともにマトロイドの独立集合であってかつ$|X|<|Y|$であるならば，$Z\subseteq Y\backslash X$に対して，$X\cup Z$が独立で$|X\cup Z|=|Y|$となるような集合Zが存在する．

独立集合Yの部分集合のうちでXの要素数よりも1つだけ多くの要素を有するものをとり，公理$(I3)$を適用すると，独立性を保ちながらXに要素を追加することができる．この操作をくり返し行なうことによって上の定理が得られることが理解されよう．またこの定理からは，マトロイドのすべての基底を構成する要素数が等しいことも容易に得られる．

定理2.1の結果を公理$(B1)$における$B_1\backslash\{e\}$, B_2に適用すると$(B1)$は容易に得られるので，公理$(I1)$, $(I2)$, $(I3)$から基底公理$(B1)$が導出されたことになる．逆に基底公理を前提とすると，独立集合族を基底の部分集合の族と考えることによって独立集合の公理が以下のようにして得られる．$(I1)$, $(I2)$は単純であるので$(I3)$のみを考えることにする．U, Vをそれぞれ基底B_u, B_vの部分集合とし，$B_u=U\cup U_B$, $B_v=V\cup V_B$（ただし$U\cap U_B=\phi$, $V\cap V_B=\phi$）を満たすものとする．この時$|U|=|V|+1$とすると，U_B, V_Bの定義から$|U_B|+1=|V_B|$となる．そこでB_uと$B_v\backslash\{v_1\}$, $v_1\in V_B$, に対して公理$(B1)$を適用すると，$u_1\in B_u$で$(B_v\backslash\{v_1\})\cup\{u_1\}\in\mathscr{B}$を満たす要素$u_1\in B_u$が存在する．$u_1\in U$であれば$V\cup\{u_1\}\in\mathscr{I}$となり$(I3)$が得られたことになる．$u_1\notin U$の場合には，上の操作をさらに追加的にくり返すことによって，次々と新しい$u_i\in V_u$, $v_i\in B_v$, $i=1,2,\cdots$, が得られる．そこで$|V_B|<|U_B|$であるから，すべての$v_i\in V_B$, $i=1,2,\cdots,|V_B|$, が終了する以前にいずれかのu_iが$u_i\in U$を満たさなければならない．このようにして

$V \cup \{u_i\} \in \mathscr{I}$, $u_i \in U$, が得られ$(I3)$が満たされる．以上から独立集合を用いた公理$(I1)$，$(I2)$，$(I3)$（あるいは$(I3')$）と基底を用いた公理$(B1)$とが等価であることがわかる．

これまでの議論から，ベクトル空間における線形独立性の概念とマトロイドの独立集合の概念との関連が明らかとなるであろう．有限次元ベクトル空間における有限個のベクトルの集合を$E=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$とする．$E$の部分集合である$k$個のベクトルから成る集合$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\}$がベクトル空間において線形独立である場合に独立集合と呼ぶことにすると，E上のマトロイドが構成される．つまりこのマトロイドの独立集合族は，Eの部分集合のうちの線形独立なベクトルの集合族に対応している．したがってEに含まれる最大個数の線形独立なベクトルの集合，つまりEの張る空間の基底をなすベクトルの集合がこのマトロイドの基底に対応する．

マトロイドについて述べている文献をいくつか紹介しておこう．マトロイド理論を基礎的な部分から解説的に述べた本として Welsh[1]がある．またマトロイド理論を組合せ最適化理論の一分野としてネットワーク理論と関連づけて紹介した本として Lawler[2]，あるいはグラフ理論と関連づけて紹介したものとして Wilson[3]がある．マトロイドの種々の定義に関しては，それらを整理し相互関連を示してある論文として冨沢，伊理[4]があるので参照されたい．またマトロイドの紹介を含めて，そのオペレーションズ・リサーチ，電気回路理論，システム理論等への応用について，これまでの研究の概要を紹介したものとしては[5]などがある．

参 考 文 献

[1] D.J.A. Welsh : *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976.

[2] E.L. Lawler : *Combinatorial Optimization—Networks and Matroids*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1976.

[3] R.J. Wilson : *Introduction to Graph Theory*, Academic Press, New York and London, 1972.

[4] 冨沢信明，伊理正夫：マトロイドについて，"計測と制御"，Vol.16，No.6，1977，pp.455–468.

[5] M.Iri : Use of Matroid Theory in Operations Research, Circuits and Systems Theory, *Proceedings of the 7th Management Science Colloquium*, Osaka, 1978.