総合報告

最近の多目的決定理論の動向

竹田 英二

1. はじめに

多目的意思決定の必要性が唱えられてから久しい．今日まで，オペレーションズ・リサーチを中心として多目的数理計画法，政策科学を中心として公共的意思決定，システム・制御工学を中心に多目的システムの最適化理論，経済学・心理学を中心に多属性効用理論というように広領域にわたって共通の構造をもった多目的決定問題が扱われ，いくつもの解の概念や意思決定者の選好構造の表現に関する理論が生まれている．

ここでは特に最近の10年間に進歩のいちじるしい多属性効用理論と対話形計画法を重点に数々のアプローチの特徴とその応用について概観する．

2. 有効解

2.1 有効解の性質

1951年に Koopmans [53] が有効点(efficient point)の概念を導入し，Kuhn-Tucker [54] がベクトル最大化問題における有効解* (efficient solution) の条件を与えた先駆的業績により今日の多目的決定理論の基礎が確立されたといえる．

ベクトル最大化問題は形式的に，

$$V\text{-}\max f(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x)) \qquad (1a)$$

$$\text{制約条件}：x \in X=\{x \in R^n \mid g_j(x) \geqq 0 \quad j=1,2,\cdots,m\} \qquad (1b)$$

と表わされる．ここで V-max は各目的関数 f_i を最大にしたいことを意味する．

有効解 $x^0 \in X$ は，

$$f(x) \geq^{**} f(x^0)$$

となる $x \in X$ が存在しない解をいう．

有効解をさらに詳しく議論すれば，ある目的関数を1次の次数で増大させるのに犠牲となる目的関数の減少は2次以上の次数ですむようなものも存在する．このような有効解は明らかに選好解 (preferred solution) の候補としては望ましくない．そこで Kuhn-Tucker[54] は各 $f_i(i=1,2,\cdots,p)$, $g_j(j=1,2,\cdots,m)$ の微分可能性と制約規定(constraint qualification)のもとで，これらを除外する真有効解(proper solution)を次のように定義し，その必要十分条件を与えている．

真有効解 $x^0 \in X$ は，有効解であってかつ，

$$\nabla f(x^0) \cdot y \geq 0$$

$$\nabla g_j(x^0) \cdot y \geqq 0, \quad j \in J=\{j \mid g_j(x^0)=0, \quad j=1,2,\cdots,m\}$$

となる $y \in R^n$ が存在しないものをいう．ここで，

$$\nabla f(x^0)=\begin{bmatrix} \nabla f_1(x^0) \\ \nabla f_2(x^0) \\ \vdots \\ \nabla f_p(x^0) \end{bmatrix}$$

である．真有効解でない有効解はすべて前述の意味で不都合になることは後に Klinger [51] によって示されている．

Geoffrion [33] は Kuhn-Tucker の真有効解でも，限界利益が限界損失に比べていくらでも大きくできる解が存在する有効解が除けないことを指摘し，これら不都合な有効解をすべて排除するものをあらためて真有効解 (properly efficient solution) と呼んでいる．すなわち，

$x^0 \in X$ が真有効解であるとは，x^0 は有効解でかつ次のような $M>0$ が存在することである．

各 $f_i(i=1,2,\cdots,p)$ について，$f_i(x)>f_i(x^0)$ となる $x \in X$ には必ず $f_j(x)<f_j(x^0)$ で，

$$\frac{f_i(x)-f_i(x^0)}{f_j(x^0)-f_j(x)} \leqq M$$

* 有効解はまたパレート解 (Pareto-optimum solution)，非劣解 (noninferior solution) とも呼ばれる．

** $\geq$ は $\geqq$ でかつ $\neq$ を意味する．

たけだ えいじ 神戸商科大学

となる f_j が存在する．

これからわかるように，この定義には Kuhn-Tucker のそれのような微分可能性も制約規定もいらない．もしそれらの仮定が満たされると，Geoffrion の真有効解はまた Kuhn-Tucker の意味でも真有効解になっている[33]．以降単に真有効解といえば Geoffrion の定義をさすことにする．

2.2 多目的線形計画法

問題(1)で f_i，g_j がすべて線形である多目的線形計画問題では有効解はすべて真有効解であることは Isermann [41] によって示されている．また，一般に，X を凸集合，各 f_i は凹関数とすると，$x^0 \in X$ が真有効解である必要十分 [33] は，x^0 が，

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x) \qquad (2)$$

の最適解となる $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)>0$ が存在することである．この定理は λ をパラメトリックに動かせば有効境界*(efficient frontier)が求まることを示している．意思決定者の選好構造がまったくわからないときは，解の概念として有効解以上のものはなく，特に多目的線形計画問題では，有効解はすべて有効端点から表現できることからこの定理を基礎とした効率的に有効端点を求める多目的線形計画法が次々に発表された．たとえば，可能解がすべて有効解かどうかを簡単に判定する方法[8]，有効端点かどうかの判定[63]，有効端点があるかどうかの判定およびそれを1つ求める方法[17]，有効端点をすべて求めるアルゴリズム[18, 22, 42, 63, 85]，有効境界を求めるアルゴリズム[19, 86]，などである．

ところで，小さな問題でも有効端点の数は多く，これらすべてを対等に意思決定者に提示することは現実的でない．そこで有効解の全体をより小さな部分集合に絞る方法も提案されている[3, 70]．この場合簡単な意思決定者からの選好情報を必要とすることはいうまでもない．

Rio Colorado 流域開発計画[13]，多目的産業配置[44]，消防署配置計画[13]，マンパワー計画[71]などに有効解の応用例がある．

2.3 優越構造

Yu [83] は有効解から選好解までの背後にある選好の仮定の強さがわかる優越構造 (domination structure) を提唱している．すなわち，目的空間 $Y=f(X)=\{y=f(x)\,|\,x \in X\}$ の各点に，$y' \neq y$ で $y' \in y+D(y)$ ならば $y \succ^{**} y'$ となる集合 $D(y)$ を対応させる．$\{D(y)\,|\,y \in Y\}$ を優越構造という．また，$y^0 \in Y$ が優越解であるとは，$y^0 \in y+D(y)$ となる $y \neq y^0$，$y \in Y$ が存在しないときをいう．

有効解に対する優越構造は

$$D(y)=\Lambda^{\leqq}=\{d \in R^p\,|\,d \leqq 0\}, \quad \forall y \in Y,$$

凹性効用関数 $v(\cdot)$ を仮定するときは，

$$D(y)=\{d \in R^p\,|\,\nabla v(y)\cdot d \leqq 0\}, \quad \forall y \in Y$$

が優越構造である．

錐凸性 (cone convexity) という部分方向での凸性を必要とする弱い条件で優越解についての(2)式に相当する関係式が導びかれている．もっと一般に $D(y)$ が凸集合[9]，ファジィ凸錐[72]をもつ優越解や，コントロール問題における優越構造[84]が論じられている．

3. 選好解

1960年代に入って，全体の選好構造を事前に明らかにし選好解を求める方法が登場してきた．その最初のものに Charnes-Cooper[12]による目標計画法があり，後に Ijiri[40] によって優先順位係数 (preemptive priority factor) が導入され，満足化基準 (satisficing principle)をとりいれた多目的計画法として今日まで広く応用されている．最近ではたとえば，土地利用計画[80]，農場計画[81]，生産計画[30]，予算編成[56]，ネットワーク構造をもった目標計画法[65]がある．その他については，福川[31]，Ignizio[38, 39]，Lee[55] を参照されたい．

目標計画法の確立とほぼ同じ頃, von Neumann-Morgenstern[77] の期待効用理論に端を発した基数効用関数 (cardinal utility function) に分解定理を中心とする多属性効用理論*** (multiattribute utility theory) が誕生し，1970年代に入って急速に発展した．この基数効用関数にもとづく多属性効用理論では，代替案と結果の間の不確実性が扱え，意思決定者の危険に対する態度が表現できるのが大きな特徴である．

1970年代に入って，これまでのような事前に全体の選好構造を明らかにするのではなく，選好解の探索過程で局所的に選好構造を明らかにしていく対話形計画法が登場してきた．これにはタイムシェアリング・システムの発達が大きく影響していることはいうまでもない．

意思決定者に要求される判断の程度によって，基数的

* 非劣集合(noninferior set)ともいう

** 関係 $\succ$ は“より好ましい”を意味する

*** 序数効用関数(ordinal utility function)にもとづく多属性効用理論については，たとえば，Huber[36]，Keeney-Raiffa[49] 参照．

判断を必要とするアプローチ（たとえば限界代替率にもとづく Geoffrion 他[34], Oppenheimer[62]), 序数的判断を必要とするアプローチ（たとえば代理価値関数法[35]), yes-no 判断でよいアプローチ（たとえば対話形多目的線形計画法[87], 対話形座標軸方向最適化法[57]）がある．

3.1 多属性効用理論

p個の属性 $X=(X_1, X_2, \cdots, X_p)$があり，ある代替案を選択したときの結果は $x=(x_1, x_2, \cdots, x_p)$, $x_i \in X_i$ で表わされるとする．基数効用関数 $u(x)$が存在する公理[77]は満たされていることが前提となる．

この $u(x)$ の効用分解表現を与えるため数々の独立性の概念が導入されている．たとえば，加法独立性(value independence) [25], 効用独立性 (utility independence)[48, 64], 一般効用独立性(generalized utility independence) [27, 29], 双独立性(bilateral independence)[27], 断片独立性(fractional independence[23], 凸依存性(convex dependence)[74, 75], 補間独立性 (interpolation independence) [5, 6] などである．

とりわけ，Keeney[48] の加法・乗法表現定理は条件である選好独立性 (preference independence) と効用独立性の検証が，２つの属性間の選好と１つの属性の上のくじ (lottery) のみを考えればよく，意思決定者の負担が大幅に軽減されることからこれを用いたいろいろの応用が試みられている[14, 20, 21, 46, 47, 52, 82]. いま，

$$\overline{X}_i=(X_1, X_2, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_p)$$

$$\overline{X}_{ij}=(X_1, X_2, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_p)$$

と表わせば，属性の組(X_i, X_j)が $\overline{X}_{ij}$ と選好独立とは，$\overline{X}_{ij}$ をあるレベル $\bar{x}_{ij}$ に固定して(X_i, X_j)の上での結果 (x_i, x_j) の選好順序を考えるとき，その選好順序が固定したレベル $\bar{x}_{ij}$ に依存して変化しないときをいう．また属性 X_i が $\overline{X}_i$ と効用独立とは，$\overline{X}_i$ をあるレベル $\bar{x}_i$ に固定して X_i 上のくじの選好順序を考えるとき，その選好順序が固定したレベル $\bar{x}_i$ に依存して変化しないときをいう．

各属性X_iについて最も好ましいレベルを x_i^*, 最も好ましくないレベルを x_i^0 で表わせば，$p \geqq 3$ のとき Keeney [48] の加法・乗法表現定理は次のように表わされる．

もしある属性 X_l について，属性の組(X_l, X_i), $i=1, 2, \cdots, p$; $i \neq l$ が $\overline{X}_{li}$ と選好独立でかつ X_l が $\overline{X}_l$ と効用独立であれば，

$$u(x)=\sum_{i=1}^{p} k_i u_i(x_i)+K\sum_{i=1}^{p}\sum_{j>i}^{p} k_i k_j u_i(x_i) u_j(x_j)$$
$$+K^2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j>i}^{p}\sum_{m>j}^{p} k_i k_j k_m u_i(x_i) u_j(x_j) u_m(x_m)$$
$$+\cdots+K^{p-1} k_1 k_2 \cdots k_p u_1(x_1) u_2(x_2) \cdots u_m(x_m)$$

である．ただし，

$u(x^0)=u(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_p^0)=0$, $u(x^*)=u(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_p^*)=1$, であり $u_i(x_i), i=1, 2, \cdots, p$ は正規化された条件付単一属性効用関数である．また定数 k_i, K は，

$$k_i=u(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_i^*, \cdots, x_p^0)$$

$$1+K=\prod_{i=1}^{p}[1+K k_i]$$

を満たすものである．ここでもし $\sum_{i=1}^{p} k_i=1$ なら，$K=0$ となり加法効用関数

$$u(x)=\sum_{i=1}^{p} k_i u_i(x_i)$$

が得られ，もし $\sum_{i=1}^{p} k_i \neq 1$ なら $K \neq 0$ となり乗法効用関数

$$1+K u(x)=\prod_{i=1}^{p}[1+K k_i u_i(x_i)]$$

が得られる．

$p=2$ のときは，X_1 が X_2 と効用独立でかつ，X_2 が X_1 と効用独立であればやはり上記の関係式が成り立つ[45].

この Keeney の加法・乗法表現定理を実際に適用するには，i)属性の決定，ii)各代替案と結果の間の確率の推定，iii)選好独立・効用独立性の検証，iv)各単一属性効用関数の同定，v)定数 k_i の推定，vi)定数 K の決定，vii)期待効用を求める，という手続きをとるがそれらをコンピュータの対話でできる MUFCAP[50] も開発されている．

ところで現実の問題では効用独立性が満たされない状況も多いのでもっと広範囲に扱える表現定理も必要になる．最近，田村・中村[74, 75]は，一般効用独立性（したがって効用独立性）や双独立性を特別な場合として含む凸依存性の概念を導入し，最も一般的な表現定理を導びいている．

２属性空間を $Y \times Z$ とし，任意に $z \in Z$ を与えたときの属性 Y 上の正規化された条件付効用関数を $u_z(y)$, すなわち，

$$u_z(y)=\frac{u(y, z)-u(y^0, z)}{u(y^*, z)-u(y^0, z)}$$

とする．

いま任意の $z \in Z$ と $z_i \in Z (i=0, 1, \cdots, m)$, $z_i \neq z_j (i \neq j)$について，

$$u_z(y)=\sum_{i=0}^{m} \lambda_i(z) u_{z_i}(y),$$

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(z)=1,\ \lambda_i(z)\geqq 0,$$

$$\lambda_i(z_j)=\delta_{ij}(i,j=0,1,\cdots,m)$$

ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ，と表わせるとし，そのような m のうちの最小のものを n とすれば，属性 Y は Z に第 n 凸依存性(n-th order convex dependence)をもつといわれ，$Y(CD_n)Z$ で表わす．

この凸依存性の検証は，正規化された条件付効用関数の形状の変化に着目し，それまでに得られているものの凸結合* で表現できるかどうかを調べ，できなければ次々に条件レベルを変えて正規化された条件付効用関数をつくっていけばよいので簡単である．

特に，$Y(CD_1)Z$，$Z(CD_1)Y$ が検証されたとすると，

$$u(y,z)=u(y^0,z)+u(y,z^0)+\frac{f(y^*,z)f(y,z^*)}{f(y^*,z^*)}+kG(y,z^*)H(y^*,z),$$

ただし，

$$f(y,z)=u(y,z)-u(y,z^0)-u(y^0,z),$$

$$G(y,z)=u(y^*,z^0)f(y,z)-u(y,z^0)f(y^*,z),$$

$$H(y,z)=u(y^0,z^*)f(y,z)-u(y^0,z)f(y,z^*),$$

と表現される．この右辺は4つの正規化された条件付効用関数

$u_{z^0}(y)$，$u_{z^*}(y)$，$u_{y^0}(z)$，$u_{y^*}(z)$ のほかに4隅の(y^0,z^0)，(y^0,z^*)，(y^*,z^0)，(y^*,z^*)の効用値と他の任意の1点(y,z)の効用値を決定するだけで完全に決まる[76]．さらに p 属性にも拡張できることが [74] に示されている．

Bell[5,6] は田村・中村と独立に，凸依存性の特別な場合にあたる第1凸依存性を補間独立性と呼び，統一的な分解表現を与えている．

応用は，メキシコ空港問題[46]，ニューヨーク市の大気汚染コントロール[21]，消防車の応答時間の効用関数[47]，電力輸送システムにおける設備選択[14]，New Brunswick の森林害虫駆除[4]，土地利用[20,82]，環境・公害[52]，教育計画[16]などがある．

3.2 対話形計画法

1970年代に入って，タイムシェアリングの時代にふさわしい対話形アプローチが誕生した．その特徴は事前に選好を表わす選好関係や効用関数を仮定しないことであり，意思決定者がコンピュータと対話しながら，自己の選好についての局所的な情報を送り選好解を探索する方法である．大別して，i)陰に効用関数を仮定する，ii)多目的線形計画法を利用する，iii) Lagrange 乗数法を利用する，iv) 2項選好関係にもとづく，v)その他，のアプローチに分類できる．

i)陰に(序数)効用関数を仮定するアプローチ

対話形計画法の先駆的役割りを果したものに Geoffrion 他[34]による限界代替率(marginal rate of substitution)を推定し陽に表現できない効用関数 $v(\cdot)$ を局所的に形成していく方法がある．

$$\max_{x\in X} v(f(x))=v(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x))$$

において．制約領域 X はコンパクトな凸集合，各 f_i は連続微分可能な凹関数，陽に表現できない効用関数 $v(\cdot)$ は連続微分可能な凹関数で基準となる目的関数 f_1 についての増加関数と仮定する．よく知られた Frank-Wolfe のアルゴリズムにもとづいている．すなわち，

ある試行解 $x^k\in X$ が与えられると，

$$\max_{x\in X}(1,w_{12},w_{13},\cdots,w_{1p})f'(x^k)\cdot y$$

を求め，その最適解 y^k から $v(\cdot)$ を増大させる方向

$$d^k=y^k-x^k$$

を求める．ここで，

$$f'(x^k)=(f_{ij}),\ f_{ij}=\partial f_i/\partial x_j$$

であり，w_{1i} は f_i と f_1 の限界代替率

$$w_{1i}=\frac{\partial v}{\partial f_i}\Big/\frac{\partial v}{\partial f_1}$$

である．この w_{1i} は，十分小さな Δf_1^k，Δf_i^k について，

$$(f_1^k,f_2^k,\cdots,f_p^k)\text{と}(f_1^k-\Delta f_1^k,f_2^k,\cdots,f_i^k+\Delta f_i^k,\cdots,f_p^k)$$

ただし $f_i^k=f_i(x^k)$，が同じ無差別曲線上にあれば，

$$w_{1i}\fallingdotseq\frac{\Delta f_1^k}{\Delta f_i^k},$$

であることから，"第 i 目的関数の値を Δf_i^k だけ増大させるのに第1目的関数の値はどれだけ犠牲にできるか" という質問に答えれば，それが Δf_1^k である．またその方向にどれだけ進むかは，$0=t_0<t_1<\cdots<t_m=1$ に対して，

$$f(x^k+t_0d^k),\ f(x^k+t_1d^k),\cdots,f(x^k+t_md^k)$$

のうち最も好ましい $f(x^k+t_kd^k)$ を指定してやれば，次の試行解 $x^{k+1}=x^k+t_kd^k$ が決まる．この手続きを満足のいくまで繰り返す．

意思決定者の負担を考慮して，簡単な比較判断で限界代替率を推定できる APL タイムシェアリングルーチン[15]も用意されている．また大局的に用いられる代表的な効用関数を局所的に代用関数として用いる方法も Oppenheimer[62] によって提案されている．探索過程で代用関数のパラメータを修正していくが，これを現在の試行解の限界代替率と直前の限界代替率を使って推定するので Geoffrion 他[34] の方法と質問の手間は変らず収束が早いのが長所である．Barber[2] は Geoff-

* 定義からわかるように係数 $\lambda_i(z)$ は非負である必要がない広義の意味で用いられていることに注意

rion 他[34] の方法を用いて Germantown の土地利用計画を評価している.

ii)多目的線形計画法を利用するアプローチ

i)のアプローチは限界代替率の信頼性が本質的な役割りを果していた. ところで意思決定者が限界代替率を答えることは困難な作業であることはいろいろと指摘されているとおりである[78, 87]. Zionts-Wallenius[87]は意思決定者の負担を重要視し, 単に提示されたトレードオフに yes か no で答えさえすればよい方法を提案している.

各目的関数 $f_i(x)$は凹, 制約領域 Xは凸集合でよいがいずれも線形制約で近似し, 多目的線形計画法に帰着させる. すなわち, 制約領域は,

$$Ax=b,\ x\geqq 0$$

で, 目的関数 $u_i=f_i(x),\ i=1,2,\cdots,p$ は,

$$u_i\leqq f_i{}^j\cdot x+g_i{}^j,\ j=1,2,\cdots,t(i)$$

で近似する. 陽に表現できない効用関数 $v(\cdot)$は線形(凹関数に拡張できる) と仮定する.

最初, 任意の正のウエイト λ によって上の制約のもとに,

$$\max\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i$$

を解き, 1つの有効端点を求める. 次に対応する多目的シンプレックスタブローにおいて, 非基底変数 $x_k\in N_B$ (非基底変数の集合)を有効変数と非有効変数にわける. それには, x_k の各目的関数 u_i に対する reduced cost を t_{ik} とすれば,

$$z_k=\min\sum_i t_{ik}\lambda_i$$

制約条件:イ) $\sum_i t_{ij}\lambda_i\geqq 0,\ x_j\in N_B,\ j\neq k$

ロ) $\sum\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqq 0$

ハ) これまでに得られている λ の制約(A)

を解き, $z_k<0$ なら x_k は有効変数である.

有効変数 x_k のおのおのについて, 意思決定者にトレードオフ $(t_{1k},t_{2k},\cdots,t_{pk})$ を提示し好むか好まないかを yes, no で答えてもらう. 次にその結果から,

a) yes については, $\sum_i t_{ik}\lambda_i\leqq -\varepsilon$

b) no については, $\sum_i t_{ik}\lambda_i\geqq \varepsilon$ (A)

c) 無差別のとき, $\sum_i t_{ik}\lambda_i=0$

をこれまでの反復で求まっているものに新たに加え,

$$\sum_i\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqq\varepsilon$$

を満たす1つの解 λ を求め,

$$\max\sum_i\lambda_i u_i$$

から新しい有効端点を求め, この手続きを繰り返す. ここで ε は十分小さな正数である. もはや有効変数がないか, あってもそれらのトレードオフがすべて好まないか無差別になったところで終了する.

Wallenius 他 [78] はフィンランドのマクロ経済政策の評価に適用した事例を報告している.

iii) Lagrange 乗数法を利用するアプローチ

効用関数を最大にする選好解は, 有効曲面 (=非劣曲面) と無差別曲面の接点であることから, ε-制約法により接点を探索する代理価値関数法 (surrogate worth trade-off method) (SWT 法と略す) が Haimes-Hall [35]によって提案されている.

乗数法を用いたアプローチでは有効解の上のみを探索するので選好解は必ず有効解になる. しかも乗数法を用いれば有効解と同時にその点における有効曲面の法線ベクトルが Lagrange 乗数として求まる利点がある [57, 59]. 無差別曲面の法線ベクトルは限界代替率から決まるが, これを用いず代理価値(surrogate worth)を用いるのが SWT 法の特徴である.

ε-制約法:

$$\max f_1(x),\ \text{制約条件}\begin{cases} f_i(x)\geqq\varepsilon_i,\ i=2,3,\cdots,p\\ x\in X=\{x\,|\,g_j(x)\geqq 0,\\ \qquad\qquad j=1,2,\cdots,m\}\end{cases}$$

により1つの有効解 x^* を求める. ただし,

$$\varepsilon_j=\max_{x\in X}f_j(x)-\varepsilon_j{}^0,\ (\varepsilon_j{}^0>0)$$

は満足水準を表わす. Lagrange 関数を,

$$L=f_1(x)+\sum_{j=1}^{m}u_j g_j(x)+\sum_{i=2}^{p}\lambda_{1i}(f_i(x)-\varepsilon_i)$$

とすれば, 正の Lagrange 乗数 λ_{1i} は x^* から有効境界上を少し動くときの f_1 と f_i のトレードオフ, すなわち f_1 を一単位増加させるときの f_1 の減少量を表わしている. そこで, x^* における限界代替率 w_{1i} と比較して,

$$W_{1i}(x^*)\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}0\text{なら}\begin{cases}\text{そのトレードオフを好む}\\ \text{無差別である}\\ \text{そのトレードオフを好まない}\end{cases}$$

ことになる. ここで $W_{1i}(x^*)=w_{1i}-\lambda_{1i}$ である. この W_{1i} の代理価値を意思決定者に $f^*=f(x^*)$ を与えた上で, [-10, $+10$]までの序数で与えてもらい,

$$W_{1i}(x^0)=0,\ i=2,3,\cdots,p$$

を満たす選好解 x^0 を求めるのが SWT 法である.

このために, ε をパラメトリックに変えて得られるいくつかの有効解から代理価値関数 W_{1i} を曲線のあてはめや回帰分析により推定し連立方程式を解いて得る方法[35]や代理価値関数を推定せず, 代理価値をもとに ε を修正し対話的に選好解を求める方法[11]が提案されている. しかしどちらの方法でも序数で与えた代理価値を基数とみなさねばならないのは難点である.

三宮他[66]は意思決定者によって緩和可能なソフトな制約をもつ線形計画問題に, ソフトな条件の設定値と本

来の目的関数の値のトレードオフを考慮して選好解を得る方法に SWT 法を援用している．

水資源計画 [35,61,73]，農業計画 [66] への応用がある．

iv） 2 項選好関係にもとづくアプローチ

Wehrung[79] の対話形 2 項選好関係法や中山[57]の滑らかな主観的凸計画法がそうである．

選好を表わす効用関数によらず直接 2 項選好関係を用いる利点は，効用関数の上の仮定が選好で解釈しにくいのに対し，仮定か直接選好で解釈できるので検証が容易なことと，効用関数を仮定するより弱い条件でよいことである[79]．

一般に対話の繰り返しにおける意思決定者から引き出す選好の一貫性の問題は多くが指摘するところである[32,43,57,73]．これについてはいろいろ対策が講じられているが，もともと意思決定者の選好情報はあいまいなものであり，矛盾する性質のものであることを考えれば，選好解を唯一つに絞るよりある範囲をもって表現するのが現実的であろう [10,43]．石川他[43]は修正 ε を制約法を用いて無差別帯と味ばれるある幅をもって推定する探索法を開発している．

4. おわりに

対立する複数の目的をもつ決定問題には，意思決定者からの選好情報の程度，引き出し方などによっていろいろなアプローチが考えられている．ここではそれらのいくつかの特徴と応用について紹介してきたが，特徴を強調するため厳密性を犠牲にしたところも多い．また最近急速に盛んになってきた集団的意思決定はとりあげられなかった．

最後に，この小論は「数理計画法」研究部会（茨木俊秀主査）で報告したものをまとめなおしたものである．有益な助言や文献を提供くださった真鍋龍太郎氏（神商大），宮崎秀紀氏(兵庫県企画部)，中山弘隆氏(甲南大)，三宮信夫氏(京大)，田村担之氏(阪大)をはじめメンバーの方々に感謝の意を表します．

参考文献

[1] 青木洋一，多目的最適化手法，オペレーションズ・リサーチ，**23**(1978)511-516.

[2] G. M. Barber, Land-use plan design via interactive multiple-objective programming, *Environment and Planning A*, **8**(1976)625-636.

[3] S. M. Belenson, and K. C. Kapur, An algorithm for solving multicriterion linear programming problems with examples, *Opns. Res. Qart.*, **24**(1973)65-77.

[4] D. E. Bell, A decision analysis of objectives for a forest pest problem, in D. E. Bell, R. L. Keeney, and H. Raiffa, eds., *Conflicting objectives in decisions*, John Wiley, 1977.

[5] D. E. Bell, Consistent assessment procedures using conditional utility functions, *Opns. Res.*, **27**(1979)1054-1066.

[6] D. E. Bell, Multiattribute utility functions: Decompositions using interpolation, *Man. Sci.*, **25**(1979)744-753.

[7] R. Benayoun, J. de Montgolfier, J. Tergny, and O. Larichev, Linear programming with multiple objective functions: Step method (STEM), *Math. Prog.*, **1**(1971)336-375.

[8] M. Benveniste, Testing for complete efficiency in a vector maximization problem, *Math. Prog.*, **12**(1977)285-288.

[9] K. Bergstresser, A. Charnes, and P. L. Yu, Generalization of domination structures and nondominated solutions in multicriteria decision making, *J. Opt. Th. and Appl.*, **18**(1976) 3-13.

[10] J.-M. Blin, Fuzzy sets in multiple criteria decision making, *TIMS Studies in the Management Sciences*, **6**(1977)129-146.

[11] V. Chankong, and Y. Y. Haimes, The interactive surrogate worth trade-off (ISWT) method for multiobjective decision making, in S. Zionts, ed., *Multiple criteria problem solving*, Springer-Verlag, 1978.

[12] A. Charnes, and W. Cooper, *Management models and industrial applications of linear programming*, Vol. 1, John Wiley, 1961.

[13] J. L. Cohon, *Multiobjective programming and planning*, Academic Press, 1978.

[14] D. M. Crawford, B. C. Huntzinger and C. W. Kirkwood, Multiobjective decision analysis for transmission conductor selection, *Man. Sci.*, **24**(1978)1700-1709.

[15] J. S. Dyer, A time sharing computer program for the solution of the multiple criteria problem, *Man, Sci.*, **19**(1973)1379-1983.

[16] J. S. Dyer, W. Farrel, and P. Bradley, Utility functions for the test performance, *Man.*

Sci., **20**(1973)507-519.

[17] J.G.Ecker, and I.A.Kouada, Finding efficient points for linear multiple objective programs, *Math. Prog.*, **8**(1975)375-377.

[18] J.G.Ecker, and I.A.Kouada, Finding all efficient extreme points for multiple objective linear programs, *Math. Prog.*, **14**(1978) 249-261.

[19] J.G.Ecker, N.S.Hegner, and I.A.Kouada, Generating all maximal efficient faces for multiple objective linear programs, *J. Opt. Th. and Appl.*, **30**(1980)353-381.

[20] 枝村俊郎・横山義治，多属性効用関数法の土地利用計画への応用，第14回日本都市計画学会学術研究発表会，(1979)133-138.

[21] H.M.Ellis, and R.L.Keeney, A rational approach for government decisions concerning air pollution, in A.W.Drake, R.L.Keeney, and P.M.Morse, eds., *Analysis of public systems*, M.I.T.Press, 1972.

[22] J.P.Evans, and R.E.Steuer, A revised simplex method for linear multiple objective programs, *Math. Prog.*, **5**(1973)54-72.

[23] P.H.Farquhar, A fractional hypercube decomposition theorem for multiattribute utility functions, *Opns. Res.*, **23**(1975)941-967.

[24] P.H.Farquhar, A survey of multiattribute utility theory and applications, *TIMS Studies in the Management Sciences*, **6**(1977)59-89.

[25] P.C.Fishburn, Independence in utility theory with whole product sets, *Opns. Res.*, **13** (1965)28-45.

[26] P.C.Fishburn, *Utility theory for decision making*, John Wiley, New York, 1970.

[27] P.C.Fishburn, Von Neumann-Morgenstern utility functions on two attributes, *Opns. Res.*, **22**(1974)35-45.

[28] P.C.Fishburn, and R.L.Keeney, Seven independence concepts and continuous multiattribute utility functions, *J. Math. Psych.*, **11**(1974)294-327.

[29] P.C.Fishburn, and R.L.Keeney, Generalized utility independence and some implications, *Opns. Res.*, **23**(1975)928-940.

[30] J.C.Fisk, A goal programming model for output planning, *Decision Sci.*, **10**(1979)593-603.

[31] 福川忠昭，目標計画法，オペレーションズ・リサーチ，第20巻，2，3，4，5号，1975.

[32] 福川忠昭,多目的計画問題の対話形解法について，オペレーションズ・リサーチ，**21**(1976)156-159.

[33] A.M.Geoffrion, Proper efficiency and the theory of vector maximization, *J. Math. Anal. and Appl.*, **22**(1968)618-630.

[34] A.M.Geoffrion, J.S.Dyer, and A.Feinberg, An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an academic department, *Man. Sci.*, **19**(1972)357-368.

[35] Y.Y.Haimes, and W.A.Hall, Multiobjectives in water resources systems analysis: The surrogate worth tradeoff method, *Water Resources Res.*, **10**(1974)615-624.

[36] G.P.Huber, Multi-attribute utility models: A review of field and field-like studies, *Man. Sci.*, **20**(1974)1393-1402.

[37] C.L.Hwang, and A.S.M.Masud, *Multiple objective decision makingmethods and applications*, Springer-Verlag, 1979.

[38] J.P.Ignizio, *Goal programming and extensions*, Heath, Lexington, Messachusetts, 1976.

[39] J.P.Ignizio, A review of goal programming: A tool for multiobjective analysis, *J. Opl. Res. Soc.*, **29**(1978)1109-1119.

[40] Y. Ijiri, *Management goals and accounting for control*, North-Holland, 井尻雄二，計数管理の基礎，岩波書店，1970.

[41] H.Isermann, Proper efficiency and the linear vector maximization problem, *Opns. Res.*, **22**(1974)184-191.

[42] H.Isermann, The enumeration of the set of all efficient solutions for a linear multiple objective program, *Opl. Res. Q.* **28**(1977)711-725.

[43] 石川真澄・松田郁夫・茅　陽一，多目的計画における選好解探索，電気学会論文誌，**98**-C(1978)375-382.

[44] 茅　陽一・松田郁夫・石川真澄・田村佳彦，多目的形産業配置総合モデル，電気学会論文誌，**97**-C (1977)101-108.

[45] R.L.Keeney, Utility functions for multiattributed consequences, *Man. Sci.*, **18**(1972)276-

287.

[46] R.L. Keeney, A decision analysis with multiple objectives: The Mexico city airport, *Bell J. Econom. Man. Sci.*, **4**(1973)101-117.

[47] R.L. Keeney, A utility function for the response times of engines and ladders to fires, *Urban Analysis*, **1**(1973)209-222.

[48] R.L. Keeney, Multiplicative utility theory, *Opns. Res.*, **22**(1974)22-34.

[49] R.L. Keeney, and H. Raiffa, *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs*, John Wiley, 1976.
高原康彦・高橋亮一・中野一夫訳，多目標問題解決の理論と実例，構造計画研究所，1980.

[50] R.L. Keeney, and A. Sicherman, Assessing and analyzing preferences concerning multiple objectives: An interactive computer program, *Behavioral Sci.*, **21**(1976)173-182.

[51] A. Klinger, Improper solutions of the vector maximum problem, *Opns. Res.*, **15**(1967) 570-572.

[52] 河野博忠・氷鉋揚四郎・吉田雅敏，多属性効用理論による公害（騒音）評価率の計測，地域学研究，**7**(1977)225-246.

[53] T.C. Koopmans ed., *Activity analysis of production and allocation*, John Wiley, 1951.

[54] H.W. Kuhn, and A.W. Tucker, Nonlinear programming, *Proc. of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, (1951)481-492.

[55] S.M. Lee, *Goal programming for decision analysis*, Auerbach, Pennsylvania, 1972.
大村茂雄・近藤恭正訳，意志決定のための目標計画法(上)，日本経営出版会，1974.

[56] 門田安弘，予算編成過程と目標計画法，オペレーションズ・リサーチ，**25**(1980)29-34.

[57] 中山弘隆，滑らかな主観的凸計画法，計測自動制御学会論文集，**13**(1977)525-532.

[58] 中山弘隆，椹木義一，多目的意思決定とその応用，システムと制御，**20**(1976)511-520.

[59] H. Nakayama, H. Sayama, and Y. Sawaragi, A generalized lagrangian function and multiplier method, *J. Opt. Th. and Appl.* **17** (1975)211-227.

[60] P. Nijkamp, and A. van Delft, *Multi-criteria analysis and regional decision-making*, Martinus Nijhoff Pub., 1977.

[61] 西川禕一，水利用の問題点と多目的システム計画の手法，オペレーションズ・リサーチ，**21**(1976) 290-295.

[62] K.R. Oppenheimer, A proxy approach to multi-attribute decision making, *Man. Sci.*, **24**(1978)675-689.

[63] J. Philip, Algorithms for the vector maximization problem, *Math. Prog.*, **2**(1972)207-229.

[64] R.A. Pollak, Additive von Neumann-Morgenstern utility functions, *Econometrica*, **35** (1967)485-494.

[65] W. L. Price, Solving goal-programming manpower models using advanced network codes, *J. Opl. Res. Soc.*, **29** (1978) 1231-1239.

[66] 三宮信夫・西川禕一・前田　稔，制約条件の緩和を考慮した線形計画問題の解法，電気学会論文誌，**98**-C(1978)25-32.

[67] 瀬尾芙巳子，多目的最適化と地域環境アセスメント，地域学研究，**7**(1977)95-111.

[68] 志水清孝　多目的システムにおける意志決定と最適化，オペレーションズ・リサーチ，**22**(1977)344-351.

[69] 志水清孝・日吉茂樹・広瀬　正，多目的計画法─多目的システムの最適化手法─，計測自動制御学会論文集，**11**(1975)28-35.

[70] R.E. Steuer, Multiple objective linear programming with interval criterion weights, *Man. Sci.*, **23**(1976)305-316.

[71] R.E. Steuer, and M.J. Wallace, Jr, A linear multiple objective programming model for manpower selection and allocation decisions, *TIMS Studies in the Management Sciences*, **8**(1978)193-208.

[72] E. Takeda, and T. Nishida, Multiple criteria decision problems with fuzzy domination structures, *Int. J. Fuzzy Sets and Systems*, **3**(1980)123-136.

[73] 田村担之，水環境と多目的計画法，システムと制御，**22**(1978)579-587.

[74] H. Tamura, and Y. Nakamura, Decompositions of multiattribute utility functions based on a new concept of convex dependence, *Proc. Int. Conf. on Cybernetics and Society*,

IEEE Trans., Syst., Man, Cybern. Society, Tokyo-Kyoto, Japan(1978)1362-1367.

[75] 田村担之・中村　豊，2属性空間における凸依存性の概念と効用関数の新しい分解表現，計測自動制御学会論文集，**15**(1979)395-401.

[76] 田村担之・中村豊，環境汚染と経済消費のトレードオフ分析―凸依存性に基づく効用関数構成の方法論―，計測自動制御学会論文集，**15**(1979)545-548.

[77] J. von Neumann, and O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*. 2nd ed., Princeton Univ. Press, 1947.

[78] H. Wallenius, J. Wallenius, and P. Vartia, An approach to solving multiple criteria macroeconomic policy problems and an application, *Man. Sci.*, **24**(1978)1021-1030.

[79] D. A. Wehrung, Interactive identification and optimization using a binary preference relation, *Opns. Res.*, **26**(1978)322-332.

[80] E. Werczberger, A goal programming model for industrial location involving environmental considerations, *Environment and Planning* A, **8**(1976)173-188.

[81] B. M. Wheeler, and J. R. M. Russell, Goal programming and agricultural planning, *Opl. Res. Q.*, **28**(1977)21-32.

[82] 安田八十五・中村良平，土地利用政策のための住環境多目的評価システム，第14回日本都市計画学会学術研究発表会(1979)127-132.

[83] P. L. Yu, Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives, *J. Opt. Th. and Appl.*, **14**(1974)319-377.

[84] P. L. Yu, and G. Leitmann, Nondominated decisions and cone convexity in dynamic multicriteria decision problems, *J. Opt. Th. and Appl.*, **14**(1974)573-584.

[85] P. L. Yu, and M. Zeleny, The techniques of linear multiobjective programming, *Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle*, **3**(1974)51-71.

[86] M. Zeleny, *Linear multiobjective programming*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[87] S. Zionts, and J. Wallenius, An interactive programming method for solving the multiple criteria problem, *Man. Sci.*, **22**(1976)652-663.