議員定数の最適配分法

茨木 俊秀

政治と数学は一見無縁のように思えるが，さまざまな局面で数学的に厳密な考察を要求されることがある．議員定数の最適配分問題はそのような例の1つである．数式で記述すると，総議員数 N と n 選挙区 $i=1, 2, \cdots, n$ の有権者数 p_i が与えられたとき，各選挙区 i の議員定数 x_i を，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = N$$

x_i：非負整数

の下で"できるだけ" p_i に比例するように配分する問題である．

各 x_i を実数値

$$q_i = Np_i/\sum_{i=1}^{n} p_i$$

と置くことが許されれば，すべての選挙区で1票の重み x_i/p_i が等しいという意味で，完全に公平な配分を実現できる．しかし，x_i は整数でなければ意味がないので，話がむずかしくなる．

Vinton 法（Hamilton 法ともいう；以後V法と略す）は，最もよく知られた q_i の修正法であろう．これは，まず各選挙区に $\lfloor q_i \rfloor$ 人（$\lfloor\cdot\rfloor$ は内容を越えない最大の整数を示す）を割当て，ついで $q_i - \lfloor q_i \rfloor$（小数部分）の大きな選挙区から順に，1人ずつ，総議員数 N が達成されるまで，追加してゆくのである．しかしV法は，アラバマ・パラドックスを生じ得るという奇妙な欠点をもつ．これは，議員総数 N を増加するとき，議員定数が選挙区によっては減少するという現象である．

この欠点を克服するために提案されたのが，Hantington 法である．これは，$x_i=1 (i=1,2,\cdots,n)$ から始め（各選挙区最低1人は割当てられると仮定している），順位関数 $r(p_i, x_i)$ 最大の選挙区の定員を1増加するという手順を，$\sum x_i = N$ が達成されるまで繰り返す方法である．原理から明らかなように，アラバマ・パラドックスは決して生じない．順位関数 r をどうするかによって，表1に示すSD，HM，EP，W，J法の5種が代表的である．J法は，わが国でも最近参議院全国区の比例代表制に関連して話題になっているドント方式（d'Hondt method）に等しい．米国では現在EP法が採用されている．

いばらき　としひで　京都大学　数理工学科

Hantington 法の1つの欠点は，取り分(quota)制約を満たすとは限らない点にある．取り分制約とは，

$$\lfloor q_i \rfloor \le x_i \le \lceil q_i \rceil, \quad i=1,2,\cdots,n$$

のことである．ただし，$\lceil\cdot\rceil$ は内容より小さくない最小の整数を示す．この制約は，x_i が q_i を切り上げるか，切り下げることで得られることを要請しており，q_i を理想値と考える限り，至極当然であろう．

Hantington 法を取り分制約を満たすように修正する1つの方法は，逐次的に議員定数を付加していくとき，上方取り分 $\lceil q_i \rceil$ に達したものは，以後の対象から除外し，それ以上増加しないようにすることである．J法の場合（かつその時に限り），この方法で下方取り分制約も成立することが知られており，quota 法（Q法）と呼ばれている．

さて，これらの方法による配分は，どういう目標関数を最適化しているのであろうか．この問題を1つの数理計画問題と捉えることで，そのような目標関数を正確に求めることができるが，表2はそれを示したものであ

表1 Hantington 法とその順位関数

配　分　法	順位関数 $r(p_i, x_i)$
SD(smallest divisor)	p_i/x_i
HM(harmonic mean)	$p_i/[2x_i(x_i+1)/(2x_i+1)]$
EP(equal proportion)	$p_i/[x_i(x_i+1)]^{1/2}$
W(Webster, major fraction, Sainte-Lagüe formula)	$p_i/(x_i+\frac{1}{2})$
J(Jefferson, greatest divisor, d'Hondt)	$p_i/(x_i+1)$

表 2　各配分法が最小化する目標関数

配分法	目標関数
SD	$\sum p_i\left(\frac{x_i}{p_i}-b\right)^2-\sum\left(\frac{x_i}{p_i}-b\right)$
HM	$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{p_i}{x_i}-c\right)-\sum p_i\varphi(x_i)$
EP	$\sum x_i\left(\frac{p_i}{x_i}-c\right)^2,\ \sum p_i\left(\frac{p_i}{x_i}-c\right)$
W	$\sum p_i\left(\frac{x_i}{p_i}-b\right)^2$
J	$\sum p_i\left(\frac{x_i}{p_i}-b\right)^2+\sum\left(\frac{x_i}{p_i}-b\right)$
V	$\sum p_i\left\|\frac{x_i}{p_i}-b\right\|$

$b=N/\sum p_i,\quad c=\sum p_i/N$

$\varphi(x)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{x}\cong\gamma+\log x$

（γ：オイラー定数）

る．b は1票の重み x_i/p_i の平均値，c はその逆数であって，W法では b からの誤差の2乗和，V法は誤差の絶対値和を最小化していることが読みとれる．また，W法を中心にJ法とSD法がその両側に位置していることもわかる．ちなみに，SD法は小さな選挙区に有利になり，以下，HM，EP，W，J法と進むにつれ，大選挙区に有利になる．Q法はJ法と同様，大きな選挙区に有利である．

ところで，わが国のように，定数自体が公職選挙法に定められており，あまり頻雑に変更される可能性のない場合には，1票の重みの格差が重要視される．すなわち，1票の重み x_i/p_i 最大の選挙区と最小の選挙区に注目し，両者の違いで公平さを評価するものである．評価関数の例としては，

$$g_1=(\max_i x_i/p_i)-(\min_i x_i/p_i)$$

$$g_2=\max\left[\max_i x_i/p_i-b,\ b-\min_i x_i/p_i\right]$$

$$g_3=(\max_i x_i/p_i)/(\min_i x_i/p_i)$$

$$g_4=(1/\min(x_i/p_i))-(1/(\max_i(x_i/p_i))$$

$$g_5=\max\left[(1/\min(x_i/p_i))-c,\ c-(1/\max_i(x_i/p_i))\right]$$

などが考えられよう．

このような目標関数を最小化する配分を求める方法は，従来考えられていなかったようであるが，幸いわれわれのグループでそのアルゴリズムを開発することができた［1］．Hanting-

表 3　参議院地方区の定数（総議員数 N=76）

選挙区	q_i	現行	V	SD	HM	EP	W	J	Q	$g_1\sim g_6$ 最適化 制取 約り 有分	制取 約り 無分
北海道	3.60	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
青　森	1.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
岩　手	0.95	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
宮　城	1.34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
秋　田	0.87	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
山　形	0.86	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
福　島	1.34	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
茨　城	1.61	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2
栃　木	1.16	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
群　馬	1.20	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
埼　玉	3.20	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
千　葉	2.82	2	3	3	2	3	3	3	3	2	3
東　京	7.91	4	8	6	7	7	7	8	8	7	6
神奈川	4.32	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4
新　潟	1.65	2	1	2	2	2	1	1	1	2	2
富　山	0.75	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
石　川	0.73	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
福　井	0.53	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
山　梨	0.54	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
長　野	1.41	2	1	2	1	1	1	1	1	1	2
岐　阜	1.26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
静　岡	2.24	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
愛　知	3.90	3	4	3	3	3	4	4	4	3	3
三　重	1.12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
滋　賀	0.68	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
京　都	1.68	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2
大　阪	5.44	3	5	4	5	5	5	6	6	5	4
兵　庫	3.37	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
奈　良	0.74	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
和歌山	0.74	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
鳥　取	0.41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
島　根	0.54	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
岡　山	1.27	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
広　島	1.81	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2
山　口	1.08	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
徳　島	0.57	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
香　川	0.68	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
愛　媛	1.02	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
高　知	0.58	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
福　岡	2.95	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
佐　賀	0.57	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
長　崎	1.01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
熊　本	1.19	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
大　分	0.83	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
宮　崎	0.75	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
鹿児島	1.19	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
沖　縄	0.64	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1票の重み	最大県	鳥取	鳥取	鳥取	鳥取	鳥取	鳥取	鳥取	鳥取	鳥取	鳥取
	最小県	神奈川	新潟	大阪	千葉	茨城	新潟	広島	広島	千葉	大阪
$g_3=\max_i(x_i/p_i)/\min_i(x_i/p_i)$		5.26	4.01	3.31	3.43	3.92	4.01	4.40	4.40	3.43	3.31

ton 法の逐次追加法に近い（そのままではなく少し複雑になるが）方法で求めることができる．

表3は以上の諸法を，参議院地方区に適用したものである．J法とQ法，$g_j(j=1\sim5)$最適化とSD法（取り分制約を加えない場合），g_j 最適化とHM法（取り分制約を加える場合）が一致する以外，それぞれ異なる結果を与える点は注意が必要である．公平さの基準（目標関数）の微妙な差異がこの結果を生じたと考えられ，この中のどれを選択するか，別な立場からの議論が必要である．

現行の議員定数は，裁判でも争われているように，公正さからほど遠いものであり，たしかに，V法以下，g_j 最適化まで，どの結果とも大きく異なる．しかし，g_3（1票の重みの最大最小比）などでみると，最適な配分法でも，その値をあまり小さくできず，現行の5.26よりは相当良いものの，3.31までにしかできないのは意外な結果ではなかろうか．これは，鳥取県など，有権者数の少ない選挙区にも無条件に1議席を与えることに起因しており，選挙区の区割りや総議員数 N の最検討を含めた抜本的な改変がない限りやむを得ない値である．

最後に，本稿は，月例講演会での講演の抄録であることをお断りしておく．より詳しくは文献［2］を参照いただきたい．

文献

［1］ N. Katoh, T. Ibaraki and H. Mine, Equipollent resource allocation problem with application to optimal apportionment, Working Paper, Kyoto University, 1980.

［2］ 茨木，議員定数の最適配分法，数理科学，209, pp. 52-60, 1980年11月.

次号予告

特集　待ち行列の現状

状態方程式を解く　高橋　幸雄

拡散近似—その考え方と有用性　木村　俊一

最近のネットワーク手法　橋田　温

待ち行列モデルにおけるシミュレーション解法　逆瀬川浩孝

待ち行列アラカルト

事例研究

輸送と輸送コスト管理について　岡田　康幸