論文紹介

数理計画

M32 減衰型0-1ナップザック問題

M. E. Posner, & M. Guignard 155-161

Mathematical Programming, **15**, 2, 1978.

1個のバスケットボールを持つのは簡単だが，50個の「おはじき」は全体では体積が小さいにもかかわらず，これを1度に摑むのにはかなりの器用さを必要とする．このように，ナップザックの容量が選ばれた品物の個数によって影響される場合がある．たとえば，衛星通信などでは，1つの周波数帯(ナップザックの容量)で複数の異なる通話(対象となる品物)を同時に送ることがある．このとき混信を防ぐため，異なる通話の間に適当な周波数間隔を置かねばならない．多くの通話を1つの周波数帯に押し込めようとすると，その分だけ実質的に有効な周波数帯の幅が減少する．また，電子計算機をＴＳＳで利用する場合のユーザーの数とＯＳのオーバヘッド時間との間にも同様な問題が生じる．

本論文では，上記のような問題を一般化し，以下の非線形ナップザック問題に定式化し，その解法および乱数データに対する計算例を報告している．

$$z_1(x)=\max\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \leq h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right), x_i=0 \text{ or } 1\right\}$$

ここで，h は $R \to R$ の単調非増加関数，f_i および k_i はそれぞれ与えられた正整数である．

解法は，5つの定理に基づいた陰的列挙法である．定理1は緩和法による上限の算出法，定理2と定理5は実行可能性テストで，それぞれ $x_i=1$ となる変数の個数の上限算出法および最適解で $x_i=0$ となる変数の事前決定法を与えている．定理3と定理4が上界値テストによる限定操作である．これらをまとめて，1つのアルゴリズムとして提案している． (鈴木久敏)

M33 集合分割問題に対するマッチングを用いたラグランジュ緩和法

G. L. Nemhauser 553-563

Naval Research Logistics Quarterly **26**, 4, 1979.

集合分割問題(ＳＰ)とは，

最大化 $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$

(ＳＰ) 条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \ (i=1,2,\cdots,m)$

$x_j \in \{0,1\} \quad (j=1,2,\cdots,n)$

なる問題である．ここで a_{ij} は0あるいは1である．もし $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}=2 \ (j=1, 2, \cdots, n)$ であればこの問題は行列 (a_{ij}) を接続行列に持つグラフの最大ウエイトの完全マッチングを求める問題(MCM)となり，効率の良い算法が開発されている．そこで本論文では与えられた(SP)を付加的な制約のある(MCM)に変形してラグランジュ緩和法を用いる方法が提案されている．

今，$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}=2K_j$(＝偶数)$(j=1,2,\cdots,n)$と仮定すると，$j$ 番目の列ベクトル a_j を分解して，

$\sum_{k=1}^{K_j} a_j^k = a_j$，$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^k = 2 \ (k=1,2,\cdots,K_j)$

なる K_j 本の0-1ベクトル a_j^k を作ることができる．したがって(SP)は，

最大化 $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} (d_j/K_j) x_j^k$

条件 $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} a_{ij}^k x_j^k = 1 \quad (i=1,2,\cdots,m)$

$x_j^k \in \{0,1\} \quad (k=1,2,\cdots,K_j, j=1,2,\cdots,n)$

$x_j^k - x_j^{k+1} = 0 \quad ($ 〃 $)$

と書き直すことができる．実数 $\lambda_j^k (k=0,1, \cdots, K_j, j=1,2,\cdots,n)$ (ただし $\lambda_j^0=\lambda_j^{K_j}=0$)を与えて(MCM)

最大化 $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} [(d_j/K_j)-(\lambda_j^k-\lambda_j^{k-1})] x_j^k$

条件 $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} a_{ij}^k x_j^k = 1 \quad (i=1,2,\cdots,m)$

$x_j^k \in \{0,1\} \quad (j=1,2,\cdots,n)$

を解き，その最適値 $F(\lambda)$ について，

(LD) 最大化 $F(\lambda)$

を行なうことによって(SP)の最適値の良い上界を得ることができる．(LD)を解くには繰り返し(MCM)を解く必要があるので，前ステップの(MCM)の解から現ステップの(MCM)の解が容易に求まるように，本論文では1個の λ_j^k だけを変化させる cyclic coordinate 法が提案され，劣勾配法とＬＰ緩和による方法と比較検討されているが，ＬＰ緩和による方法と比べて，他の2つの方法が有望であるという結果は得られていない．

(山本芳嗣)