状態方程式を解く

高橋 幸雄

よく知られているように，多くの待ち行列モデルは適当な状態をとることによってマルコフ連鎖やマルコフ過程に帰着することができ，それらの定常分布から待ち行列モデルの平衡状態における種々の特性量が計算できる．このため，待ち行列モデルの解析の第1歩は，マルコフ連鎖の定常分布を求めることから始まることが多い．

この定常分布が満たしている方程式を一般に状態方程式と呼んでいるが，ごく単純なモデルの場合を除いてかなり複雑になり，解析的にも数値的にも解くのはなかなかむずかしい．特に数値的にあつかう場合には，状態の数が無限になっている点をどう克服するかがポイントとなることが多い．

これを何とかしようと，最近，M. F. Neutsを中心に，特殊な構造をした推移確率行列をもつマルコフ連鎖の定常分布を数値的に解く方法の研究が進められている．これら一連の研究によって，多くの待ち行列モデル，特に容量が無限の行列は1本しかないような待ち行列モデルの多くが数値的に解けるようになった．残念ながら，無限の容量をもった行列が2本以上あるモデルに対しては，積形式にでもなっていないかぎり，まだあまりうまい方法は知られていない．それでも，これらの研究によって，待ち行列モデルの数値計算法がかなり見とおしよくなったことは確かであろう．ここではこれらの研究の一部を紹介しよう．各節の標題には，わかりやすいようにいわゆる標準的なモデルの名をあげておいた．これは推移確率行列の型を示しているだけで，それ以外にも多くの応用が試みられている．

1. $GI/PH/s$ タイプ

$GI/M/s$ モデルが Kendall の隠れマルコフ法を用いて解析できることはよく知られている．同じように，サービス分布が相型分布注)の $GI/PH/s$ モデルでも客の到着時点(の直前)を考えて，系内人数 n と各窓口におけるサービスの相番号 i_k の組 $(n;i_1,i_2,\cdots,i_s)$ を状態にとると，次のような構造の推移確率行列をもったマルコフ連鎖が導かれる．

$$P=\begin{array}{c|cccccc} \nearrow & \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \cdots \\ \hline \underline{0} & B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \underline{1} & B_{10} & B_{11} & A_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \underline{2} & B_{20} & B_{21} & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ \underline{3} & B_{30} & B_{31} & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ \underline{4} & B_{40} & B_{41} & A_3 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \qquad (1)$$

注）相型分布：状態数有限，時間パラメータ連続の吸収的マルコフ連鎖における吸収時間分布として表わしうる(0, ∞)上の確率分布を相型分布（phase-type distribution）と呼ぶ［4, 7］指数分布，アーラン分布，超指数分布などを含み，(0, ∞）上のすべての確率分布のクラスの中で稠密である．

たかはし ゆきお 東北大学 経済学部

ここで$\underline{0}$は系内人数が$s-1$以下であるような状態の組，$\underline{n}(n\geqq 1)$は系内人数が$n+s-1$であるような状態の組を表わし，B_{mn}やA_nは行と列で示された組間の推移確率のなす小行列を表わしている．(1)の形から，状態の組$\underline{n}$は，$\underline{0}$を除いて，同じ数の状態(r個としよう)から成っている．

このような構造をもったマルコフ連鎖は，いろいろな種類の待ち行列モデルの中に見つけることができる[7]．たとえば，(イ)扱者が故障し修理を受けるモデル，(ロ)第1の待ち行列がオーバーフロしたときに第2の待ち行列に客が流れるモデル，(ハ)1つを除いて行列の制限値が有限なネットワークモデル，(ニ)マルコフ的に変わる環境の下で到着率やサービス率の変わるモデル，(ホ)待たずにサービスされる客と待ってからサービスされる客でサービス率が異なるモデル，(ヘ)優先権のある客に対しては損失系となるモデル，(ト)優先権のある客の有限ソースのあるモデル，など．これらでは到着分布やサービス分布が相型分布（一部は一般分布でもよい）であれば，このタイプのマルコフ連鎖に帰着することができる．

Neuts の方法

(1)の形をしたマルコフ連鎖xの性質を調べよう．状態の組分けに対応して，xも小ベクトルに分割して，

$$x=[x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots] \tag{2}$$

と表わされるものとする．

定常分布xは$xP=x$を満たすから，状態方程式は，

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu B_{\nu 0} \\ x_1&=\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu B_{\nu 1} \\ x_n&=\sum_{\nu=0}^{\infty} x_{n+\nu-1} A_\nu,\quad n=2,3,4,\cdots \\ &\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu e=1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

となる．ここでeはすべての要素が1の列ベクトルである．(3)の第3式で，いま，形式的にx_nのところに$r\times r$行列Xのn乗を置いてみると，方程式

$$X=\sum_{\nu=0}^{\infty} X^\nu A_\nu \tag{4}$$

が得られる．Neutsはこの方程式が少なくとも1つの非負解をもち，最小の非負解Rに対して次の性質が成りたつことを示した[5, 7]．

<u>基本定理</u>　マルコフ連鎖Pが非零再帰的(positive recurrent)ならば，Rのすべての固有値は絶対値が1より小さく，$xP=x$を満たす確率ベクトルxが存在して，(2)の分割に対して，

$$x_n=x_{n-1}R \quad (n\geqq 2) \tag{5}$$

が成りたつ．Rの第(k, j)要素は，$\underline{n}$のk番目の状態から出発したとき$\underline{n}$にもどる前に$\underline{n+1}$のj番目の状態を訪問する平均回数である．

(5)から$x_n=x_1R^n$であるので，$\{x_n\}$は公比が行列Rの等比ベクトル列になっており，x_0, x_1, Rの3つが定まれば定常分布ベクトルxのすべての要素はそれらから計算できる．このうち公比行列Rは次の逐次代入法で求めるが便利である．

$$\left.\begin{aligned} R(0)&=A_0 \\ R(n)&=\sum_{k=0}^{\infty}[R(n-1)]^k A_k \quad (n\geqq 1) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$n\to\infty$のとき，$R(n)\to R$である．(6)の無限級数はkが増加するとともに項が急速に0に近づくので，実質上は適当な所で打切ってさしつかえない．

残る小ベクトルx_0, x_1は次の連立一次方程式から求められる．

$$\left.\begin{aligned} x_0&=x_0B_{00}+x_1\sum_{k=0}^{\infty} R^k B_{k+1\,0} \\ x_1&=x_0B_{01}+x_1\sum_{k=0}^{\infty} R^k B_{k+1\,1} \\ x_0e&+x_1(I-R)^{-1}e=1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

このように(1)の形をした推移確率行列の定常分布は等比ベクトル列の形をしているので，(6)でRが計算できれば，有限次元の連立一次方程式を解くことによって求められてしまう．

理論的応用

上の基本定理は数値計算法の導出に利用できるばかりでなく，待ち行列モデルの理論的解析にも有効である．R は非負行列であるから Perron-Frobenius 根（絶対値最大の固有値）$\eta \geqq 0$ をもち，それに対応する左右の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{ue}=\boldsymbol{uv}=1)$ とすれば，$n\to\infty$ のとき $R^n=\eta^n \boldsymbol{vu}+\mathrm{o}(\eta^n)$ である．これから，

$$\boldsymbol{x}_n=(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{v})\eta^{n-1}\boldsymbol{u}+\mathrm{o}(\eta^n) \tag{8}$$

であることがわかる．

$GI/PH/s$ モデルのとき，$\underline{n}$ は系内人数が $n+s-1$ 人の状態の組であった．したがって，系内人数が n である確率 p_n は，

$$p_n=\boldsymbol{x}_{n-s+1}\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{v})\eta^{n-s}+\mathrm{o}(\eta^n) \tag{9}$$

となる．これは系内人数分布の裾が指数的に減少していくことを示している．

このような考察をさらに進めて，$GI/PH/s$ の待ち時間分布の裾が指数的に減少すること，またその減少する率や η の値は簡単な方程式から求められることが証明されている [6, 10].

上の結果を使って数値計算を行なうとき注意すべき点がいくつかある．ここでは2つだけあげておこう．

状態のとり方について

第1は状態のとり方についてである．待ち行列モデルをマルコフ連鎖に帰着させるのにも幾通りかの方法が可能な場合，原則として1つの組に入る状態の数 r が小さくなるようにすることが大切である．たとえば，各窓口におけるサービス分布が同じである標準的な $GI/PH/s$ の場合，(1) のすぐ上で示した状態のとり方は簡単ではあるが効率的ではない．各窓口での相番号の組をとるよりは，各番号の相のサービスを行なっている窓口の数の組をとるほうが良い．サービス分布の相の数を h とすると，前者は $r=h^s$ であるのに対して後者は $r=\binom{h+s-1}{s}$ である．

とはいっても，(1)の中の小行列 B_{mn} や A_n のことも考える必要がある．たとえば，$GI/PH/s$ モデルでは A_n の要素は『ある客が到着した時点での各窓口におけるサービスの相がある与えられた状態にあったとき，次の客が到着するまでに n 人の客のサービスが終了しかつその時の各窓口でのサービスの相が与えられた別の状態になっている確率』である．この確率を求めることは一般にそうやさしくないし，また n が大きくなれば A_n の要素はほとんどすべてゼロでなくなってしまうので疎行列のテクニックも使えない．もし到着間隔分布が相型であれば，次節で述べるように，状態を表わす際に到着過程の相番号も入れて，時間パラメータ連続のマルコフ連鎖としたほうが扱いやすい．

このとき組 $\underline{n}$ に含まれる状態の数は増えるが，推移確率行列に相当する無限小生成作用素はブロック三重対角となり，またそこに出てくる非零の小行列も，多くの場合，疎行列となる．

ブロック Gauss-Seidel 反復法

第2に，r が大きいときは，この方法を直接使うよりも，(8)の性質を利用してブロック Gauss-Seidel 反復法(BGS 法) を使うことを考えたほうが良いこともある．BGS 法というのは，ベクトル列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ に対して通常の Gauss-Seidel 法の考えを適用するもので，各反復においてある $\boldsymbol{x}_n$ を計算するときに，他の $\boldsymbol{x}_m$, $m\neq n$, にはそれまでの反復で得られた最新の値を代入して方程式を解くというものである．このとき無限個の $\boldsymbol{x}_n$ を扱うわけにはいかないのであるが，ある所から先は (8) の第1項で近似してやればかなり精度のよい計算ができる．そのためには，適当な大きさの N をとって $n\geqq N$ に対しては $\boldsymbol{x}_n=\eta^{n-N}\boldsymbol{x}_N$ であるものとして方程式を書き直せばよい．

上で紹介した Neuts の方法だと，R をいったん求めてから $\boldsymbol{x}_n$ を計算するので，少なくとも r^2 個の未知数の値をまず決めなければならない．これに対して BGS 法だと，およそ rN 個の未知数をもったベクトル $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N)$ の値を求めれば

よいことになる．計算の方法などが違うため単純に比較するわけにはいかないが，r が N よりもかなり大きいときには BGS 法のほうが良さそうである．BGS 法の N は普通考えるよりもかなり小さくて十分である．$\eta^N(1-\eta)^{-1}$ が 1 に比べて十分小さいか，あるいは ζ を R の絶対値が 2 番目に大きい固有値として，$(|\zeta|/\eta)^N$ が十分小さければ良い．筆者の経験では，それほど複雑なモデルでなければ N が 100 を越えることはあまりない．

2. *PH/PH/s* タイプ

到着間隔分布もサービス時間分布も相型である $PH/PH/s$ モデルでは，システムの状態として，系内人数 n，到着過程の相番号 j，各窓口におけるサービスの相番号 i_k の組 $(n;j;i_1,\cdots,i_s)$ ［または もっと効率の良いものとして，n と j と相番号 k のサービスを行なっている窓口の数 m_k の組 $(n;j;m_1,\cdots,m_h)$］をとることによって，時間パラメータ連続のマルコフ連鎖を導くことができる．そして前節で行なったと同様に，系内人数によって状態を組分けすると，このマルコフ連鎖を記述する無限小生成作用素 Q はブロック三重対角行列となる．これは，短い時間の間に 2 人以上の客が到着したり，サービス終了したりしないことによる．

無限小生成作用素 Q をもった時間連続的マルコフ連鎖の定常分布は，推移確率行列 $P=I+dQ$ をもった時間離散的マルコフ連鎖の定常分布と一致する．ここでは他節との一貫性を保つため，無限小生成作用素の替りに推移確率を用いて議論を進めていくことにしよう．この節で扱うのは次のような形のブロック三重対角の推移確率とその定常分布である．

$$P=\begin{array}{c|c} \nearrow & \begin{array}{cccccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} \underline{0} \\ \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{4} \\ \vdots \end{array} & \left(\begin{array}{cccccc} B_{00} & B_{01} & & & 0 & \\ B_{10} & B_{11} & A_0 & & & \\ & B_{21} & A_1 & A_0 & & \\ & & A_2 & A_1 & A_0 & \ddots \\ & 0 & & A_2 & A_1 & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{array}\right) \end{array} \tag{10}$$

このような形の推移確率行列（または無限小生成作用素）は，すべての分布が相型分布で記述されるモデルでよく現われる．前節で (1) の形をした推移確率行列の出てくる例をあげたが，それらを記述するすべての確率分布が相型ならば，(10) の形であつかうことも可能である．

紙幅の関係で詳しいことは省略するが，相型分布を用いたモデルの推移確率行列ないし無限小生成作用素を具体的に表わすのに行列のクロネッカー積やクロネッカー和を用いると便利である [2, 10].

Neuts の方法による計算

1 節で紹介した Neuts の方法によって，この場合も計算することができる．公比行列 R は次の逐似代入法で求められる．

$$\left.\begin{array}{l} R(0)=A_0 \\ R(n)=A_0+R(n-1)A_1+[R(n-1)]^2A_2 \end{array}\right\} \tag{11}$$

$n\to\infty$ のとき $R(n)\to R$ である．(11) の第 2 式の代りに次の式を使うこともできる．

$$R(n)=A_0(I-A_1)^{-1}+[R(n-1)]^2A_2(I-A_1)^{-1} \tag{12}$$

また x_0 と x_1 を求める (7) の式は次のように簡単になる．

$$\left.\begin{array}{l} x_0=x_0B_{00}+x_1B_{10} \\ x_1=x_0B_{01}+x_1(B_{11}+RB_{21}) \\ x_0e+x_1(I-R)^{-1}e=1 \end{array}\right\} \tag{13}$$

前のときと同様に，$x_n=x_{n-1}R\,(n\geqq 2)$ である．このように (10) の定常分布は比較的簡単な逐次代入計算と有限の連立一次方程式を解くことによって求められる．

BSG 反復法

(1) の場合に比べて (10) の場合にはブロック Gauss-Seidel 反復法 (BSG 法) もずっと簡単になる．前節では考え方を述べただけであったので，ここでは具体的な計算方法について説明を加えておこう．

適当な初期値 $x_n(0)$ から出発して，第 k 回目の反復における x_n の値 $x_n(k)$ は次の式によって計算される．

$$
\left.\begin{aligned}
&x_0(k)=x_1(k-1)B_{10}(I-B_{00})^{-1}\\
&x_1(k)=x_0(k)B_{01}(I-B_{11})^{-1}\\
&\qquad\qquad +x_2(k-1)B_{21}(I-B_{11})^{-1}\\
&x_n(k)=x_{n-1}(k)A_0(I-A_1)^{-1}\\
&\qquad\qquad +x_{n+1}(k-1)A_2(I-A_1)^{-1}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad n=2,3,\cdots,N\\
&x_{N+1}(k)=\eta(k)x_N(k)\\
&\quad \text{ただし，}\eta(k)=x_N(k)e/x_{N-1}(k)e
\end{aligned}\right\}\quad(14)
$$

$x_n(k)$ と $x_n(k-1)$ との差がすべて十分に小さくなったとき反復計算を終わる．ただし，この反復では $x(k)e=\sum x_n(k)e=1$ が保たれていないので，反復終了後すべての $x_n(k)$ の要素に，

$$\alpha=[\sum_{n=0}^{N}x_n(k)e+(1-\eta(k))^{-1}x_{N+1}(k)e]^{-1}$$

を掛けて，総和を1にする．

(14)の式も，なおケースごとに工夫の余地がある．たとえば，(14)ではあらかじめ $A_0(I-A_1)^{-1}$ や $A_2(I-A_1)^{-1}$ を計算しておくようになっているが，行列 A_0, A_1, A_2 が疎でなおかつ A_1 が三角行列の場合（これは決して稀ではなく，多くの応用例でこの条件が満たされている）には，

$$x_n(k)=x_{n-1}(k)A_0+x_n(k)A_1+x_{n+1}(k-1)A_2$$

という式から順次 $x_n(k)$ の要素を計算していったほうが早い．このような工夫をすることによって，r がかなり大きな場合でも計算可能となる．

条件付確率法

(14)の式では $x_n(k)$ は $x_{n-1}(k)$ と $x_{n+1}(k+1)$ から計算される．このことからも予想されるように，初期値 $x_n(0)$ がたとえ $n=0, 1, \cdots, N-1$ では真の値 x_n と一致していても，$n=N$ のときの $x_N(0)$ が x_N と大きくかけ離れていると，その違いが全体の $x_n(k)$ に拡がって均されるまで，かなりの回数の反復を必要とする．この点を考慮して，x_n を $p_n=x_ne$ と確率ベクトル $y_n=x_n/p_n$ に分解して，はじめに y_n だけを反復計算する方法も考えられている [8, 9]．

$\underline{n}$ を系内人数が n' の状態の組であるとすると，p_n は系内人数が n' である確率，y_n は系内人数が n' であるという条件の下での $\underline{n}$ に含まれる各状態の条件付定常確率のベクトルである．(8) の式から $y_n=u+o(\eta^n)$ であるから，u が簡単に計算できる場合には特にこの方法が効果的である．たとえば標準的な $PH/PH/s$ モデルでは，到着間隔分布の時間単位を s 倍にした $PH/PH/1$ モデルの u からこのモデルの u が簡単に計算できる[10]．したがって，まず単一窓口モデルを解いてからこの方法によって複数窓口モデルを解けば計算時間がかなり短くてすむ．

アルゴリズムは下のようにBGS法に比べて少し複雑になるが，これは y_{n-1} と y_{n+1} だけから，つまり p_{n-1} と p_{n+1} の情報を使わずに，y_n を求めるための工夫である．

適当な初期値 $y_n(0)$ から始めて，次の式にしたがって順次 $y_n(k)$ を計算する．

$$
\begin{aligned}
&y_0(k)=y_1(k-1)B_{10}(I-B_{00})^{-1}\\
&y_1(k)=(\varphi A_0e)^{-1}\varphi+(\phi B_{10}e)^{-1}\phi\\
&\quad \text{ここで，}\varphi=y_0(k)B_{01}(I-B_{11})^{-1}\\
&\qquad\qquad \phi=y_2(k-1)B_{21}(I-B_{11})^{-1}\\
&y_n(k)=(\varphi A_0e)^{-1}\varphi+(\phi A_2e)^{-1}\phi\\
&\quad \text{ここで，}\varphi=y_{n-1}(k)A_0(I-A_1)^{-1}\\
&\qquad\qquad \phi=y_{n+1}(k-1)A_2(I-A_1)^{-1}\\
&\qquad\qquad\quad n=2,3,\cdots,N\\
&y_{N+1}(k)=y_N(k)
\end{aligned}
$$

この反復計算により $y_n{}^*$, $n=0,1,2,\cdots,N$ が得られたものとしよう．これらは必ずしも $y_n{}^*e=1$ を満たしていないが，y_n の定数倍になっているはずである．そこで p_{n+1}/p_n は次の式で計算できる．

$$p_{n+1}/p_n=(y_{n+1}{}^*e)(y_n{}^*A_0e)/(y_n{}^*e)(y_{n+1}{}^*A_2e)$$

もちろん，$n\geqq N$ では p_{N+1}/p_N と同じ値になるものと考える．これらの比と $\sum p_n=1$ から p_n の値が計算され，

$$x_n=(y_n{}^*e)^{-1}p_ny_n{}^*$$

から x_n が計算できる．

なお，この方法は，ほんの少し修正すれば，行列の長さ(n の範囲)に制限がある場合にも適用できる．

3. *PH/G/1* タイプ

$M/G/1$ モデルに対する Kendall の隠れマルコフ法と同じように，$PH/G/1$ モデルでも，サービス終了時点における系内人数 n と到着過程の相番号 j の組 (n, j) を状態にとると，次の形の推移確率行列をもったマルコフ連鎖が導かれる．

$$
\begin{array}{c|c}
\nearrow & \begin{array}{cccccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \cdots \end{array} \\
\begin{array}{c} P=\underline{0} \\ \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{4} \\ \vdots \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccc}
B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \cdots \\
C_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \cdots \\
 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\
 & & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots \\
 & & & A_0 & A_1 & \cdots \\
 & & & & \ddots & \ddots
\end{array}\right)
\end{array}
\qquad (15)
$$

このようなマルコフ連鎖は，$PH/G/1$, $PH/D/s$ のほか，交換機の解析に現われる周期的要素をもつサービスを含むモデルなどから導かれる．

(15)の形をしたマルコフ連鎖の定常分布には，1節で紹介したようなうまい性質が見つからないので，計算も多少やっかいである．下で初度到達確率を利用した計算法を紹介するが，実際の計算に当ってはモデル固有の性質を利用してさらに工夫を加える必要があろう．場合によってはブロック Gauss-Seidel 反復法のほうが効率的なこともあろう．

初度到達確率法

［1］ まず，状態の組 $\underline{n}$ から組 $\underline{n-1}$ への初度到達確率行列($\underline{n}$ の第 i 状態から出発したとき，$\underline{n-1}$ の第 j 状態に $\underline{n-1}$ の中で最初に到達する確率 g_{ij} の行列) G を求める．マルコフ連鎖(15)が非零再帰的ならば，G は次の式を満たす確率行列である．

$$G=\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu G^\nu$$

この G の値は(6)と同様の逐次代入法で計算することができる．

［2］ 次に $m=1, 2, 3, \cdots$ に対して行列 $R(m)$ を次式から計算する．

$$R(m)=\sum_{\nu=m}^{\infty} A_\nu G^{\nu-m}$$

$R(m)$ は，状態の組 $\underline{n}$ から組 $\underline{n+m-1}$ へ，$\underline{n-1}$, $\cdots$, $\underline{n+m-2}$ を通らずに到達するタブー確率行列 ($\underline{n}$ の第 i 状態から出発したとき，$\underline{n-1}$, $\cdots$, $\underline{n+m-1}$ の中で最初に $\underline{n+m-1}$ の第 j 要素へ到達する確率 $r_{ij}(m)$ の行列である．

［3］ $R'=[I-R(1)]^{-1}$ を計算する．

［4］ 状態の組 $\underline{1}$ から組 $\underline{0}$ への初度到達確率行列 $H=R'C_0$ を求める．H は確率行列である．

［5］ 状態の組 $\underline{0}$ から組 $\underline{0}$ への初度到達確率行列

$$L=B_0+\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu G^{\nu-1} H$$

を求める．L は確率行列である．

［6］ L を推移確率行列としたときの定常確率ベクトル y_0 を求める．

$$y_0 L=y_0,\quad y_0 e=1$$

この y_0 は x_0 の p_0^{-1} 倍になっている．

［7］ $m=1, 2, 3, \cdots$ に対してベクトル

$$t(m)=\sum_{\nu=m}^{\infty} y_0 B_\nu G^{\nu-m}$$

を計算する．$t(m)$ の第 j 要素は，確率ベクトル y_0 にしたがって組 $\underline{0}$ を出発したとき，$\underline{0}$，$\underline{1}$，$\cdots$，$\underline{m}$ の中で $\underline{m}$ の第 j 状態に最初に到達する確率である．

［8］ ベクトル $y_n(=p_0^{-1}x_n)$, $n=1, 2, 3, \cdots$, を次式により計算する．

$$y_n=\left[t(n)+\sum_{\nu=1}^{n-1} y_\nu R(n+1-\nu)\right]R'$$

［9］ 最後に $p_0=[\sum y_n]^{-1}$ より $x_n=p_0 y_n$, $n=1, 2, 3, \cdots$, を計算する．

なお，この方法で実際に計算する際には，無限級数の処理，計算の順序など，モデルに則して工夫を加えてほしい．［3］には，はじめに y_0 だけでなく x_0 まで求めてしまう方法が提案されている．また［1］には，方程式を $n \leqq N$ に制限して解いたときの解の近似の度合について議論してある．興味のおありの方は参考になさるとよい．

4. わが国における研究

わが国でも何人かの研究者が，待ち行列モデルの数値計算を試みておられる．その多くが個別的なモデルの数値計算であり，たとえば，多くの若手研究者のいる京大や阪大では，直列型をはじめネットワーク型待ち行列モデルや交差点モデルなどがいろいろ数値的に研究されている．標準的なモデルとしては，筑波大・逆瀬川氏の $E_k/E_2/s$，東京理科大・石川氏の $GI/E_k/s$，筆者らによる $PH/PH/s$ および $PH/PH/s(N)$，などが多くの数値計算を経験している．

電々公社武蔵野通研では，お仕事柄，多くのすぐれた研究をなさっており，OR学会や電子通信学会などで発表なさっている．通信に関する種々のモデルのみならず，一般的な数値計算法に関する研究もある．最近，それらの研究の成果を数表の形で刊行された[11]．$M/M/s$, $M/D/s$, $M/E_k/s$, $M/G/1$, $GI/M/s$ といった標準的モデルのほか，損失系や有限呼源のモデルなどにおける待ち時間分布や呼損率がすぐに引けるように工夫されている．パラメータの値が細かく選んであり，実務家にも研究者にも便利であろう．

引 用 文 献

[1] Allen, B., R. S. Anderssen and E. Seneta (1977) Computation of stationary measures for infinite Markov chains, *Algorithmic Methods in Probability* (M. F. Neuts ed.), North-Hollard.

[2] Bellman, R. (1960) *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill.

[3] Lucantoni, D. M. and M. F. Neuts (1978) Numerical methods for a class of Markov chains arising in queueing theory, Department of Statistics and Computer Science, University of Delaware, Newark, DE.

[4] Neuts, M. F. (1975) Probability distributions of phase type, *Liber Amicorum Professor Emeritus H. Florin*, Dept. of Math., University of Louvain, Belgium, 173-206.

[5] Neuts, M. F. (1978) Markov chains with applications in queueing theory, which have a matrix-geometric invariant vector, *Adv. Appl. Prob.* 10, 185-212.

[6] Neuts, M. F. and Y. Takahashi (1980) Asymptotic behavior of the stationary distributions in the *GI/PH/c* queue with heterogeneous servers, Applied Mathematics Institute, University of Delaware, Newark, DE.

[7] Neuts, M. F. (1981) *Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models—An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press.

[8] Takahashi, Y. (1975) A lumping method for numerical calculations of stationary distributions of Markov chains, *Research Reports on Information Sciences* B-18, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology.

[9] Takahashi, Y. and Y. Takami (1976) A numerical method for the steady-state probabilities of a *GI/G/c* queueing system in a general class, *J. of Operations Research Society of Japan* 19, 147-157.

[10] Takahashi, Y. (1981) Asymptotic Exponentiality of the tail of the waiting time distribution in a *PH/PH/c* queue, *Adv. Appl. Prob.* (to appear).

[11] 日本電信電話公社電気通信研究所 (1980) 待ち行列数表.

