# 待ち行列における近似モデル

逆瀬川　浩 孝

## 1. はじめに

待ち行列的現象に限らず，われわれの周りをとりまく環境は時代とともにますます多様化し，そこに生じた問題をモデル解析によって解決しようとすれば，近似の問題を避けて通ることができない状況になっている．ORの手法は問題の多様化のテンポに追いついていけないのが現状で，将来もそう改善されるとは思われないから，現象を忠実になぞって複雑なモデルを構成したとしても，そのモデルは近似的にしか解くことはできないし，あるいはまた，現象を単純化し，解けるモデルを作って解を求めたとしても，それは多くの場合，不満足な近似解にしかならない．後者の場合でも，いずれはそのモデルの説明不足を解消するためにモデルの複雑化という道を歩むことになるだろうから，結局複雑なモデルを近似的に解く，という方法が開発されなければならないだろう．シミュレーションは複雑なモデルを扱える唯一のOR手法といってよいが，ここでも近似の問題が生じる．シミュレーションによる推定の精度は標本数の平方根に比例するが，モデルが複雑になって1つの推定値すなわち標本を得るのにたくさんの乱数が必要になれば，時間的制約によって独立標本を多くとることができなくなり，精度を上げることがむずかしくなる．これを解決するための方策として分散減少法の名のもとに数々のテクニックが開発されているが，その適用範囲は限られており，1つの標本をとるのに要する計算時間を減らすための近似的な解法を考える必要がある．

待ち行列モデルとして定式化される問題は多く，待ち行列論の需要は多いが，解が単純な数式で与えられているという意味で解けるモデルはそれほど多くない．マルコフ表現可能なネットワーク型待ち行列モデルぐらいが最も複雑なもので，それ以外は，強力な専用言語に支えられてはいるが時間のかかるシミュレーションに頼っているのが現状である．その中にあって，いくつかの近似解法が提案されているのでそれらを紹介することにしよう．とりあげた話題は，流体近似，拡散近似，分布の近似，それに平均値の近似である．

## 2. 流体近似

客の到着パターンに対してサービス能力をどのように割りふったら良いか，あるいは到着量とサービス能力の大小によって待ち時間がどのように変化するか，ということはサービスシステムを設計・運用する場合まず問題になるが，これを精密な確率モデルを使って解析する代りに，大雑把にその様子を知るための近似の方法として，流体近似の方法がある．たとえば，到着する客を十分長い間カウントしてその累積度数を小さなグラフに

さかせがわ　ひろたか　筑波大学　社会工学系

書くと部分的な凹凸はほとんどわからず，全体として1つのなめらかな曲線を描くようになる．これは客の流れを，あたかも水流のようにその変化が緩慢な連続的な流れととらえたことに相当している．いわば，平均値でものを考える方法だから，サービス能力が到着率を少しでも上回れば行列長は0になる，というように確率変動が考慮された場合と様相は異なるが，使い方によっては第1近似として十分有効な解を引き出すことができる．

$A(t)$を時刻0から$t$までに到着した客の総数，$D(t)$を同じく退去数とし，$Q(t)$を時刻$t$におけるサービスシステム内の客数（これを系内客数という）とすれば，

$$Q(t)=Q(0)+A(t)-D(t) \tag{1}$$

である．$A(t)$, $D(t)$は確率変数であるが，$t$を十分に大きくとれば，その変動は期待値のスケールに比べて十分に小さく無視することができるという大数の法則を使って，$Q(t)$はほとんどその期待値のまわりに分布しているとみなすのである．$Q(0)+A(t)$と$D(t)$を上述のようにグラフ上に同時にプロットするとなめらかな2本の曲線が得られる（図1）．$Q(0)+A(t)$と$D(t)$の差，すなわち図1で線分ABの長さが時刻$t$における系内客数$Q(t)$を表わしている．また，もし客が到着した順番に退去してゆくものとすれば，図1で線分CDの長さは，$n$番目の退去客の系内滞留時間を表わしていると考えられる．したがって客の待ち時間を少なくするためには，この2つの曲線をなるべく近づけるような方策が望ましいということになる．すなわち，もし到着プロセスが制御できるならば，サービス機構を動かさなくてよいという意味で，なるべく$A(t)$が直線になるように，いいかえればコンスタントに到着するようにすればよいし，到着が制御できないのであれば，その到着の様子に合わせてサービス能力を増減させてやればよいことになる．

たとえば，空港での搭乗手続きカウンターの問

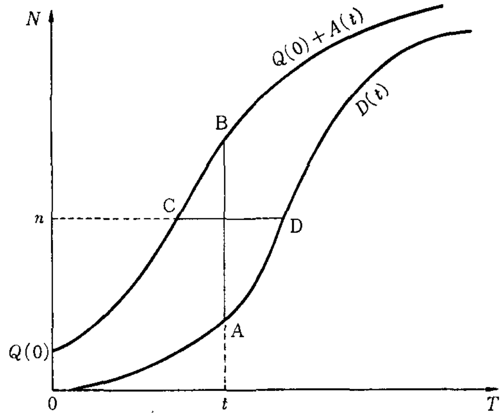


**図1　流体近似**

題にこれを応用すると，ある1機の飛行機の乗客が空港へ到着するパターンは，大体図1のように1つのピークをもったようなものになると思われる．これに対して1人の乗客に対するサービス時間はほぼ一定で，単位時間あたり1つの窓口がさばける客の数は決まっているから，退去客の累積曲線はほぼ直線になると考えてよい．係員を増減することによってこの直線の傾きが変ることから，係員の数が何人ならば出発何分前にサービスを開始すればよいか，というようなことが，$D(t)$の直線を引いてみることによって大雑把に計算できることになる[13]．到着を制御する例として，地下街とかデパートからの緊急避難の場合を考えてみよう．出口付近にきたことをもって到着とし，退去した時にサービスが終了したと考えると，出口の大きさは変わらないから単位時間あたりの退去者数は出口付近の人口密度だけによって決まり，ひしめき合うような状態にならなければほぼ一定と考えてよい．これに対して$A(t)$は客が一時に出口に殺到した場合は左に大きくふくらみ出口付近の混乱が予想され，誘導がうまく行なわれた場合には直線に近いものになろう．これらのことから，混雑の仕方（させ方）と避難完了時間についていろいろな考察ができる[17]．到着・サービスの制御の問題でなしに，平均待ち時間等を推定する問題の例としては，公園・デパートなどの人出調査の例がある．ある1日の入場者数と退場

者数の累積を時間の関数としてグラフ化すると図1のようになるだろう．この時測定が全数調査によるものであれば，図1の線分CDにあたる量はある時刻の滞在者数に正確に一致しているはずである．一方単一窓口モデルと違い，客の到着順と退去順は一致せず，すぐに帰る人，1日中居る人と，1人1人の滞留時間はさまざまであるが，その平均については，図1の線分ABにあたる量を，その時間帯の客の平均滞留時間と考えてよい．このようにして実際に盛り場の人出調査に応用した例が報告されている[17]．流体近似のさらに詳しい話は［13］を参照されたい．

## 2. 拡散近似

実際の待ちの現象が平均値だけでうまく説明しきれないことはいうまでもないことで，さらに詳しく調べるためには流体近似の場合に無視した確率的な変動をとりいれたモデルを作らねばならない．一般に確率過程 $Q(t)$ は複雑で，その分布は過去の多くの情報を知らなければ求めることはできない．しかし，これを前節のように客の流れを平滑化したものを連続過程とみなし，これに連続時，連続状態のマルコフ過程，すなわち拡散過程をあてはめて解析することができる．この方法を拡散近似とよぶ．まず，$Q(t+s)$は$Q(t)$の分布と，$Q(t+s)$の$Q(t)$に対する条件付分布とだけから定まるものを仮定する．一方，待ち行列の長さが，1に比べて十分に大きく，空にならないような時間間隔$[t,t+s)$をとって考えると，その間の到着累計 $A(t+s)-A(t)$，退去累計 $D(t+s)-D(t)$は，近似的に正規分布にしたがっているものと期待できる．したがって $Q(t+s)$ の $Q(t)$ に対する条件付分布は，正規分布と考えてよい．さらにいくつかの自然な仮定を置くと，$Q(t)$の密度関数$f(x,t)$について，次のような拡散方程式が成り立つ．

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)f(x,t))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b(x,t)f(x,t)) \qquad (2)$$

$a(x,t)$，$b(x,t)$は無限小平均・無限小分散とよばれる量で，それぞれ $E(Q(t+dt)-Q(t)\mid Q(t)=x)/dt$，$\mathrm{Var}(Q(t+dt)-Q(t)\mid Q(t)=x)/dt$ の $dt$ を0に近づけた時の極限である．この式を適当な境界条件の下で解き $Q(t)$ の分布を求める，というのが拡散近似の方法である．

たとえば，単一窓口モデルで，到着分布・サービス分布の平均・分散・変動係数がそれぞれ$(m_a, \sigma_a^2, c_a)$，$(m_b, \sigma_b^2, c_b)$である場合を考える．

$$a(x,t)=\frac{1}{m_a}-\frac{1}{m_b}\equiv a,\quad b(x,t)=\frac{c_a^2}{m_a}+\frac{c_b^2}{m_b}\equiv b$$

を(2)に代入し，$x=0$ に反射壁があるという条件の下で解くと，

$$\int_0^x f(u,t)\,du=\Phi\left(\frac{x-(x_0+at)}{\sqrt{bt}}\right)-e^{\frac{2a}{b}x}\Phi\left(\frac{-x-(x_0+at)}{\sqrt{bt}}\right)$$

（ただし，$x_0=Q(0)$，$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数）

と表わすことができるので，これを使って初期条件の影響など，過渡解の様子を調べることができる．また定常分布については，$t\to\infty$ の場合を計算すればよいが，2つの $\Phi(\cdot)$の中はいずれも$+\infty$となるので，結局

$$F(x)=\lim_{t\to\infty}\int_0^x f(u,t)\,du=1-\exp\left\{-\frac{2(1-\rho)}{\rho c_a^2+c_b^2}x\right\}$$

（ただし，$\rho=m_b/m_a$）

という指数分布が得られる．これは，単一窓口モデルの行列長の定常分布が幾何分布であることに符合している．

定常状態だけを考えるならば(2)の左辺は0になるから，$x=0$ に反射壁があるという境界条件の下で(2)が解けて，次のようになる．

$$f(x)=\frac{c}{b(x)}\exp\left\{2\int_0^x\frac{a(u)}{b(u)}du\right\} \qquad (3)$$

（ただし，$f(x)=f(x,\infty)$，$a(x)=a(x,\infty)$，$b(x)=b(x,\infty)$）

無限窓口モデルの場合には，前出の記号を使って，

$$a(x)=\frac{1}{m_a}-\frac{x}{m_b},\quad b(x)=\frac{c_a^2}{m_a}+\frac{c_b^2}{m_b}x$$

と表わされるから，これを（3）に代行して，

$$f(x)=c\cdot re^{-r(x+\alpha)}\frac{(r(x+\alpha))\beta}{\Gamma(\beta+1)} \tag{4}$$

（ただし，$\alpha=\frac{c_a^2}{m_a}\frac{m_b}{c_b^2}, \beta=\frac{2}{m_a}\frac{m_b}{c_b^2}\left(1+\frac{c_a^2}{c_b^2}\right)-1$，

$r=\frac{2}{c_b^2}$，$c$ は $\int_0^\infty f(x)dx=1$ となるように決める）

が得られる．これは，ガンマ分布の左端を打ち切った形をしているが，系内客数が十分に多い場合，すなわち $m_a \ll m_b$ の場合を考えると，

平均 $\frac{\beta+1}{r}-\alpha=\frac{m_b}{m_a}$，分散 $\frac{\beta+1}{r^2}=\frac{c_a^2+c_b^2}{2}\frac{m_b}{m_a}$

の正規分布で近似できるようになる．これはポアソン到着，一般サービスの $M/G/\infty$ モデルにおける系内客数がポアソン分布にしたがっており，その平均 $\frac{m_b}{m_a}$ が大きくなると正規近似できるということとよく合っている．複数窓口モデル $GI/G/s$ の系内客数分布を拡散近似で求めるためには，

$$a(x)=\frac{1}{m_a}-\frac{1}{m_b}\min(x,s),$$

$$b(x)=\frac{c_a^2}{m_a}+\frac{c_b^2}{m_b}\min(x,s)$$

を(2)に代入すればよい．その結果は $x \gtrless s$ によって関数形が変わり，$x<s$ の場合は(4)と同じ形をとり，$x>s$ の場合は指数分布形となる．この場合も無限窓口モデル同様，$s \gg 1$，$m_b \lesseqgtr s\cdot m_a$ の場合は（4）を正規分布で近似できるから，正規分布表を使っていろいろな計算ができる．この正規近似は $s \gg 1$ でなくともよく合っているようである[16]．

多くの待ち行列的な現象はサービス窓口がネットワーク状に配置されたネットワーク型待ち行列モデルとして定式化されるが，このようなモデルの解法は，いろいろな制約条件を課した一部のモデルについてしか与えられていない．これに対し，各窓口間の推移をマルコフ連鎖で近似してその定常分布を求め，これと各窓口ごとに上のようにして得られた拡散過程による近似解とを使って平衡解を求める，という方法も試みられている[8]．

## 4. 分布の近似

拡散近似では，到着分布・サービス分布の1次および2次のモーメントさえわかれば解を導くことができたが，さらに詳しい解析を行なう場合には分布関数の知識が必要となる．どのようなデータをとって，理論分布をどうあてはめるか，というような問題も重要であるが，ここでは，近似の立場から，あてはめられた分布をさらに，解析の容易な分布で近似するということを考える．

待ち行列モデルの解析の1つのスタイルとして，適当な状態空間と推移確率とからマルコフ連鎖を構成し，その状態方程式（Chapman-Kolmogorov の方程式）を解いて解を求める，という方法が広く使われている．このためモデルに含まれる分布はすべて指数分布を仮定する必要があった．これを拡張したのが，相分解法とでもよばれるもので，たとえば，アーラン分布にしたがうサービス時間をもつ窓口を直列型指数サービス窓口として表わし，指数分布の無記憶性を使ってマルコフ連鎖の状態方程式を記述する，というものである．アーラン分布は指数分布（ランダム）と，1点分布（確定的）の中間を埋める1山分布の族で，多くのデータをよく説明できるので，結構実用的ではあったがこれで十分というわけではなかった．

最近ネットワーク型待ち行列モデルの解析に用いられて脚光を浴びたものに Cox 型分布というのがある．これは，そのラプラス変換がある種の有限関数で与えられるような分布で，サービス率の違った指数窓口を直列型につなげ，途中から入ることも，また途中から出ることも許したような待ち行列モデルからの出力の分布として与えられ

るため，相分解法のプログラムに乗せることが可能であった[4]．これをさらに発展させた相型分布が提案されている[19][12]．これは吸収マルコフ過程においてある状態を出発してから吸収するまでの時間の確率分布として与えられるもので，多くの一般分布を近似できることが予想されるが，与えられた分布を相型分布で表現する手順は，経験的なものしかないようである．このように近似できる分布の範囲は広くなったがマルコフ連鎖によって待ち行列モデルを記述する方法は，精密化することによってその状態集合は指数的に増大し，状態方程式を解くことは，特別の場合を除いて不可能になる．しかし，多くの場合，このようにして構成されたマルコフ連鎖の推移行列はほとんどが0で，状態集合を部分集合に分け，その部分集合内部での状態変化に比べ部分集合間の動きが非常に稀にしかおこらない，というようにすることができる．この性質を利用し，各部分集合ごとに仮の平衡方程式を解いて，それをもとに全体の平衡解を求める方法があるが，ここではこれ以上は触れない[3]．

## 5. 平均値の近似

混雑の指標として，何かの特性量の期待値だけを知りたい(求めたい)という場合がある．システム全体の解析を経ることなく，簡単な計算によって，そのような指標が求められるならば，いろいろなパラメータを動かした時の変化の様子を調べて最適なパラメータを選ぶという作業が容易になるであろう．たとえば単一窓口モデル $GI/G/1$ の待ち時間を考えてみよう．$n$ 番目に到着した客の待ち時間を $W_n$, サービス時間を $B_n$, $n$ 番目と $n+1$ 番目の客の到着間隔を $A_n$ とすれば，

$$W_{n+1}=\max(0,\ W_n+B_n-A_n)\equiv(W_n+B_n-A_n)^+$$

という関係が成り立つ．適当な条件のもとで $W_n$ は $n$ を大きくすると平衡状態での待ち時間 $W$ に収束し，平均待ち時間は上の式を使って，

$$EW=\frac{\mathrm{Var}(U)}{2E(-U)}-\frac{\mathrm{Var}(Y)}{2E(-U)}$$

(ただし，$U=B-A$, $Y=-\min(0,\ W+U)$)

と表わすことができる．右辺の第2項の分母・分子はいずれも正の数だから，平均待ち時間 $EW$ は右辺の第1項より大きくないという不等式が成立するが，もし $W$ が非常に大きくて，窓口がほとんど稼動している状態になると，$Y$ がほとんど0となり，$\mathrm{Var}(Y)\approx 0$ とみてよいから，

$$EW\approx\frac{\mathrm{Var}(U)}{2E(-U)}=\frac{\sigma_a^2+\sigma_b^2}{2(m_a-m_b)}$$

(ただし，$(m_a,\ \sigma_a^2)$，$(m_b,\ \sigma_b^2)$ は第3節と同じ)

のように近似ができる，というのが代表的な解析のパターンである[6]．$\mathrm{Var}(Y)$ をどのように評価するかによっていろいろな近似式が導びかれる可能性がある．それらの中には，

$$EW\approx\rho\frac{\sigma_a^2+\sigma_b^2+(m_a-m_b)^2}{2(m_a-m_b)} \qquad [1]$$

$$EW\approx\frac{1+c_b^2}{\rho^{-2}+c_b^2}\frac{\sigma_a^2+\sigma_b^2}{2(m_a-m_b)} \qquad [10]$$

というようなものがある．複数窓口モデル $GI/G/S$ についても，同じような考え方で，

$$EW\approx\frac{s\sigma_a^2+\sigma_b^2+\left(1-\frac{1}{s}\right)m_s^2}{2(s\cdot m_a-m_b)} \qquad [7]$$

$$EW\approx\frac{s^2\sigma_a^2+\sigma_b^2}{2s(s\cdot m_a-m_b)}+\frac{\frac{s-1}{s}\left(1-\frac{m_a}{m_b}\right)^+E(B^2)}{2(s\cdot m_a-m_b)} \qquad [11]$$

などが導びかれている．また，複数窓口モデル $GI/G/s$ で，各窓口の前にそれぞれ待ち合い室を設け，到着客を順番に $s$ 個の待ち合室に振り分けるとすれば，これは到着率を $1/s$ にした単一窓口モデルを $s$ 個同時に解析しているのとほとんど同じになるから，$GI/G/s$ の待ち時間その他をサービス率は同じで，到着率を従来の $1/s$ にした単一窓口モデルで近似できるのではないかという方向からのアプローチもなされている[2][20]．

一方，このような方法とは別に，$M/M/s$, $D/M/s$, $M/D/s$, $E_k/E_l/s$ のように計算のできる

モデルで値を求め，それらの結果から，もっと複雑なモデルの特性量の期待値を予測しようとするデータ解析的なアプローチの仕方がある．たとえば，$M/G/s$ の待ち時間については，古くからよく知られた実験式として次のようなものがある[9].

$$EW_{(M/D/s)} \approx \frac{1+c_b^2}{2} EW_{(M/M/s)}$$

ここで $EW_{(M/M/s)}$ は，$M/G/s$ と同じ到着過程をもち，平均サービス時間が等しい指数サービス窓口をもつモデルでの平均待ち時間を表わす．これはシミュレーションデータから求められたものであるが，これに対して，前節で触れた相型分布サービス時間をもつ系の数値計算データからもっと精密な近似式が提案されている[18].

$$EW_{(M/G/s)} \approx \left(\frac{E(B^\alpha)}{(EB)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} EW_{(M/D/s)}$$

(ただし，$\alpha$ は $E_{(M/M/s)}=(\Gamma(\alpha+1))^{\frac{1}{1-\alpha}} EW_{(M/D/s)}$ の正の根(唯一)).

一般の複数窓口モデル $GI/G/s$ のうち，到着分布もサービス分布も，その変動係数が 1 よりも小さい場合には，$M/M/s$, $M/D/s$, $D/M/s$ の平均待ち時間の 1 次結合として近似的に，

$$EW_{(GI/G/s)} \approx c_a^2 c_b^2 EW_{M/M/s} + c_a^2(1-c_b^2) EW_{M/D/s} + c_b^2(1-c_a^2) EW_{D/M/s} \qquad (5)$$

で与えられるようだ，ということがアーラン分布を使ったいくつかの例で確かめられている[14].

一方，$M/M/s$ の平衡解は解析的に求まっており，平均行列長は分布のパラメータと窓口の数 $S$ との関数で与えられているが階乗を含む面倒な式になっている．これを，

$$ELq_{(M/M/s)} \approx \frac{\rho^{\sqrt{2(s+1)}}}{1-\rho}$$

(ただし，$\rho=m_b/m_a$)

という簡単な式におきかえても，比較的精度よく近似できることが確かめられている．近似式というのは，最終的な結果を出すのが目的ではなく，大雑把な比較のために用いられるのだから，あまり高い精度は要求されないだろう，ということから，この式と(5)式および，

$$EW_{(D/M/s)},\quad EW_{(M/D/s)} \approx \frac{1}{2} EW_{(M/M/s)} \qquad (6)$$

とから，次の近似式が導びかれる．

$$ELq_{(GI/G/s)} \approx \frac{c_a^2+c_b^2}{2} \frac{\rho^{\sqrt{2(s+1)}}}{1-\rho}$$

これは(6)式を使った影響で，ほとんどの範囲で過大評価を与えるが，実用的にみて許容範囲にあることが数値的に確かめられている[15].

ネットワーク型の待ち行列モデルについては計算機の性能評価に関連して多く論じられている．いわゆる積形式解をもつマルコフモデルを実際の計算機システムのモデルとしてあてはめて，待ち行列の長さのような特性量の期待値が測定値とよく合っているという結果が数多く報告されている[5]．これも平均値の近似の一種であろう．

## 6. おわりに

近似解法の多くは経験的 heuristic であり，一般論としての理論はなかなか成立しにくいという事情がある．しかし現実には解くことを要求される複雑なモデルが山積しており，美しい理論展開にこだわらない大胆な近似解法がますます要求されることになるだろう．確率論の一分野としてでなく，ORの中で待ち行列論が生き残るためには，このような要求に答えてゆくことが必要と思われる．

### 参考文献


[1] Bhat, U. N. (1974). Sensitivity analysis of performance measures in some queueing systems, Tech. Comment No. 30-74, Defense Communication Center, Reston Virginia.

[2] Brumelle, (1973), Bounds on the wait in a $GI/M/k$ queue, *Management Sci.*, 19, 773-777.

[3] Courtois, P. J. (1977), Decomposability.

[4] Cox, D. R. (1955), A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes, Proc. Cambridge Philos. Soc., 51,

313-319.

[5] 橘田温他 (1980), 待ち行列ネットワークモデルによる計算機システムの性能評価, 情報処理, **21**. 7, 743-750

[6] Kingman, J. F. C. (1962), On queues in heavy traffic, *J. Royal Statist. Soc.* B, 24, 383-392.

[7] Kingman, J. F. C. (1970), Inequalities in the theory of queues, *J. Royal Statist. Soc.* B, 32, 102-110.

[8] Kobayashi, H. (1974), Application of the diffusion approximation to queueing networks I: Equilibrium queue distributions, *J. Assoc. Comput. Machin.*, **21**. 2, 316-328.

[9] Lee, A. M. et al. (1959), Queueing processes associated with airline passenger check in, *Operat. Res. Quart.*, 10, 56-71.

[10] Marchal, W. G. (1974), Some simple bounds and approximations in queueing, Tech. Mem. T-294, Instit. Management Sci. Engineer., George Washington Univ.

[11] Mori, M. (1975), Some bounds for queues, *JORSJ*, **18**. 3, 152-181.

[12] Neuts, M. F. (1975), Probability distribution of phase type, Liber Amicorum Professor E. H. Florin, 173-206.

[13] Newell, G. F. (1971), Applications of Queueing Theory.

[14] Page, E. S. (1972), Queueing Theory in OR.

[15] Sakasegawa, H. (1977), An approximation formula $L_q \cong \alpha \cdot \rho^\beta / (1-\rho)$, *Annals ISM*, **29**. 1, 67-75.

[16] 逆瀬川浩孝(1977), 待ち行列モデルの拡散近似解法, シンポジウム "待ち行列・信頼性理論とその周辺" 予稿.

[17] 逆瀬川浩孝他(1980), 群集の避難行動のシミュレーション, 暮しのなかの統計学 (青山博次郎編), 81-99.

[18] Takahashi, Y. (1977), An approximation formula for the mean waiting time of an $M/G/c$ queue, *JORSJ*, **20**. 3, 150-163.

[19] Takahashi. Y. et al. (1976), A numerical method for the steady-state probabilities of a $GI/G/c$ queueing systems in a general class, *JORSJ*, **19**. 2, 147-157.

[20] Yu, O. S. (1974), Stochastic bounds for heterogeneous server queues with Erlang service times, *J. Appl. Prob.*, **11**, 785-796.