

最近のネットワーク手法

橋田 温

1. はじめに

複数のサービス段(単一待ち行列)がネットワーク状に結合され、あるサービス段からの退去が他のサービス段の到着となっているモデルは、待ち行列ネットワーク(queueing network, 以下QNと略す)と呼ばれる。実際のシステムではこのようなQNにモデル化されるものが多く見られ、与えられた分布・パラメータなどに対し、平均客数、平均待ち時間、スループット(単位時間当りのサービス終了客数)、サービス段の使用率、などの特性評価が要求される。

従来、このような複雑な待ち行列モデルに対しては、各段を独立にとりだして詳細に解析し、たとえば各段の平均待ち時間を加重平均することにより総合的な平均待ち時間を推定するなどの大ざっぱな評価方法が用いられてきた。しかし、このような方法では、直列に結合された場合やフィードバックのある場合などでは、段間の従属、有限客数などの影響が無視されるため、精度よい評価は不可能であった。

近年、計算機システムのジョブ実行過程をQNモデルとして、その特性を総合的に評価する試みが盛んであり、QNに対する解析手法がいろいろと提案されている。たとえば、多重プログラミン

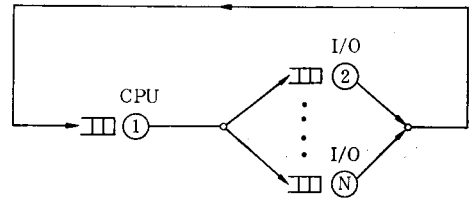


図1 セントラルサーバーモデル

グを行なうTSSは、主に図1に示すセントラルサーバーモデル化され、種々の手法による検討が行なわれている。

一般のQNに対する解析手法としては、理論解析とシミュレーションが考えられる。ここでは、QNの平衡状態における特性評価を対象に、主に理論解析手法を紹介する。

2. 待ち行列ネットワークの理論解析手法

原理的に理論解析可能なモデルの1つとして、マルコフ型QNがある。これは、QNの平衡確率ベクトルを Π 、推移率行列を Q とすると、次の平衡方程式(balance equation)を満足するものである。

$$\Pi Q = 0 \quad (1)$$

これは、状態空間 S のある状態 $s \in S$ に着目しこの平衡確率を $p(s)$ とすると、

$$p(s) \{s \text{ からの推移率} \} \\ = \sum_{s' \in S} p(s') \{s' \text{ から } s \text{ への推移率} \} \quad (2)$$

とも表現される。すなわち、各状態においてそこから出ていく確率とその状態へ入ってくる確率が平衡することを意味している。

マルコフ型QNの解析では、連立方程式(1)または(2)を解けばよいが、一般には $p(s)$ として陽な解は得られない。したがって、数値解法に頼ることとなり、計算プログラムパッケージとしてRQAが開発されている[23]。これは、

$$\Pi^{(n)} = \Pi^{(n-1)}(\Delta Q + I) \quad (3)$$

により反復計算する方法(Δ は定数、 I は単位行列)であるが、状態数が数千以上になると計算機上の制約から非現実的となる。以下では、近似解法も含めてより洗練された解法の中で代表的なものを示す。

2.1 積形式解をもつ待ち行列ネットワーク

マルコフ型QNの中には、平衡方程式の解が陽に求められるものがある。それらは、Jackson[12]やGordon & Newell[8]により解析された指数分布サービスのQNと、それがBaskett et al.[1]により拡張されたQNである。著者の名前をとり、前者をJackson型、後者をBCMP型と呼ぼう。

(1) Jackson型待ち行列ネットワーク

N 段より成る任意の形態のネットワークで、以下の条件を満たすものである。

A1: 網外からの客の到着はポアソン過程

A2: 各段のサービス規律はFCFSで、サービス時間は指数分布

A3: 客は i 段より j 段へ確率 r_{ij} で移動する
($i, j=0, 1, \dots, N, 0$ は網外を意味する)

網内客数が K 人のときの網外からの到着率を $\lambda_0(K)$ 、 i 段に k_i 人の客がいるときのサービス率を $\mu_i(k_i)$ とすると、各段に k_1, k_2, \dots, k_N 人だけ客がいる平衡確率 $p(k_1, k_2, \dots, k_N)$ は平衡方程式から次の積形式で与えられる。

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = \frac{1}{G} A(K) \prod_{i=1}^N f_i(k_i) \quad (4)$$

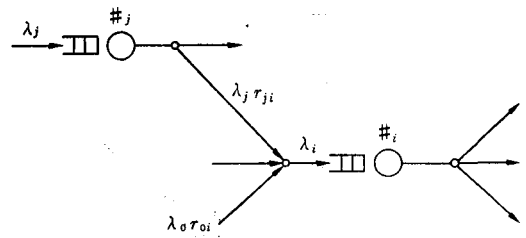


図2 到着率の合成

ただし、 $K \triangleq \sum_{i=1}^N k_i$ 、 $A(K) \triangleq \prod_{r=1}^K \lambda_0(r)$ であり、 $f_i(k_i)$ は方程式：

$$e_i = r_{0i} + \sum_{j=1}^N e_j r_{ji}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (5)$$

の解 $\{e_i\}$ を用いて次式で定義される。

$$f_i(k_i) \triangleq \begin{cases} \prod_{l=1}^{k_i} \frac{e_i}{\mu_i(l)}, & k_i \geq 1 \\ 1, & k_i = 0 \end{cases} \quad (6)$$

また、 G は正規化定数であり次式で与えられる。

$$G = \sum_{K=0}^{\infty} A(K) \sum_{\sum k_i=K} \prod_{i=1}^N f_i(k_i) \quad (7)$$

方程式(5)は次のような意味をもつ(図2参照)。すなわち、 i 段への到着率 λ_i は、網外からの到着率 $\lambda_0 \cdot r_{0i}$ と他段からの到着率の和に等しい。各段では、平衡状態において到着率=退去率というフロー保存則が成りたつため、退去率は到着率に等しい。したがって次式が成りたつ。

$$\lambda_i = \lambda_0 r_{0i} + \sum_{j=1}^N \lambda_j r_{ji} \quad (8)$$

ここで、 $e_i \triangleq \lambda_i / \lambda_0$ とすれば式(5)となり、 e_i は相対到着率とも呼ばれる。

網外から客の到着がない閉じたQNでは、上記の結果でパラメータを変換することにより与えられる。すなわち、 $K = \sum_{i=1}^N k_i$ とすれば、

$$p(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^N f_i(k_i) \quad (9)$$

となる。ただし、 e_i は式(8)で $\lambda_0=0$ としたときの根である。このときの正規化定数 $G(K)$ は次式で与えられる。

$$G(K) = \sum_{\sum k_i=K} \prod_{i=1}^N f_i(k_i) \quad (10)$$

この平衡確率から、 i 段に関する周辺分布 $p_i(k_i)$ 、平均系内客数 \bar{k}_i 、スループット θ_i などが求めら

表 1 BCMP 型のサービス機構

| タイプ | サービス規律 | サービス時間規律 |
|-----|----------------------------|---|
| 1 | FCFS | 全クラス共通の指数分布 (平均サービス時間は系 内客数依存でも可) |
| 2 | PS (プロセッサ・ シェアリング) | Cox 型分布 (クラスで異なっても可) |
| 3 | IS (無限大サーバー) | 同上 |
| 4 | LCFS-PR (割込継続形 LCFS) | 同上 |

れる(平均待ち時間は Little の公式による)。
以下に、 $\mu_i(l) = \mu_i$ の場合を示す。

$$\left\{ \begin{aligned} p_i(k_i) &= \frac{(e_i/\mu_i)^{k_i}}{G(K)} [G(K-k_i) - \frac{e_i}{\mu_i} G(K-k_i-1)] \\ \bar{k}_i &= \sum_{k_i=1}^K \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^{k_i} \frac{G(K-k_i)}{G(K)} \\ \theta_i &= \sum_{k_i=1}^K \mu_i p_i(k_i) = \frac{e_i}{\mu_i} \frac{G(K-1)}{G(K)} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$G(1), G(2), \dots, G(K)$ の値が必要であるが、その計算アルゴリズムが開発されている。

開いたQNで網外からの到着率が状態に依存しない $\lambda_0(K) = \lambda_0$ の場合は、平衡確率 $p(k_1, k_2, \dots, k_N)$ は、各段独立に $M(\lambda_0 e_i) / M(\mu_i(l)) / 1$ モデルとして求めた状態確率 $p_i(k_i)$ の積で与えられることがわかる。これは Jackson の定理と呼ばれる。この場合は正規化定数を計算する必要がないため、数値計算は簡単である。

(2) BCMP 型待ち行列ネットワーク

Jackson 型を拡張して、客にクラスを設けかつより一般的サービス機構としたもので、以下の条件を満足する。

- B 1 : 客のクラスは R 個。
- B 2 : 網外からの客の到着はポアソン過程で、到着率 $\lambda_0(K)$ は網内客数 K に依存してもよい。
- B 3 : 網外からのクラス r の客が最初に i 段でサービスを受ける確率が b_{ir} 、クラス r の客

表 2

| タイプ | $f_i(k_i), k_i \triangleq \sum_{r=1}^R k_{ir}$ |
|-------------|---|
| 1 | $k_i! \left\{ \prod_{r=1}^R \left(\frac{1}{k_{ir}!} \right) e_{ir}^{k_{ir}} \right\} \prod_{j=1}^{k_i} \frac{1}{\mu_i(j)}$ |
| 2 と 4 | $k_i! \prod_{r=1}^R \left(\frac{1}{k_{ir}!} \right) \left(\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}} \right)^{k_{ir}}$ |
| 3 | $\prod_{i=1}^R \left(\frac{1}{k_{ir}!} \right) \left(\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}} \right)^{k_{ir}}$ |

が i 段からクラス s の客となって j 段へ移動する確率が $p_{ir};js$ である。

B 4 : 各段は表 1 のいずれかのサービス機構にしたがう。PS はラウンドロビン方式でクオンタムを 0 としたもので、系内客数が k 人のとき各人は $1/k$ の容量で同時にサービスを受ける方式である。Cox 型分布は、ラプラス変換が有理関数で表わされるもので、指数分布サービス段の継続モデルで合成される。

BCMP 型QNは、状態を詳細に考慮すればマルコフ型となり、特に次の局所平衡(local balance) が成り立つ。

[局所平衡] 状態 $s \in S$ と i 段に対し、
{ i 段への到着により s へ推移する率 }
= { i 段からの退去により s から推移する率 } (12)
上式は局所平衡方程式と呼ばれ、式 (2) は全域(global)平衡方程式とも呼ばれる。

k_{ir} を i 段におけるクラス r の客数、 $k_i \leq (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{iR})$, $s \triangleq (k_1, k_2, \dots, k_N)$ とすれば、局所平衡方程式より平衡確率は次式で与えられる。

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = c \cdot d(s) \prod_{i=1}^N f_i(k_i) \quad (13)$$

ここで、 $f_i(k_i)$ は i 段がどのタイプに属するかで決まり、表 2 のように定義される。ただし、 μ_{ir} は i 段でのクラス r に対するサービス率であり、 e_{ir} は次の方程式の解である。

$$e_{ir} = b_{ir} + \sum_{j,s} e_{js} p_{js;ir} \quad (14)$$

また、 $d(s)$ は状態 s での系内客数 K に依存し、

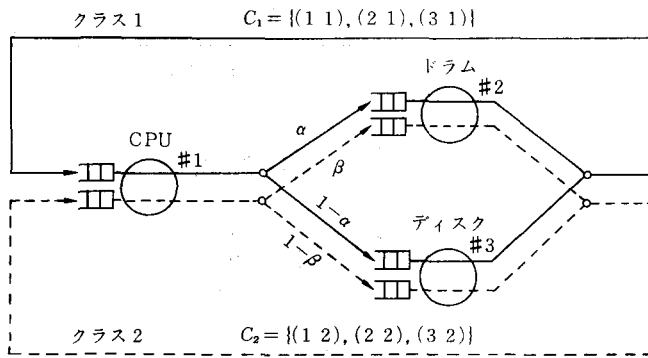


図 3 BCMP 型待ち行列ネットワークの例

表 3 $p_{ir; js}$

| (ir) \ (js) | (11) (21) (31) | | | (12) (22) (32) | | |
|-----------------|----------------------|---|----------|----------------------|---------|-----------|
| | (11) | 0 | α | $1-\alpha$ | 0 | 0 |
| (21) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (31) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (12) | 0 | 0 | 0 | 0 | β | $1-\beta$ |
| (22) | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| (32) | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

開いたQNの場合は $d(s) \triangleq \prod_{l=0}^{K-1} \lambda_0(l)$, 閉じたQNの場合は $d(s) = 1$ である.

式(13)からわかるように, 平衡確率には各段のサービス率(または平均サービス時間)のみが現われており, サービス時間の分布は影響しない. また, 開いたQNで網外からの到着率が網内客数に依存しない場合には, Jackson の定理と同じ関係が成り立つ. すなわち各段独立に, タイプ1, 2, 4の場合には $M/M/1$ の状態確率を, タイプ3の場合には $M/G/\infty$ の状態確率を求めると, それらの積によってQNの平衡確率が与えられる.

閉じたQNの場合は, Jackson 型の場合も含めて正規化定数の計算が大変であり, 計算アルゴリズム[20]と各種プログラムパッケージが開発されている. 主なものとしては, ASQ[13], QNET 4 [19], RESQ [21], QSEC [10], BEST/1 [2], などがある.

BCMP 型QNの例として, 図3にジョブに2クラスがあるセントラルサーバーモデルを示す. 移動確率は表3のようになり, 状態集合 $\{(ir)\}$ に対し2つのエルゴード的な部分連鎖 $C_1 = \{(11), (21), (31)\}$, $C_2 = \{(12), (2,2), (3,2)\}$ が形成される. この場合, 式(14)は各部分連鎖ごとに閉じた方程式となる.

BCMP 型では, 平衡確率が積形式で陽に与えられるため評価尺度の計算が容易である. したがって, どのQNまで平衡確率が積形式で与えられるかということが重要な問題となる. これに対し

ては, “局所平衡は積形式解をもつための必要十分条件である”[4], “一般サービス時間分布のQNが積形式解をもつためにはサービス規律はタイプ2, 3, 4を含むLBPS (Last Batch Processor Sharing) である(必要条件)”[17] などが証明されている. また, マルコフ過程の reversibility という性質からも積形式解が考察されている[14]. なお, BCMP 型自体も, (i)タイプ1以外で状態依存のサービス率, (ii)系内客数に依存する到着率, (iii)状態依存の移動確率, などの場合に拡張され, また, 多数の適用例も報告されている[9].

2.2 動作解析法と平均値解析法

通常, 必要とされる尺度は平衡確率そのものではなく, 平均待ち時間, スループット, 利用率などのグローバルな尺度である. これらは特定のパラメータによって関係づけられるため, それを利用して直接的に所要尺度を得る方法が考えられ, 以下の2方法が提案されている.

(1) 動作解析法(operational analysis)[6]

測定データより得られたパラメータまたは尺度をもとに, 待ち行列の一般的性質を用いて未知の尺度を推定する方法であり, システムの動作分析, 改良などに有効と言われる.

QNに対して以下の条件を設ける.

C1: 測定期間中, 各段において到着率と退去率は等しい(フロー保存則).

C2: 移動確率は系内客数と独立であり, サービ

ス率は他段の系内客数と独立である (一様性).

x_i を i 段の退去率とすると, C1 はそれが到着率 λ_i に等しいことを意味する. したがって次のフロー平衡方程式が成り立つ (0 は網外を示す).

$$x_i = \sum_{j=0}^N x_j r_{ji}, \quad i=0, 1, \dots, N \quad (15)$$

i 段に対し, τ_i を平均サービス時間, t_i を平均系内時間, u_i を使用率, \bar{k}_i を平均系内客数とすると, 次式が成り立つ.

$$u_i = x_i \tau_i, \quad \bar{k}_i = x_i t_i \quad (\text{Little の公式}) \quad (16)$$

式(15), (16)より求める尺度を計算する. たとえば, 測定により $\{r_{ij}\}$, \bar{k}_i が式推定できると, 上より t_i が求められる. 客が網内に到着してから網外へ退去するまでの総合平均網内時間 T を求めるには, 各段への平均訪問回数を $v_i (i=1, \dots, N)$ として, 次式で近似的に与えられる.

$$T = \sum_{i=1}^N v_i t_i, \quad v_i = x_i / x_0 \quad (17)$$

(2) 平均値解析法 (mean value analysis) [18]

主に閉じたQNに用いられるもので次の定理を用いる.

[定理] 積形式解をもつ客数 K の閉じたQNにおいて, 任意のサービス段における客の到着時点の定常状態確率は, 客数 $K-1$ の同じQNの平衡確率に等しい.

ν 段に着目し, ν 段を退去した客が再び ν 段へもどってくるまでの間, i 段を訪問した平均回数を $v_i (i=1, \dots, N, v_\nu=1)$ とすれば, $v_i = \sum_{j=1}^N v_j r_{ji}$ であり, 到着率 λ_i は次式で与えられる.

$$\lambda_i = \lambda_\nu \cdot v_i \quad (18)$$

i 段の平均系内時間は次式で与えられるが,

$$t_i = \tau_i + \tau_i \times \{\text{到着時の平均系内客数}\} \quad (19)$$

定理より $\{ \}$ 内は $\bar{k}_i(K-1)$ に等しいため,

$$t_i = \tau_i \cdot [1 + \bar{k}_i(K-1)] \quad (20)$$

となる. また, i 段および ν 段のところでみたQN全体について次の Little の公式が成り立つ.

$$\bar{k}_i(K) = \lambda_i(K) t_i(K), \quad \lambda_\nu(K) = K / \sum_{j=1}^N v_j t_j \quad (21)$$

ただし K は網内客数が K 人を表わす. 式(18),

(20), (21) を用いて $\bar{k}_i(0)=0$ から逐次計算していけば $t_i(K)$, $\bar{k}_i(K)$, $\lambda_i(K)$ などが得られる.

この方法はクラスがある場合のQNへも拡張される.

2.3 近似解法

現実には, 積形式解をもつQNでも大規模な場合は計算が大変である. また, 以下に示すような積形式解をもたないQNが数多く見られる.

- (i) FCFS で一般サービス時間分布.
- (ii) 一般の優先権サービス.
- (iii) サーバー(資源)の同時保留.
- (iv) 有限待ち室(ブロッキングを含む).

このようなQNに対しては, 分解法, 拡散近似, 拡張積形式法, などの近似手法が提案されている. 拡散近似については本特集で別に述べられているため, 分解法と拡張積形式法について述べる.

(1) 分解法 (decomposition)

段間の相互関係を保ちつつ1段または少段から成るサブネットワークに分解して解析する方法である. Kuehn [16] に代表される分離形と Chandy et al. [3] に始まる合成形がある.

⑧ Kuehn の分離形分解法

以下の手順により系統的に解析される.

ステップ1: フロー平衡方程式より各段への到着率 λ_i を求める.

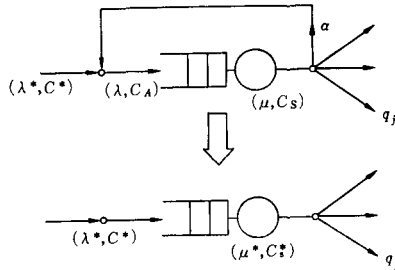
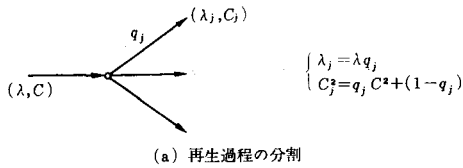
ステップ2: 直接フィードバックのあるサービス段をフィードバックがないように変換する.

ステップ3: 各段ごとに, ステップ1, 2および次の4で求めた到着過程を用いて退去過程を得る.

ステップ4: ステップ3で得られた退去過程を用いて次段への到着過程を求める.

ステップ5: ステップ4で求められた到着過程により各段の諸特性を得る.

ステップ2~4では, 各過程は再生過程で近似し, それらが合成・分割された過程の2次モーメントまで求める. ステップ3と5では $GI/G/1$ モデル



$$\mu^* = \mu(1-\alpha), \quad C^* = \alpha + (1-\alpha)C_S, \quad q_j^* = q_j / (1-\alpha)$$

図4 再生過程の分割とフィードバックの除去

の退去過程と特性を用いる。特に、平均系内時間には Kraemer & Langenback-Belz [15] の近似式を用いる。ステップ5では、網外から到着がある段から順次解析していくが、フィードバックがある場合は反復計算を行なう。

この手法は、再生過程の合成・分割が特徴である。分割の場合とフィードバック除去の場合の例を図4に示す。ただし、 c は分散係数 (Δ 標準偏差/平均値)を表わす。

⑥ 合成形分析法

サブネットワークを等価な1段待ち行列に合成して置換しつつ、最終的にもとのQNと等価な2段QNとして解析する方法である。図5(a)のQNに対し、 ν 段に着目して残りのサブネットワーク Σ を1段待ち行列 σ に合成すると、図5(b)の2段QNとなる。2段QNをすでに発表されている方法で解析すると、 ν 段に関する特性が得られる。

合成段 σ への変換法としては、フロー等価法(flow-equivalent)がある。これは、合成段のフローがサブネットワークのフローに等しくなるように合成段のパラメータを定める方法である。局所平衡なQNの場合にはサブネットワーク Σ の系内客数 k の関数であるサービス率 $\mu_\sigma(k)$ のが定められればよい。これには、電気回路における Norton の定理に似た関係が成り立つのを利用する。

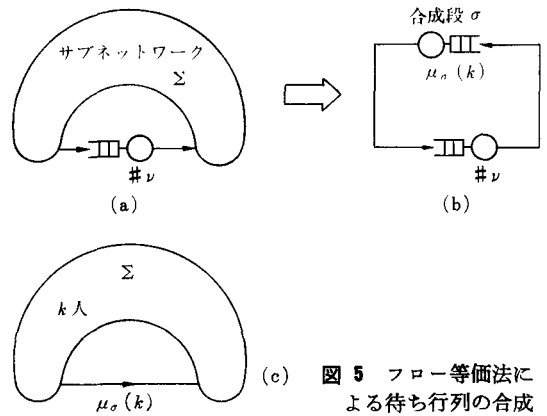


図5 フロー等価法による待ち行列の合成

すなわち、図5(c)に示すように、 ν 段を短絡(サービス率を ∞ とする)した場合のスループットが求める $\mu_\sigma(k)$ となる。図6は、セントラルサーバーモデルでCPUに着目した場合の例である。

この方法は、局所平衡なQNに対しては厳密解を与える。特に、CPUなど特定のサービス段のパラメトリックな特性評価に有効である。なお、一般サービス時間分布のQNに対して合成段の2次モーメントまで考える近似法や同時保留のあるQNへの適用も考えられている。

(2) 拡張積形式法(extended product form) [22]

閉じた非局所平衡なQNに対して Jackson の定理に準じて積形式解をあてはめる方法である。

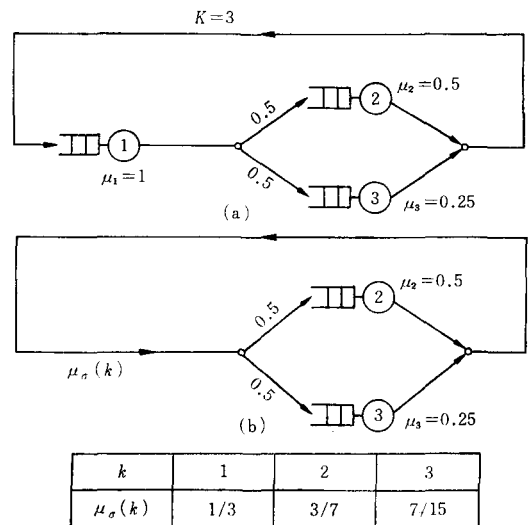


図6 等価フロー法による合成段サービス率の計算例

まず、平衡条件を満足するような各段への相対到着率 λ_i を求め、各段独立に $M(\lambda_i)/G/1(K)$ (K は網内内容数)モデルで状態確率 $p_i(k_j)$ を求める。これら $p_i(k_i)$ を用いてQNの平衡確率を次式で近似する。

$$p(k_1, \dots, k_N) \doteq \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^N p_i(k_i) \quad (22)$$

この確率は、 $K = \sum_{i=1}^N k_i$ および式(16)の第1式と同じ次式を満足しなければならぬ。

$$\lambda_i = u_i / \tau_i = \sum_{k_i \geq 1} p(k_1, \dots, k_N) / \tau_i \quad (23)$$

式(23)ができるだけ精度よく成りたつように反復計算でパラメータを調整することにより、最終的な平衡確率を得る。

本手法は、積形式解に対する計算アルゴリズムを利用できる点があり、理論根拠と収束の保証に弱点がある。しかし、一般サービス時間分布のQNに適用して拡散近似よりも精度がよいという例も報告されている。

3. 待ち行列ネットワークのシミュレーション

シミュレーションは、理論解析ができないような複雑なシステムの分析に有効な手法である。また、QNの近似解法の精度を確認したり、部分システムでのシミュレーション結果を用いて理論解析するのも用いられる。

QNのシミュレーションは、主に大形汎用計算機をベースにGPSS, SIMSCRIPT, SIMULA, などシミュレーション向き言語を用いて行なわれている。しかし大規模なQNのシミュレーションにおいては、計算機ラン時間が長いという問題がある。一般に、汎用計算機におけるラン時間は、略々各段に関する処理を直列処理するために要する段数 N に比例した時間と、段間の処理に関する N^2 に比例した時間から成る。したがって、段数が増えるとラン時間が急激に増大する。これに対する1つの解決策として、複数マイクロプロセッサを用いて並列処理を行なわせる専用シミュ

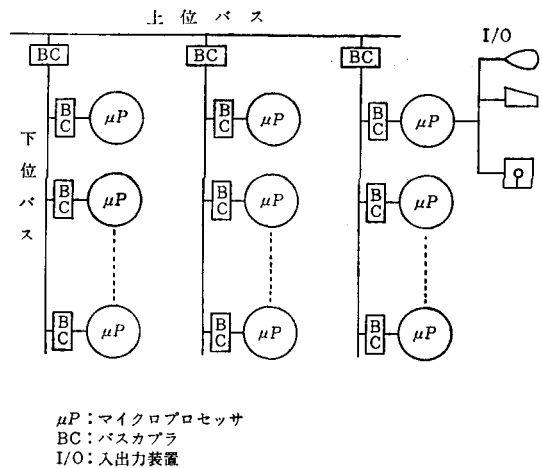


図7 待ち行列ネットワーク専用シミュレータ (NEWTS)

レータが開発されている[11]。図7はその構成であり、各マイクロプロセッサは1つ以上のサービス段の処理が行なえ、かつ、サービス段の結合形態は任意に指定できる。

4. おわりに

ここで述べなかった重要な手法に GERT [7] がある。これは、PERT に確率的属性を導入シグナルフローグラフの理論と結びつけたもので、ある種のQNに適用可能と思われる。

複雑なQNを精度よく分析するにはシミュレーションに頼らざるを得ないが、プログラム作成労力やラン時間に難点がある。一方、理論解析可能なようにモデル化すれば、パラメトリックな分析は容易となるが精度は保証されない。したがって、実際のシステム分析では両者を使い分けるのが望ましい。

システム分析ではモデル化が最も重要である。システムに忠実ということからあまりにも複雑なQNにモデル化するよりも、システムの特徴を保持したより簡単なQNにモデル化するほうが望ましい。たとえば推移率が極端に異なる部分を含むQNに対しては、推移率の大きいサブネットワークを分離して解析し、その結果をもとのQNに埋込んで全体を解析する方法が有効であろう。この

ようなQNの分解法について, Courtois [5]は理論検討を行ない誤差評価などを行なっている.

参考文献

- [1] Baskett, F., Chandy, K. M., Muntz, R. R., and Palacios, J., "Open, closed, and mixed networks with different classes of customers," *J. ACM*, **22**, 2, 248-260 (1975).
- [2] Buzen, J. P. et al., "BEST/1—Design of a tool for computer system capacity planning," *Proc. AFIPS NCC*, 447-455 (1978).
- [3] Chandy, K. M., Herzog, U., and Woo, L., "Parametric analysis of queueing networks," *IBM J. Res. and Develop.*, **19**, 1, 36-42(1975).
- [4] Chandy, K. M., Howard, J. H. JR., and Towsley, D. F., "Product form and local balance in queueing networks," *J. ACM*, **24**, 2, 250-263 (1977).
- [5] Courtois, P. J., *Decomposability: queueing and computer system applications*, Academic Press, New York (1977).
- [6] Denning, P.J. & Buzen, T.P., "The operational analysis of queueing network models," *ACM Comp. Surveys*, **10**, 3, 225-262 (1978).
- [7] Elmaghraby, S. E., *Activity Networks: project planning and control by network models*, John Wiley, New York (1977).
- [8] Gordon, W. J. and Newell, G. F., "Closed queueing system with exponential servers," *Oper. Res.*, **15**, 254-265 (1967).
- [9] 橋田, 川島, "待ち行列ネットワークモデルによる計算機システムの性能評価," *情報処理*, **21**, 7, 743-750 (1980).
- [10] 池原, 山田, "汎用ネットワーク形待ち行列解析プログラム QSEC," *研究実用化報告*, **29**, 5, 1051-1078 (1980).
- [11] 稲守他, "複合マイクロプロセッサによる並列処理形通信網シミュレータ," *電子通信学会 電子計算機研究会*, EC 79-78 (1980).
- [12] Jackson, J. R., "Jobshop-like queueing systems," *Manage. Sci.*, **10**, 131-142 (1963).
- [13] Keller, T. W., *ASQ user's manual*, TR-27, Computer Science Dept., Univ. Texas at Austin, Texas (1973).
- [14] Kelly, F. P., *Reversibility and Stochastic Networks*, John Wiley, Chichester (1979).
- [15] Kraemer, W. and Langenbach-Belz, M., "Approximate formula for the delay in the queueing system $GI/G/1$," *Proc. of 8th Int'l Teletraffic Congress*, Melbourne, 235-1/8, (1976).
- [16] Kuehn, P. J., "Approximate analysis of general queueing networks by decomposition," *IEEE Trans.*, Com-27, 1, 113-126(1979).
- [17] Noetzel, A. S., "A generalized queueing discipline for product form network solutions," *J. ACM*, **28**, 4, 779-793 (1979).
- [18] Reiser, M., "Mean value analysis of queueing networks, a new look at an old problem," *Proc of 4th Int'l Symp. Model. and Perform. Evalu. of Comp. Syst.*, North-Holland, 63-77 (1979).
- [19] Reiser, M., "Interactive modeling of computer systems," *IBM Syst. J.*, **15**, 4, 283-294 (1976).
- [20] Reiser, M. and Kobayashi, H., "Queueing networks with multiple closed chains: theory and computational algorithms," *IBM J. Res. and Develop.*, **19**, 3, 283-294 (1975).
- [21] Sauer, C. H., Reiser, M. and MacNair, E. A., "RESQ—A package for solution of generalized queueing networks," *Proc. AFIPS NCC*, 977-986 (1977).
- [22] Shum, A. W. and Buzen, J. P., "The EPF technique: a method for obtaining approximate solutions to closed queueing network with general service times," *Proc. of 3rd Int'l Symp. Model. and Perform. Evalu. of Compt. Syst.*, North-Holland, 201-220(1977).
- [23] Wallace, V. L. and Rosenberg, R. S., "Markovian models and numerical analysis of computer system behavior," *Proc. AFIPS SJCC*, 141-148 (1966).