最小スパニング・ツリー問題とその周辺

石井 博昭

1. はじめに

グラフ $G=(V,E)$を考える. $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ は点の集合, $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ は $V\times V$ の部分集合で点を結ぶ枝の集合である. 図1はグラフの一例である. グラフは枝が方向をもつ場合と, もたない場合があり, 前者を有向グラフ, 後者を無向グラフとよぶ. 以下では主として無向グラフを取り扱い, 無向グラフを単にグラフということにする.

グラフGが次の等価な条件の1つを満足する時

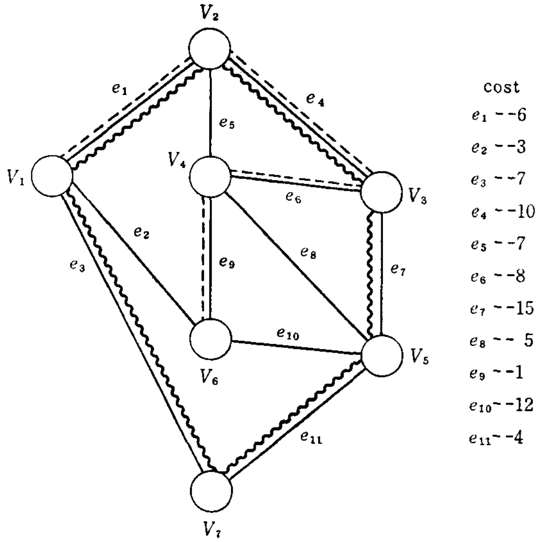


図 1 An example of graph

ツリー(木, tree)という. 図2はツリーの例を示す.

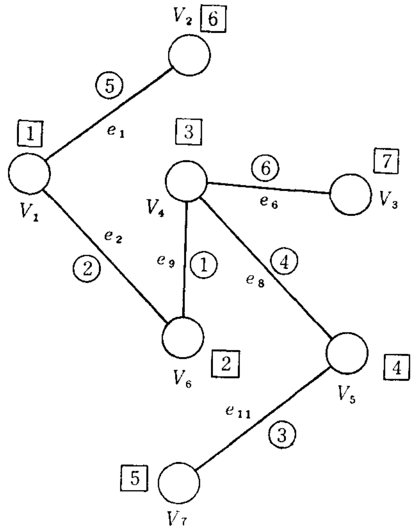


図 2 An example of tree

> **定義1**:(Ⅰ)閉路をもたない連結グラフである.
> (Ⅱ)枝の数が点の数より1本少ない連結グラフである.
> (Ⅲ)どの2点も唯1つの基本パスによって結ばれているグラフである.

ここで, 基本パスとは, 図1のグラフにおいて破線で示した v_1 から v_6 へ e_1, e_4, e_6, e_8 をたどってゆくゆき方のように, どの点, どの枝も, たかだか1回通って, ある点からある点へゆく道のこ

いしい ひろあき 大阪大学 工学部

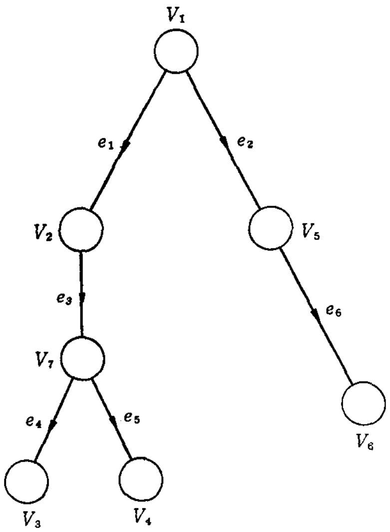


図 3 An example of arborescence

とである．閉路とは，最初と最後の点が同じであることを除いて基本パスである道のことで，図1の波線はその例である．グラフGでどの2点間にも基本パスが存在する時，連結であるといい，連結グラフという．図1のグラフは連結グラフとなっている．(詳しいことは文献［8］などを見られたい．)

同様に，有向グラフに対しては，有向木（あるいは樹木）(arborescence) を次のように定義する．図3はその例である．

> **定義2**：有向グラフGが次の条件(i)(ii)を満足する時，有向木という．
> (i) 根(root) とよばれる点には1本も枝が入ってきていないことを除いて，他の点では入ってくる枝がちょうど1本である．
> (ii) 閉路をもたない．

グラフ理論におけるツリーの概念は最初 G. Kirchhoff［21］によって電気回路との関連で示され，その後 A. Cayley［4］［5］によって，化学異性体との関連で再発見された．彼は，この分野での初期の成果に大きく貢献した．

次にスパニング・ツリー（極大木，spanning tree)を定義する．

> **定義3**：連結グラフGに対するスパニング・ツリーとは，ツリーとなるGの部分グラフ (partial graph) である．ここで部分グラフとは，点の集合はGと同一で，枝の集合がGの枝の集合Eの部分集合であるグラフをいう．

図2のグラフは図1のグラフのスパニング・ツリーの1つである．同様に，有向グラフGに対して極大有向木 (spanning arborescence) とは，有向木である部分グラフをいう．どの2点間にも枝が存在するnコの点からなるグラフ（完全グラフ)に対して，スパニング・ツリーの数はn^{n-2}となる．(［4］)．以下では，この中から，ある基準にしたがって最適なスパニング・ツリーを見出す問題を考える．**2.** では最小スパニング・ツリー問題，**3.** では，その確率版である確率的スパニング・ツリー問題を議論する．次に**4.** で，関連問題を述べ，**5.** で締めくくる．

2. 最小スパニング・ツリー問題

$G=(V,E)$を点の数n，枝の数mの連結グラフとする．さらに，各枝e_iにはコストc_iが付随しているとする．

> **【最小スパニング・ツリー問題】**
> 属する枝のコストの和が最小であるスパニングツリーTを求めよ．

この問題は通信ネットワークやコンピュータネットワークに関連して発生し(［17］，［27］)，巡回セールスマン問題などの他の組合せ問題の部分問題としても利用される(［15］［16］)．また，組合せ問題の中でも優等生であり，多くの効率的アルゴリズムが開発されている(［1，7，10，19，20，22，28，31］)．以後，最小スパニング・ツリー問題をＳＰ，最小スパニング・ツリーをＳＳＴと略記する．

ＳＰに対するアルゴリズムは，本質的には，J. B. Kruskal［22］および R. C. Prim［28］

のアルゴリズムをもとにしている．前者のアルゴリズムは計算手間が最悪の場合0($m\log n$)となり，次のようである．ただし森とは閉路を含まないグラフをいい，これが1つの連結成分となる場合がそのグラフのスパニング・ツリーとなる．

【Kruskal のアルゴリズム】

(ステップ1)：完全に非連結な，nコの点だけからなる森$T=(V,\phi)$を作り，ステップ2へゆけ．

(ステップ2)：Gの枝をコストの小さいほうから並べたリストLを作り，ステップ3へゆけ．

(ステップ3)：リストLに残っている最初の枝から調べて，Tにつけ加えて，閉路を作らないならばTに加え，そうでないならばLから除け．この操作を$(n-1)$本の枝がTにつけ加えられるまで続けよ．それから，TをグラフGのＳＳＴとしてストップせよ．

図2は図1のグラフにこのアルゴリズムを適用して求めたＳＳＴであり，枝の上の○の中の数字は枝がつけ加えられた順番を示す．このアルゴリズムの途中では，Tはいくつかのツリーからなる森であり，枝がつけ加えられるごとに，森の中のツリーの数が1つずつ減少し，最後に1つのツリー，ＳＳＴとなる．つけ加えられる枝は，森の中の異なるツリーを結合させる最小のコストをもつ枝である．

一方 R. C. Prim [28] のアルゴリズムは，1つのツリーを成長させていって，最後にＳＳＴを作る．アルゴリズム中でV_sは現在のツリーを構成する点の集合，E_sはその枝の集合である．

【Prim のアルゴリズム】

(ステップ1)：任意の点$v_s\in V$を選び，$V_s=\{v_s\}$，$E_s=\phi$として，ステップ2へゆけ．

(ステップ2)：各$v_j\notin V_s$から，$v_i\in V_s$への最小のコストをもつ枝$e_{\alpha j}=(v_j,v_{\beta j})$を選び，次に$e_{\alpha j}$の中で最小のコストをもつ枝$e_\alpha=(v_\alpha,v_\beta)$を選んで$V_s=V_s\cup\{v_\alpha\}$，$E_s=E_s\cup\{e_\alpha\}$とせよ．ステップ3へゆけ．

(ステップ3)：$|V_s|=n$ならSST$=(V_s,E_s)$としてストップ．そうでなければステップ2へもどれ．

図1のグラフに対して，Prim のアルゴリズムを用いた場合のＳＳＴはやはり図2のグラフとなる．生成過程はしかし異なり，点の上の□で囲まれた数字がV_sに入った点の順番を示す．

Yao [31], Cheriton & Tarjan [7] 等は，Kruskal のアルゴリズムの実行方法をデータ構造を工夫して改良したものである．彼らのアルゴリズムは計算の手間が最悪の場合0($m\log\log n$)であり，枝が点の数に比べて少ない粗なグラフに対しては現在もっとも良いアルゴリズムである．他方 Prim [28] およびその改良版である Dijkstra[10]のアルゴリズムは最悪の場合0(n^2)となる．

一方で，特殊なＳＰも研究されている．グラフの点が平面上の点であり，その2点間の距離がユークリッドの距離または直角距離 (Rectilinear distance) であるとして，2点を結ぶ枝のコストを表わすとする．ここで，直角距離とは2点のx座標の差の絶対値とy座標の差の絶対値の和である．F. K. Hwang [18] や Shamos & Hoey [29] 等は，0($n\log n$)で平面上の点を結ぶＳＳＴを求めるアルゴリズムを与えている．また，ある1点では，その点に入る枝の数に制約がある場合に，ＳＳＴを求める問題は最初 Glover & Klingman [14] によって研究され，0(n^2)のアルゴリズムが示された．その後 Gabow が彼らのアルゴリズムを改良し，0($m\log\log n+n\log n$)のアルゴリズムを与えた．

最近，R. Chandrasekaran [6] はＳＰを一般化し分数型最小スパニング・ツリー問題を考え，0($m^2\log n$)で最適なスパニング・ツリーを見出すアルゴリズムを与えた．まず，グラフGのスパニング・ツリー$T=(V,S)$は次のように各枝に対応するmコの0−1変数$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$によって表現されることに注意する．

$$T:\begin{cases}x_i=1 & e_i\in S\\ x_i=0 & e_i\notin S\end{cases}$$

逆に枝の集合 $\{e_i|x_i=1\}$ が V とともに G のスパニング・ツリーとなる時，$X=(x_i)$ もスパニング・ツリーとよぶことにする．各枝 e_i にはコスト c_i の他に重み d_i が付随しているとするとき，分数型最小スパニング・ツリー問題は以下のように定式化される．

【分数型最小スパニング・ツリー問題】

$$\mathrm{FP}:\sum_{j=1}^{m}c_jx_j\Big/\sum_{j=1}^{m}d_jx_j\to\text{最小}$$

条件　$x_j=0$ または $1, j=1,2,\cdots,m,$

X：スパニング・ツリー

ＦＰにおいて，$d_j=d$(一定) の時，通常のＳＰとなる．ＦＰは分数計画法における Dinkelbach [11] の手法を利用し，部分問題として λ をパラメータとしてもつＳＰを作り，λ がある条件を満たす部分問題の最適解から解くことができる．Megiddo [24] は離散変数をもつ分数計画問題は，分数型でない原問題が多項式オーダーで解けるなら，やはり多項式オーダーで解けることを示した．この論文[24]の中で彼はＳＰに対する Sollin のアルゴリズム［1, p. 179］を部分問題の解法に用いて，上記のＦＰに対して $0(m\log^2 n\cdot\log\log n)$ のアルゴリズムを与えた．Megiddo や Chandrasekaran の考え方は，3. で述べる確率的スパニング・ツリー問題においても用いられる．

3.　確率的スパニング・ツリー問題

通常のＳＰでは，枝のコスト c_j は定数であるがここでは c_j は平均 μ_j，分散 σ_j^2 の正規分布 $N(\mu_j,\sigma_j^2)$ にしたがう確率変数で互いに独立と仮定する．次のような確率条件をもつスパニング・ツリー問題 P_0 を考えよう([25])．

P_0：$f\to$最小

条件　$$P_r\left(\sum_{j=1}^{m}c_jx_j\leqq f\right)\geqq\alpha \qquad (1)$$

$x_j=0$ または $1, j=1,2,\cdots,m,$

$X=(x_j)$：スパニング・ツリー

ただし，確率レベル α は $1>\alpha>\frac{1}{2}$ とする．確率条件(1)はスパニング・ツリーに属する枝のコストの和が f を越えない確率を α 以上にするという条件である．この条件の下で水準値 f を最小にするスパニング・ツリーを求める問題である．確率条件(1)は，$F(\cdot)$ を標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数，K_α を $\alpha=F^{-1}(y)$ となる最小の y の値とすると，次の確定条件と等価となる．

$$f\geqq\sum_{j=1}^{m}\mu_jx_j+K_\alpha\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2x_j} \qquad (2)$$

(2)の下での f の最小値は $f=\sum_{j=1}^{m}\mu_jx_j+K_\alpha\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2x_j}$ となることから，P_0 は次の確定問題 P と等価となる．

$$P:\sum_{j=1}^{m}\mu_jx_j+K_\alpha\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2x_j}\to\text{最小}$$

条件　$x_j=0$ または $1, j=1,2,\cdots,m$

X：スパニング・ツリー

P を解くために次の補助問題 P_R を定義する．

$$P_R:R\sum_{j=1}^{m}\mu_jx_j+K_\alpha\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2x_j\to\text{最小}$$

条件　$x_j=0$ または $1, j=1,2,\cdots,m$

X：スパニング・ツリー

P_R は R をパラメータとする通常のＳＰであり，枝のコストは $R\mu_j+K_\alpha\sigma_j^2$ である．P の最適解を X^* 各スパニング・ツリーに対して $D(X)=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2x_j}$，$D^*=D(X^*)$ とすると，次の定理は P と P_R の関係を示す．

【定理 1】 P_{2D^*} の最適解 X^{2D^*} は P の最適解 X^* となる．

ここで $i<j$ に対して，

$$R_{ij}=K_\alpha(\sigma_i^2-\sigma_j^2)/(\mu_j-\mu_i)\quad(1\leqq i<j\leqq n) \qquad (3)$$

とする．さらに，$X^L(X^U)$ を各枝のコストが σ_j^2 の時の SST (最大スパニング・ツリー) とし，m_D (M_D) をその値とする．(3)の R_{ij} の中で，$2\sqrt{m_D}\leqq R_{ij}\leqq2\sqrt{M_D}$ (*) であるものを小さいほうから並べて，

$R_1<R_2<\cdots<R_l$ (l は(*)を満足する異なる R_{ij} の数)

とする.

> **【定理2】** $\bar{R}\in[R_i, R_{i+1}]$ に対する $P_{\bar{R}}$ の最適解 $X^{\bar{R}}$ はすべての $R\in[R_i, R_{i+1}]$ に対する P_R の最適解となる.

定理1,2より,各区間の1点および $R=2\sqrt{m_D}$, $R=2\sqrt{M_D}$ で P_R を解き, その解を原問題 P で評価して最適解 X^* を求めればよいことがわかる. 西田 etc [25] はこの問題 P に対して, $0(m^2n^2)$ の計算手間で最適なスパニング・ツリー X^* を見出すアルゴリズムを与えた.

次に別のタイプの確率スパニング・ツリー問題を考えよう. ただし c_j は P_0 と同じ確率変数とする. また, $1>\alpha>\frac{1}{2}$ とする.

> $\underline{B_0}$: f→最小
>
> 条件 $P_r[\max\{c_j \mid e_j\in S\}\leqq f]\geqq\alpha$ (4)
>
> $T=(V, S)$: スパニング・ツリー

$F(\cdot)$を標準正規分布の分布関数とすると, 隘路型確率条件(4)は次の等価確定条件(5)に変換される([26]).

$$\sum_{j=1}^{m}\log F\left(\frac{f-\mu_j}{\sigma_j}\right)x_j\geqq\log\alpha,$$

X : スパニング・ツリー (5)

このことから B_0 は次の確定問題と等価となる.

> $\underline{B}$: f→最小
>
> 条件 $\sum_{j=1}^{m}\log F\left(\frac{f-\mu_j}{\sigma_j}\right)x_j\geqq\log\alpha$,
>
> $x_j=0$ または $1, j=1, 2, \cdots, m$,
>
> X : スパニング・ツリー

B を解くために, パラメータ q をもつ次の補助問題 B^q を利用する.

> $\underline{B^q}$: $\sum_{j=1}^{m}\log F\left(\frac{q-\mu_j}{\sigma_j}\right)x_j$→最大
>
> 条件 $x_j=0$ または $1, j=1, 2, \cdots, m$,
>
> X : スパニング・ツリー

B^q は最大スパニング・ツリー問題である. 最大スパニング・ツリー問題はSPと等価であり, SPに対するアルゴリズムを用いて解くことができる. ここで Z_q を B^q の最適値, (X^*, f^*)を B の最適解とすると, 次の結果を得る.

> **【性質1】** Z_q は q の増加関数である.

> **【定理3】**
>
> (i) $Z_q>\log\alpha\leftrightarrow f^*<q$
>
> (ii) $Z_q=\log\alpha\leftrightarrow f^*=q$
>
> (iii) $Z_q<\log\alpha\leftrightarrow f^*>q$

定理3はFPとその部分問題との関係に類似であり, 目標点が0から $\log\alpha$ に変わる点が異なっている([6], [11] [24]). したがって, 次のようなFPに対する Megiddo のアルゴリズムと類似のアルゴリズムを得る. まず各枝 e_i に対して,

$$c_i(q)=(q-\mu_i)/\sigma_i,\quad i=1, 2, \cdots, m$$

各点 $v_k\in V$ に対して,次のような区分的線形関数

$$g_k(q)=\max\{c_i(q) \mid e_i=(v_k, v_e)\in E\},$$
$$k=1, 2, \cdots, n$$

を定義する. すべての $g_k(q)$ のすべての端点を小さい順に並べて,

$$q_0=-\infty<q_1<\cdots<q_s<q_{s+1}=\infty$$

(S は異なる端点の数)

とする. また, L を f^* の下界, U を上界とする.

【Bに対するアルゴリズム】([26])

(ステップ1) : $Z_{q_h}>\log\alpha$ となる最初の h を求め, $L\leftarrow q_{h-1}$, $U\leftarrow q_h$ とせよ. ステップ2へゆけ.

(ステップ2) : 各点 $v_k\in V$ で $q\in[L, U]$ において $g_k(q)$ を与える枝 e_i をすべて取り, これらの枝から森$(T_1, T_2, \cdots, T_t)$ (T_j はツリー, t はその数)を作れ. ステップ3へゆけ.

(ステップ3) : $t=1$ なら, X^* を次のように作りこの X^* から f^* を以下のように求めてストップ. $t\neq1$ なら, ステップ4へゆけ.

$$\underline{X^*}:\begin{cases}x_i^*=1 & e_i\in T_1\\ x_i^*=0 & e_i\notin T_1\end{cases}$$

$$\underline{f^*}: \sum_{j=1}^{m} \log F\left(\frac{f^*-\mu_i}{\sigma_i}\right) x_i^* = \log \alpha$$

(ステップ4)：各 T_i に対して,

$$g^i(q) = \max\{c_j(q) \mid e_j \text{ は } T_i \text{ と他のツリーを結びつける枝}\}$$

および区間 $[L, U]$ に属する端点を計算せよ．$g^1(q), \cdots, g^t(q)$ のすべての端点を小さい順に並べて,

$$q_0 = L < q_1 < \cdots < q_r = U$$

とせよ．ステップ5へゆけ．

(ステップ5)：$Z_{q_j} > \log \alpha$ となる最初の q_j を求め $L \leftarrow q_{j-1}, U \leftarrow q_j$ とせよ．次に $q \in [L, U]$ において $g^i(q)$ を与える枝を現在の森$(T_1, T_2, \cdots, T_t)$に加えて(閉路ができる時は枝を適当に取る)，森およびその中のツリーの数を更新して，ステップ3へもどれ．

このアルゴリズムは $0(m \cdot \log^2 n \cdot \log \log n)$ で B の最適解を見出す([26])．

4. SPの関連問題

これまでは無向グラフのスパニング・ツリーを考えてきたが，有向グラフに対する極大有向木(SAと略記する)を考えよう．有向グラフのSAの中で枝のコストの和が最小であるSA(BSAと略記する)を求める問題は真鍋&小谷氏[23]等により研究され効率的アルゴリズムが与えられている．BSAは次に述べる最大 Branching を利用して求めることもできる．

有向グラフ G の Branching とは閉路を含まず各点には高々1本しか枝が入ってこないような部分グラフのことである．各枝 e_i に重み d_i がついている時，枝の重みの和が最大となる Branching を求める問題が最大 Branching 問題である．Chu & Liu [9], Edmonds [12], Bock [2] はこの問題に対して効率的アルゴリズムを与えた．また Tarjan [30] は彼らのアルゴリズムの実行方法を改善し，$0(m \log n)$ のアルゴリズム(密なグラフ，すなわち枝の多いグラフでは$0(n^2)$)を示した．一方，P. M. Camerini et al. [3] は，この Tarjan のアルゴリズムを部分アルゴリズムとして用いて，k 番目に重み和が大きいSAを計算する $0(Km \log n)$ のアルゴリズムを開発した．これらのアルゴリズムはいずれも最大マッチング問題に対する Edmond のグラフ縮約の考えを用いている．

5. おわりに

最小スパニング・ツリー問題および確率的スパニング・ツリー問題を中心として，各種のスパニング・ツリーに関連した組合せ問題を紹介した．ここで紹介した問題は組合せ問題の中では取り扱いやすい問題である．その理由の1つとして，greedy なアルゴリズムで最適解を見出せることがあげられる．しかし，最小スパニング・ツリー問題に，各点での次数制約，すなわち枝の数に制限を設けるとか，BSAを求めるのに入ってくる枝の数ばかりでなく出てゆく枝の数にも制約を加えるとかすると，解くのに困難な問題となる．特に後者の問題が解けると，組合せ問題の難問中の難問である巡回セールスマン問題が解けることになる．

すなわち問題の難かしさでいえば，SAが一番やさしく，greedy な方法で解ける．またSAの有向グラフ版というべき最小spanning arborescence 問題では，マッチング問題のような交代道(alternating path)を用いるアルゴリズムが必要である．そして，SAに次数制約がつくと，途端に難かしくなり，NP完全となる．

末筆となりましたが，京都大学茨木俊秀助教授には，この稿をまとめるにあたって大変お世話になりました．また，大阪大学西田教授，田畑助教授には常日ごろ研究上いろいろご指導いただいております．ここに感謝する次第であります．最後になりましたが，この方面の研究を一緒にしております大阪大学大学院生一森哲夫氏にもいろいろ

ご尽力いただきました．有難く思っております．

参考文献

[1] Berge C. and A. Ghouila-Houri, Programming, Games and Transportation Networks, John-Wiley, New York, 1965.

[2] Bock, F., An Algorithm to Construct a Minimum Directed Spanning Tree in a Directed Network, Development in Operations Research, Gordon and Breach, New York, 1971.

[3] Camerini, P. M., et al., "The K Best Spanning Arborescences of a Network," *Networks* **10**, 1980, pp. 91-110.

[4] Cayley, A., "On the Mathematical Theory of Isomers," *Philosophical Magazine* **67**, 1874, p. 444.

[5] Cayley, A., Collected papers, *Quart Jl of Mathematics* **13**, 1897, p. 26.

[6] Chandrasekaran, R., "Minimum Ratio Spanning Trees," *Networks* **7**, 1977, pp. 335-342.

[7] Cheriton, D. and R. E. Tarjan, "Finding Minimum Spanning Trees," *S. I. A. M. J. Comput.* **5**, 1976, pp. 724-742.

[8] Christofides, N., Graph Theory : An Algorithmic Approach, Academic Press, 1975.

[9] Chu, Y. J. and T. H. Liu, "On the Shortest Arborescence of a Directed Graph", *Sci. Sinica* **14**, 1965, pp. 1396-1400.

[10] Dijkstra, E. W., "A Note on Two Problems in Connection with Graphs", *Numeri. Math.* **1**, 1959, pp. 269-271.

[11] Dinkelbach, W., "On Nonlinear Fractional Programming", *Man. Sci.* **13**, 1967, pp. 492-498.

[12] Edmonds, J., "Optimum Branchings", *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **71**B, 1967, pp. 233-240.

[13] Gabow, H. N., "A Good Algorithm for Smallest Spanning Trees with a Degree Constraint", *Networks* **8**, 1978, pp. 201-208.

[14] Glover, F. and D. Klingman, "Finding Minimum Spanning Trees with a Fixed Number of Links at a Node," Report No. 74, University of Texas, 1974.

[15] Held. M. and R. M. Karp, "The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees," *Operations Research* **18**, 1970, pp. 1138-1162.

[16] Held. M. and R. M. Karp, "The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees : part II," *Mathematical Programming* **1**, 1971, pp. 6-25.

[17] Hu. T. C., "Optimum Communication Spanning Trees," *S. I. A. M. J. on Computing* **13**, 1974, pp. 188-195.

[18] Hwang F. K., "An $0(n \log n)$ Algorithm for Rectilinear Minimum Spanning Trees," *Journal of A. C. M.* **24**, 1979, pp. 177-182.

[19] Johnson, D. B.," Priority Queues with Update and Finding Minimum Spanning Trees," *Information Processing Letters* **4**, 1975, pp. 53-57.

[20] Kerschenbaum A. and R. V. Slyke, "Computing Minimum Spanning Trees Efficiently," Proc. 25th Ann. Conf. ACM. (Boston August 1972) 1 pp. 518-527.

[21] Kirchhoff. G., In Annalen der Physik and Chemie 72, 1847, p. 497.

[22] Kruskal, J. B. Jr. "On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem," Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 1956, pp. 48-50.

[23] 真鍋龍太郎，小谷重徳，"有向グラフの全長最小の木を求める方法"，経営科学 17巻5号，1973, pp. 269-278.

[24] N. Megiddo, "Combinatorial Optimization with Rational Objective Functions," *Mathematics of Operations Research* **4**, 1979, pp. 414-424.

[25] 西田，石井，塩出，"A Stochastic Spanning

Tree Problem," OR学会1979年度 春季研究発表会アブストラクト集, pp. 157-158.

[26] 西田, 石井, 塩出, "A Stochastic Bottleneck Spanning Tree Problem," OR学会1980年度春季研究発表会アブストラクト集, pp. 46-47.

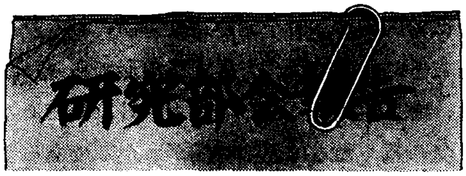
[27] Papadimitrion, C. H., "The Complexity of the Capacitated Tree Problem," *Networks* **8**, 1978, pp. 217-230.

[28] Prim, R. C., "Shortest Connection Networks and Some Generalization," *Bell System Tech. J.* **36**, 1957, pp. 1389-1401.

[29] Shamos, M. I., and D. Hoey, "Closest Point Problems," Proc. 16th Annual Symp. Foundations of Computer Sci. 1975, pp. 151-162 (available from IEEE, New York).

[30] Tarjan, R. E., "Finding Optimum Branchings," *Networks* **7**, 1977, pp. 25-35.

[31] Yao, A. C., "An $0(|E|\log\log|V|)$ Algorithms for Finding Minimum Spanning Trees," *Information Processing Letters* **4**, 1975, pp. 21-23.



●経営コンサルタント●

第4回研究会は7月5日（土）14～17時於八丁堀東京都勤労福祉会館で開かれました．上田亀之助会員が「コンサルタントの側から経営を見る」という題で発表をいたしました．出席者数15名．

第5回研究会は8月2日（土）14:30～17:30於学士会分館（東大赤門右側）で開かれました．

雨宮幸雄会員が「電力とOR」いうテーマで発表をなさいました．出席者数13名．

第6回研究会は9月6日（土）14～17時於東京都勤労福祉会館（八丁堀）で開かれました．

日本下水道事業団の野田正弘氏が「日本の下水道と経営」というテーマで発表なさいました．出席者10名．

第7回　10月4日（土）14:00～17:00

場所：東京都勤労福祉会館，出席者9名

東洋ガラス㈱技術部　工学博士　岸上弘会員が「マネージメント・サポート・システムの導入について」という題で発表され，出席会員間で密度の高い情報がかわされました．

第8回　11月1日（土）14:00～17:00

場所：東京都勤労福祉会館，出席者10名．

小野勝章事務所の小島光造会員（日本における社会システム分析研究部会主査）が「高令化にともなうヒューマン・リソース・マネージメント」について発表され，熱心な討議がかわされました．

●予　測●

場所：早稲田大学システム科学研究所　15F

時間：18:00～20:00

第1回　4月15日（火）　出席者　9名

各自，自分のやってきた仕事と，これからの興味を，予測の観点より述べ，自己紹介を行なう．その後，自由討論．

第2回　5月20日（火）　出席者　10名

テーマ：公害設備投資の予測（西野教授）

モデルの基本的な考えとして (1) 公害設備投資は今年のGNPと，タイムラグ付の苦情件数に依存する．(2) 苦情件数は，これまでの公害投資の総量と油の使用量の関数である．(3) 油の使用量はGNPに依存する．

苦情件数は，78年白書よりとった．

一般投資と公害投資との区別の難しさ，あるいは制度，法制化の影響をモデルに入れたいなどの意見が出た．

第3回　6月24日（火）　出席者　7名

テーマ：予測精度向上の在庫におよぼす影響

（浪平氏：ブリヂストンタイヤ）

あるシステムの標準在庫は，システムへの入力状況，出力状況，制御システムおよび保持すべきサービス率により決まる．入力状況が予測に対する誤差分布関数として与えられ，制御が計画期間ごとに行なわれる場合につき，予測の精度向上と標準在庫との数値関係をみた．

第4回　9月9日（火）　出席者　9名

テーマ：選挙予測（太田教授）

事前調査で2万4千から5万程度の人を全国より無作為に選び，各候補につき県別に得票分布を得る．それを多変量解析により修正し，それをまた記者が修正する．結果としては，記者よみの入らぬほうがよかった．開票の各時点での予測は，既得票数に残り票を最初の確率で割り振ったものを足して行なう．