線形計画法に画期的な新解法現わる？

伊 理 正 夫

1. 計算の複雑さ

たとえば連立一次方程式を解くための“Gaussの消去法”は，n元の方程式を，n^3に比例する程度の回数の乗除算と，そして約同数の加減算で解く．n地点の各2点間の距離が与えられたときに，指定された2点間の最短路を求めるには，いわゆる“Dijkstra［dάikstrə］法”を用いると，n^2に比例する程度の回数の加減算と符号判定の操作が必要である．このように，ある種の問題を解くための算法の“複雑さ(complexity)”を「問題の規模(size；入力データの量)nが大きくなったとき，必要な手間がnとともにどのような速さで増大するか」ということで定義しようという，大変に“実用的”にみえる数学の一分野が，ここ十数年の間に，誕生し，成長し，多くの有用な結果を産み出してきた［1］，［2］，［3］，［5］．(そして，他のほとんどの分野がそうであったように，その分野の誕生の契機となった実用的な動機からは次第に離れて，単なる数学的興味からだけの研究へと向かい始めたようにもみえるのが，いささか残念である．)

問題の規模nの増大とともに解に到達するまでに要する(最悪の場合の)手間が$O(n^p)$(「高々n^pに比例する程度」と読めばよい；pはある定数)で見積れるような算法のことを“多項式オーダーの算法”とよび，これをもって“大規模な問題にも対処しうる実用的な算法”の数学的特徴づけであるとしようというのが，“計算の複雑さ(computational complexity)の理論”の立場である．

多項式オーダーの算法が存在しない，すなわち，どのような方法を考えても$O(3^n)$とか$O(n!)$とかの手間の算法しか作れない，ような問題が存在することも知られている．ところが，「現在までのところ多項式オーダーの算法が発見されてはいないが，しかしそれが存在しないと証明されているわけでもない」という問題がまた非常に多い．そのような問題の中で典型的なものが，「$O(n^p)$段調べれば答がわかるのだけれども，各段ごとにいくつかの場合分けをしなければならないので，すべての場合を尽くすのには多項式オーダーの手間ではすまない(一つの可能な場合を選んで調べるだけなら$O(n^p)$の手間ですむ)」というような形に書ける問題のグループで，このような形に書ける問題のことを“NP問題(non-deterministic polynomial-time problems)”とよんでいる．きわめて興味深いのは，NP問題の中に「もしそれに対して多項式オーダーの算法が存在すれば，すべてのNP問題に多項式オーダーの算法が存在する」という意味で“普遍的な”ものが存在するということである．このような問題は“NP完全問題(NP-complete problems)”とよばれ，S. A. Cookという人が10年ほど前に発見した概念である．NP完全問題の中には，整数線形計画法の問題，巡回セールスマン問題，ほとんどすべてのジョブショップ型スケジューリング問題，ナップサック問題，等々，ORに関係の深いものが多い．現在では，数え方にもよるが，数千の問題がNP完全であることが知られているという．あまりにも多くの著名な難しい問題がNP完全であることが示されてしまったので，そして，それのどれかに“良い”(すなわち多項式オーダーの)解法があれば他のすべてに対して良い解法が作れるというのであるから，「NP完全問題には多項式オーダーの解法は存在しないであろう」と，この方面の専門家達は確信しているようである．

2. 線形計画問題の複雑さ

線形計画法は，もともと，その特殊な場合であるネットワーク型の問題を土台として発展してきたという歴史がある［8］．ところで，ネットワーク型の問題の中には，多項式オーダーの算法が知られているものがかなりある．(点の数をnとして，2点間最短路問題に対するDijkstra法が$O(n^2)$，2点間最大流問題に対するДиниц-Карзанов(Dinic-Karzanov)［dínits-karzánəf］法が$O(n^3)$など．)一方，整数線形計画問題はNP完全である．

「では，普通の線形計画問題についてはどういうこと

いり まさお 東京大学

になっているのか」ということは，この方面の専門家すべての関心事であった．“経験的には”，$m \times n$ 型の標準形の線形計画問題を主単体法で解くと，たいてい高々 $3m$ 回くらいの基底変換を行なううちに解に到達してしまう（あるいは実行可能解が存在しないことがわかる）ので，$O(m^2 n)$ くらいの手間（四則演算の数）しかかからない（実際には係数行列の疎構造に着目した各種の工夫を取り混ぜることによってもっと速く解ける）．しかし，“理論的には”「単体法の枢軸選択規則のどのようなものに対しても，それに従った場合，すべての基底を通過してからでなければ最適解に到達できないような問題が存在する」ことが知られているので，本当には安心できない．

このような情況が長く続いていた所へ，昨1979年春のソヴィエトの Доклады(Doklady)[dəklʹádɨ] に Л. Г. Хачиян(L. G. Khachian) [xátʃijən] が4ページの論文“線形計画法における多項式オーダーの算法”［10］を発表して，大袈裟にいえば，世界中の数理計画法の専門家達に一大衝撃を与えた．Хачиян の結果を一言でいえば「係数行列，右辺ベクトル，目的関数の係数がみな整数（有理数としても同じ）であるような線形計画問題を解くための多項式オーダーの算法がある」というものである．ただし，問題の規模，計算の手間の定義が従来のものとは微妙に異なる（ある意味では，より実際的な定義ともみえる）し，また，算法がソヴィエト学派の開発したものであって，単体法とはまったく異なるものであったのも，当然とはいえ，面白い．問題の規模は，従来の“制約式の数 m，変数の数 n”という大ざっぱなものではなく，“入力データの総ビット数 L”のようなもので定義される（すなわち「どのくらいの精度で諸元が与えられているか」まで考慮する）．計算の手間も，それに応じて，従来の“四則演算の総数”などではなく，“ビット演算の総数”のようなもので計る（すなわち「高精度計算を要するときにはそれだけの手間がかかるとみる」）．利用する手法は Н. З. Шор(N. Z. Shor)［ʃɔr］等により発展させられていた一種の緩和法，勾配法（n 次元空間における2分法ともみなせる）である［11］，［12］．

3. Хачиян の理論の概要

後節でも触れるように，原論文［10］を“解読，改良，解説”したと称する資料［6］が西欧やわが国に出廻っているが，確かにいくらかの改良はなされてはいるものの，ソヴィエト学派の伝統の影響，計算精度に関する細かな注意なども含めて，原論文にはそれなりに生き生きとした考え方の流れが見られるので，ここではあえて原論文のほうに忠実な紹介を試みる．（［6］における“改良”も，“実用性からの距たり”という観点からすれば，大したものではない．）

問題は，「与えられた $mn+m$ 個の整数 $a_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$，$b_i(i=1,\cdots,m)$ に対して，

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i \quad (i=1,\cdots,m) \tag{1}$$

を満たす実数 $x_j(j=1,\cdots,n)$ が存在するか」という，実行可能領域の非空性判定の問題であるとする．すでに注意したように，与定数が“整数”であるという仮定はあまり強いものではない．（われわれはどうせ有限桁近似であらゆる数を扱うのであるから．）また，普通の線形計画問題の形，すなわち「$\boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ のもとで $\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{x}$ を最大にせよ」も，双対問題と一緒にして「$\boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b}$, $-\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{0}$, $-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} \leqq -\boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{0}$, $-\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{0}$ をすべて満足する $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が存在するか」という形に，等価に書き直せることに注意されたい（後記2，3も参照されたい）．Хачиян は問題の規模を，

$$L=\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\log_2(|a_{ij}|+1) + \sum_{i=1}^{m}\log_2(|b_i|+1)+\log_2 nm\right]+1 \tag{2}$$

で定義する．（［ ］はガウス記号；n, m, a_{ij}, b_i 等を表わすのに必要な入力データの総ビット数が L であることは明らか．）算法において使われる場所と手間は以下の通り．

（i） $O(mn+n^2)$ の作業用記憶場所（各記憶場所には $O(nL)$ ビットの情報（数値）が書き込まれる）；

（ii） $O(n^3(n^2+m)L)$ 回の四則と開平演算（各演算は $O(nL)$ 桁の精度で行なわれる）．

考え方の大筋はつぎの通りである．(1)を満たす解 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)'$ があるかどうかは，n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ における関数

$$\theta(\boldsymbol{x})=\max_{i=1,\cdots,m}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-b_i\right) \tag{3}$$

の最小値が負（非正）になるかどうかと等価である．ところが，$\theta(\boldsymbol{x})$ は“断片的に線形な凸関数”であり，このような“微分不能な点が多くあるような凸関数の最小化問題”に対しては，ソヴィエト学派により勾配法，緩和法系統の各種の方法が研究されてきていた（たとえば［9］，［11］，［12］などを参照）．Хачиян も，まさに，その伝統に乗って考えたわけである．

さて，つぎの事実は，厳密に証明しようとするとかなりのスペースを要するが，常識的には自然なことと納得できよう．（意味のある点は超平面 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$ の交点であるということと，a_{ij} や b_i が有限桁であるので意味のある点の座標を分数表示したときの分母，分子の大きさには自ら限界があるということが強く効いている）．

(a) $\theta(\boldsymbol{x}) \leqq 0$ となる点 $\boldsymbol{x}$ があるとすれば，それはそん

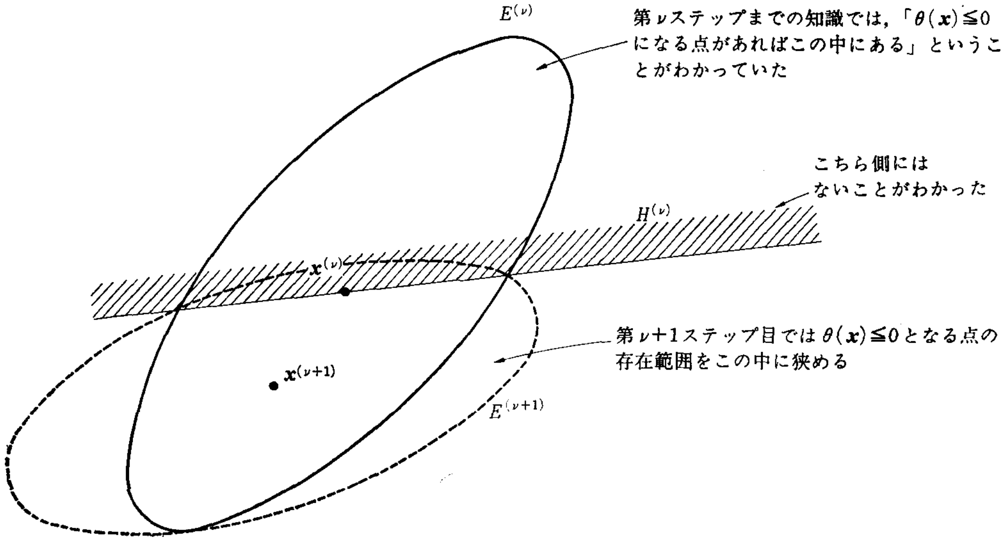

図 1

なに遠くでない所にもある．すなわち，$\|\boldsymbol{x}\|\leqq 2^L$ を満たす所にもある．($\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルム $\|\boldsymbol{x}\|=\sum_{j=1}^n x_j^2$.)

(b) $\min_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n}\theta(\boldsymbol{x})>0$ ならば，任意の $\boldsymbol{x}(\in\boldsymbol{R}^n)$ に対して $\theta(\boldsymbol{x})\geqq 2\cdot 2^{-L}$ である．

したがって，われわれは，超球 $S=\{\boldsymbol{x}|\ \|\boldsymbol{x}\|\leqq 2^L\}$ 内で，関数 $\theta(\boldsymbol{x})$ の最小値を，誤差が 2^{-L} 未満になるまで，近似的に求めればよい．その近似最小値を $\theta(\tilde{x})$ として，$\theta(\tilde{x})\leqq 2^{-L}$ なら真の最小値 $\theta_S=\theta(\hat{x})$ は $\theta_S\leqq 0$ となって(1)は実行可能解をもち，$\theta(\tilde{x})\geqq 2\cdot 2^{-L}$ なら(1)は実行可能解をもたない．

この近似最小値を計算するための算法として，Шор等が開発していた“超楕円体の方法”[11]，[12]が使われる．以下では，単位超球 $\|\boldsymbol{x}\|\leqq 1$ を行列 Q で変換しさらに中心を $\boldsymbol{x}$ だけ移動させたという形で，n 次元超楕円体 $E=(\boldsymbol{x},Q)\equiv\{\boldsymbol{x}+Q\boldsymbol{z}|\ \|\boldsymbol{z}\|\leqq 1\}$ を表わすことにする．

1° $\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{0}$, $Q^{(0)}=2^L\cdot I_n$,

$$\theta^{(0)}=\theta(\boldsymbol{x}^{(0)})=\max_{i=1}^m\{-b_i\} \tag{4}$$

とおく．(事実(a)によれば，求める最小値は，あるとすれば，$E^{(0)}=(\boldsymbol{x}^{(0)},Q^{(0)})$ の中にある．)

2° $\theta(\boldsymbol{x}^{(\nu)})\leqq 2^{-L}$ なら実行可能解が存在することが結論される．そうでなければ，

$$\theta(\boldsymbol{x}^{(\nu)})=\sum_{j=1}^n a_{i_\nu j}x_j^{(\nu)}-b_{i_\nu} \tag{5}$$

となるような i_ν を見出す．そうすると，半空間

$$H^{(\nu)}=\{\boldsymbol{x}\mid\sum_{j=1}^n a_{i_\nu j}(x_j-x_j^{(\nu)})>0\} \tag{6}$$

では $\theta(\boldsymbol{x})$ の値はますます大きくなるだけであるから，$\theta(\boldsymbol{x})$ の最小値が負(非正)になるとすればそれは $E^{(\nu)}-H^{(\nu)}$ の中である．この $E^{(\nu)}-H^{(\nu)}$ をすっぽり包む超楕円体で“なるべく小さいもの”$E^{(\nu+1)}=(\boldsymbol{x}^{(\nu+1)},\ Q^{(\nu+1)})$ を作る所がこの方法のミソである(図1)．それには，$\boldsymbol{u}^{(\nu)}$ を $-Q^{(\nu)\prime}\cdot\boldsymbol{a}_{i_\nu}(\boldsymbol{a}_{i_\nu}=(a_{i_\nu 1},\cdots,a_{i_\nu n})')$ 方向の単位ベクトル，$U^{(\nu)}$ を $\boldsymbol{u}^{(\nu)}$ を第1列にもつ n 次の直交行列，$\Lambda_n=\mathrm{diag}\,[n/(n+1),(1-1/n^2)^{-1/2},\cdots,(1-1/n^2)^{-1/2}]$ として，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}^{(\nu)}=\boldsymbol{x}^{(\nu)}+Q^{(\nu)}\boldsymbol{u}^{(\nu)}/(n+1),\\&Q^{(\nu+1)}=2^{1/8n^2}Q^{(\nu)}U^{(\nu)}\Lambda_n,\\&\theta^{(\nu+1)}=\min(\theta^{(\nu)},\theta(\boldsymbol{x}^{(\nu+1)}))\end{aligned} \tag{7}$$

とおけばよい．(計算誤差のことを考えなければ，このことは，丁度手頃な n 次元空間における解析幾何学の演習問題である．後記5参照．)

上記の手順を $\nu=0,1,2,\cdots,16n^2L$ (高々)繰り返せばよい($\theta^{(16n^2L)}$ が $\leqq 2^{-L}$ となるか $\geqq 2\cdot 2^{-L}$ となるかを見ればよい)というのがXачияHの提案した方法である．必要な四則演算や開平の回数の見積りをすることは，そう困難でないことは明らかであろう．面倒なのは，

(イ) 上記の諸計算をどのくらいの桁数をとって行なえば自信をもって不等号の判定ができるか，

(ロ) $\nu=16n^2L$ 回2°の手順を繰り返せば，確実に最小値が誤差 2^{-L} 未満で求められるか，

という2点である．Хачиян はこの点を十分慎重に検討しているが，ここでそれを詳しく説明する余裕がないのは残念である．ただ，第1点に関しては，

(イ) 2進法で表わして，小数点以上 $23L$ ビット，小数点以下 $38nL$ ビットの場所を用意して，すべての計算を行なえば十分である

ということが確認されており，第2点に関しては，

(ロ) 超楕円体 $E^{(\nu)}$ の体積 $\det Q^{(\nu)}$ が(計算誤差まで考えに入れても)

$$2^{-1/n} \leqq \det Q^{(\nu+1)} / \det Q^{(\nu)} \leqq 2^{-1/4n} \qquad (8)$$

程度の速さで減小してゆく

という事実を利用して証明ができると，[10]に述べられていることだけ記しておこう．

4. Хачиян の理論の評価

まだ世界的に評価が定まっているわけではないが，筆者の個人的意見はつぎの通りである．

（Ⅰ） 線形計画問題に対して，このような意味での，多項式オーダーの算法が存在するということが示されたのは，理論的には大変意義深いことである．とくに，ネットワーク・フロー型の諸問題に関連して，さらに具体的な結果が得られてくる可能性が高い．(係数行列の完全単模性が利用可能であるため．)

（Ⅱ） 多項式オーダーというようなことは別としても，単体法以外の算法への関心が高まることは好ましい．たとえ最終的に単体法が最良であるとの結論が出るにしても，単体法の特徴を種々の角度から見直してみることは大切である．

（Ⅲ） しかし，Хачиян がいう通りの算法が，普通の線形計画問題の解法として，単体法に直ちにとって代るとはとても思えない．実用的な大きさの m, n と実用的な精度に対しては，Хачиян の算法で“理論的に”予想される手間（他の問題に対して計算の複雑さの理論で“良い”とされている算法の多くがそうであるように，“最悪”に近い場合が実際にしばしば起こる)は，単体法による“経験的な”手間に比べて桁違いに大きい．もしソヴィエト流算法がこの場合実用になるとしても，そのためには多くの付加的技巧が“実用化研究”によって作り出されなければならないであろう．

（Ⅳ） 少々不真面目との謗りを覚悟のうえで書かせていただけば，“計算の複雑さの理論”が今日ほど成熟する以前にこのような論文が出されたとしても（多分書かれなかったであろうが)，恐らく“実用からほど遠い”理論として一顧だに与えられなかったであろう．ひと昔前の良識派は，このことを現在の計算の複雑さの理論が誤った方向に進んでいることの一つの証拠とみなすかも知れない．あるいは，Хачиян 流の方法が将来実用的価値を発揮して，計算の複雑さの理論が一大凱歌をあげることになるかも知れない．どちらになるか私には興味津々である．

5. ニュースの伝わり方

筆者にとって，Хачиян の理論は，それ自体ももちろん興味あるものではあったが，それに劣らず，それについての“情報”の伝わり方が興味深いものであった．そこで，きわめて個人的な経験を，これもまたきわめて個人的な感想とともに，時間順に（日記風に）ここに書き連ねることをお許し願いたい．

〈1〉 1979年4月中旬：――藤重悟君（東大工学部講師；現筑波大学助教授）が，東大工学部計数工学科図書室で論文[10]を見つけ「線形計画法が多項式オーダーで解けるという論文がありますよ」といって教えてくれる．何だか変な話だと半信半疑ながら，6月1日，2日名古屋出張の際に新幹線の中で読んでみると，どうもまともな論文らしい．藤重君とは，§4に書いたようなことの一部も話し合った．

〈2〉 1979年7月：――6日にカナダのモントリオールの McGill 大学の Chvátal [xvá:təl] 教授，12日にアメリカ Illinois 大学の C. L. Liu 教授が筆者の研究室に来訪．「アメリカ，カナダではロシヤ人が線形計画法を多項式オーダーで解く方法を発見したという噂が流れている」という話が出る．多分，藤重君が発見したのと同じ話だろうと思って意見を換わす（先方もあまり詳しいことは知らないらしい)．

〈3〉 1979年8月27日～31日：――3年ごとに開かれている“数理計画法国際シンポジウム”の第10回目がカナダのモントリオールの McGill 大学で開かれ，それに出席．(ついでながら，今回日本からの参加者は約20名に達し，Carnegie-Mellon 大学の E. Balaş [bálaʃ] 教授などは“In this symposium Japan is well represented.”だと賞めている．むしろ，学術的にあまり well represented でなく“政治的参加”が主の国があることへの不満がいいたかったのかも．)ところが，ほとんど会う人ごとに「線形計画法の多項式オーダーの解法のニュースを知っているか」と聞かれる．こちらが知っているので当てがはずれたような顔をする人もいる．北米でもかなりホットなニュースらしい．

このところ，このシンポジウムでは線形計画法関係のトピックスが続いている．第8回のスタンフォードのでは，Scolnik とかいう人がやはり多項式オーダーの算法を発表して話題となり（これは間もなく間違いとわかって幕！），前回第9回の Budapest [búdapeʃt] では，R. G. Bland (現 Cornell 大学助教授) の“退化があっても巡回を起こさない簡単な単体法”の発表があった([4]参照；この話を含んだ教科書[7]がわが国にはすでにある)．今回は，Хачиян の方法(にいくらかの改良を加えたと称するもの)の解説講演が，偶々 Stanford 大学滞在中のハンガリーの Szeged [séged] 大学の L. Lovász [lɔ́vɑ:s] 教授(まだ30才そこそこの若さながら，学生時代に perfect graph conjecture に解決を与えたほか，組合せ論の分野ですでに多くのすぐれた業績を重ね，

Rényi [ré:ɲi], Erdős [érdø:ʃ], その他多くの鬼才を産んだハンガリー組合せ論の伝統の次代の旗手として万人が認める俊才；アカデミー会員に推挙されているという)によって McGill 大学の大講堂で行なわれた．多数の聴衆がつめかけ，用意された資料[6]（これもたまたま Stanford 大学滞在中の Rochester 大学の P. Gács [gɑ:tʃ](やはりハンガリー人) との共作) はあっという間に品切れ，並行して開かれたセッションもあったであろうに，それらのセッションの講演者には気の毒なくらいであった．

多くの人が関心をもつこと自体はよい．しかし“数理計画シンポジウム”に参加した人のこんなに大きな部分が2次情報を得るために集まるのは少々異常ではないか，というのが筆者の偽らざる印象であった．実際，このことについて話をした西欧圏の人達のほとんどは「ロシア語で書かれた論文は知らなくて当然，読めなくて当然」という態度である．外国語についてかなりの努力を強いられているわれわれ日本人からみると「もっと真面目に落着いてやれ」といいたくなる．情報伝達機構が発達したために，国ごとの人ごとの個性が失われて，付和雷同型の研究が増えてきている反面，大情報圏の外に1歩離れると，そこでの研究は昔よりかえって知られる機会が減っているという恐れはないか，等々の不安が頭をかすめる．

〈4〉 1979年9月3日～8日，10日～15日：――ポーランドのワルシャワでの The 9th IFIP Conference on Optimization Techniques, 引続いてルーマニアのブラショフ (Braşov) での The 6th Conference on Probability Theory に参加．そこでは，モントリオールではあまり会えなかった東欧の人達多勢と会うことができた．その中で，ワルシャワでは Хачиян の同僚筋に当たる若い数学者の E. Левнер(E. Levner)[l'évn'er] 博士（モスクワ中央経済数学研究所；組合せ的最適化や近似算法の分野で活発に研究している）と，ブラショフではそのボスの A. A. Фридман (A. A. Fridman [frídman])教授と，Хачиян の論文について話し合えた．彼らも Хачиян の成果は高く評価していたが，「しかし，この結果が得られるための下地はソヴィエトで十分醸成されていたわけで，そのうえに“計算の複雑さ”の観点を一寸プラスしたら，直ちにあのような結果が得られるのだ．もちろん“そのような見方をしたら”という着想はすばらしいのだが．」と強調していた．筆者もこれにはまったく同感である．わが国でも，皆で協力して，“輸入品の化粧直し”ではない研究成果をぜひ続々と作り出したいものだ．

〈5〉 1979年10月2日：――ソヴィエトから流出してフランスの CNRS に所属している組合せ数学者の M. Deza 博士が筆者を訪れた際，たまたま，日本学術振興会の招きで東大に滞在中のニューヨーク市立大学 L. Weinberg 教授（沪波器理論，グラフ理論，マトロイド理論，等で有名）と3人での談が Хачиян の件に及ぶ．Weinberg 先生はこの件につき御存知ないらしい．早速こちらの手許にある資料を差上げる．Deza さんも話は聞いているものの原論文[10]は見たことがないというので，コピーを差上げる．

〈6〉 1979年11月2日：――日科技研が英国へ輸出しようとしている化学プロセスシミュレーターの件で英国 ICI や CAD Centre からの何人かの人達と，日本側からは日科技研の人達，東工大の大島栄次教授夫妻等と，椿山荘で会食する．夜の椿山荘の庭の散策中に CAD Centre の Branch 博士との会話がグラフ理論に触れる．そのとき氏が「ソヴィエトの数学者が巡回セールスマン問題を解く良い方法を発見したと新聞に出ていた．」といい出す．NP完全問題がそう簡単に解決するとは信じられない筆者は，ただ目をパチクリするだけで，「そうですか，しかし，それは良い解法がなさそうだというので有名な難問の一つなんですが」としか答えられない．Branch 氏も別に組合せ論や計算の複雑さの理論の専門家ではないから，それ以上つっ込んだ話にはならなかった．この話はしばらく忘れてしまっていた．

〈7〉 1979年11月8日：――「大学院生の手塚集君が見つけたんですが，こんな記事が出ていますよ」といって，助手の田口東君が Daily Yomiuri の切抜き[14]をもってくる．見ると「Khachian という無名の若いロシアの数学者が巡回セールスマン問題を多項式オーダーで解く方法を発見した．今まで何十億世紀もかけなければ解けなかったような問題が約1/5秒で，ポケット電卓でも解けるようになった．」というようなことが書いてある．しかも「1月に発表されたのに西側には10カ月も知られずにいた．」とある．「おやおや，Хачиян は巡回セールスマン問題も解いたのか．しかし変だな．新聞記者が何か感違いしているのでは．」というようなことを田口君と話しながら，Weinberg 先生にもそのような意見つきでコピーを渡す．この記事の最後に，ニュース・ソースが“The Guardian”(英国マンチェスターの有名な新聞）とあるので，Branch 氏の過日の話の出所もこれだなと思う．

〈8〉 1979年11月21日：――Weinberg 先生が「家内から New York Times にこんな記事が載っているといって送ってきた」といって，コピー[15]をくれる．それには，「巡回セールスマン問題，素因数分解にもとづく暗号，石油精製，天気予報，スケジューリング，等の，

大切なのに今までのところ大変時間のかかるやり方でしか扱えなかった問題がたくさんある」ところへ,「Khachian というロシア人が,最大難問の一つである“巡回セールスマン問題”に関連のある問題を計算機を使って解く方法を提案した」と書いてある(下線の部分がにくい!).そして,線形計画法の教祖 G. B. Dantzig [dǽntsɪk] 教授 (Stanford 大学) の言として「私の所へは,政府各省から,このことの重大性についての問合せが殺到しており」,「Lovász と Gács が Stanford 大学で Khachian の論文を解析しそれを敷衍した論文を書いたが,ここ数日間,その論文の請求の手紙の洪水が押し寄せている.」といって,センセーショナルな記述をしている.具体的に“誤った内容”が書かれているわけではないが, Dantzig 先生の名前などもち出して,今にも日々の計算技術に大変革が起きそうな調子である.

ここでも「1月にソヴィエトの雑誌に載ったものが西欧で注目されなかったのは,一つにはロシア語で書かれていたのと,一つには著者が無名だったことによる」,「このことは California 大学(Berkeley) の E. Lawler 教授が正しく注目した」と書いている.しかし,気がつかなかったことの言い訳に“理由”は要らない.単に“不注意だった”だけではないか.また,Lawler さんも,実は,5月にドイツで Köln 大学の R. Burkard 教授からこのことを教わったのだそうである([13]による).

New York Times のこの記事で,話がわれわれの知っているのと同じことなのだという自信がやっともてたが,こんなにセンセーショナルに書かれると,何かわれわれのまだ知らない話もあるのかなと少し心配が残る.

〈9〉 1979年11月28日:——森口繁一先生から別の用件でお電話をいただいたとき,先生が「線形計画法の新解法についての New York Times の記事のことを知っているか」とおっしゃる.上記のようなわれわれの知っている限りのことを申し上げると,「実は,11月12日に竹内啓さんと一緒に Stanford 大学を訪ねた機会に Dantzig 先生にお会いしたら,その記事のことで憤慨しておられたよ.」とのこと.Dantzig 先生は,記事に書かれているような Stanford での騒ぎについて記者に話した後,「しかし,理論的な意義はともかく,実用的には,Хачиян の方法が直ちに単体法にとって代るというようなことはまったくなく,その実用性の検討は将来の問題だ.」という慎重論を強調したにもかかわらず,そのことは一切無視して,先生の名前がセンセーションを煽るためだけに利用されているので,すっかりおかんむりだったとのこと(後記4参照).これでやっとわれわれの理解が間違いでなかったと自信がもて,安心した.

森口先生からは,後日,上記諸記事のソースとなった Science の抜刷[13]を頂戴した.さすがに記事の正確さはかなり良く,当を得たことが書いてはある.“巡回セールスマン問題”,“線形計画問題”,“NP完全問題”,等の概念の相互関係も,落着いて読めば誤解がないように書いてあるが,それらが位置的に近い所に書き並べてあるので,慌てて読み間違えた記者がいたのであろう.(科学朝日2月号の記事[17]のことも森口先生から御教示をうけた.巡回セールスマン問題のことなど非本質的なことが強調されている短いトピックス記事である.)

後記1 後になって知ったが,わが国の一部で「NP完全問題が,したがってすべてのNP問題が,多項式オーダーで解けることが証明された」という噂が流されかけたという.地震関係の流言を笑ってばかりはいられない.

後記2 1980年1月11日,藤重悟君がまた“凸2次計画法は多項式オーダーで解ける”という Хачиян 等の論文 [16] を見つけて教えてくれる.§3で概説したような考え方が,そのまま2次計画問題に適用されている.$\theta(\boldsymbol{x})=\max\{f(\boldsymbol{x})-c^{(\nu)}, \max_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i)\}$ とおく.f は2次目的関数,$c^{(\nu)}$ は反復計算の過程でそれまでに知られた実行可能領域内での $f(\boldsymbol{x})$ の値の最小のもの.線形計画問題(最小化問題)もこの形で扱える(f が線形でも同じように扱える).

後記3 1980年2月5日,Cornell 大学のOR学科,計算機科学科の D. Goldfarb 教授から研究報告[18]が届く.多項式オーダーという観点は抜きにして,ソヴィエト流の算法を実用化してみようという話で,本稿§4の(II),(III)の方向に踏み出したもののようである.(問題は“後記2”の形式で扱っている.)

後記4 (校正時挿入) 今野浩君(筑波大助教授)とこの話をしていたら,Dantzig 先生のこのような意見が Stanford 大学の部内資料[19]として印刷されていると教えてくれた(1980年2月6日).

後記5 (校正時挿入) $E^{(\nu)}-H^{(\nu)}$[$E^{(\nu)}=(\boldsymbol{x}^{(\nu)}, Q^{(\nu)})$, $H^{(\nu)}$ は式(6)] をすっぽり包む“体積最小”の超楕円体が $E^{(\nu+1)}=(\boldsymbol{x}^{(\nu+1)}, Q^{(\nu+1)})$ [式(7)およびそれに先行する数行を見よ] であることの略証(編集委員長からの要請により追加):——式(7)の $Q^{(\nu+1)}$ の定義式の右辺の因子 $2^{1/8n^2}$ は,計算誤差を考えてちょっと“余裕をもたせる”ためのものなので,ここでは無視する.任意の直交行列 U に対して,$E=\{\boldsymbol{x}+Q\boldsymbol{z}\mid \|\boldsymbol{z}\|=1\}=\{\boldsymbol{x}+QU\boldsymbol{z}\mid \|\boldsymbol{z}\|=1\}$ であるから,また,$\boldsymbol{x}$-空間の超平面 $\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{x}=0$ は $\boldsymbol{z}$-空間では,$\boldsymbol{a}'\cdot(Q\boldsymbol{z})=(Q'\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{z}=0$ に対応するから,$\boldsymbol{u}^{(\nu)}, U^{(\nu)}$ を本文中で定義した通りとすれば,$E^{(\nu+1)}=(\boldsymbol{x}^{(\nu+1)}, Q^{(\nu+1)})$ は,

$$\boldsymbol{x}^{(\nu+1)}=\boldsymbol{x}^{(\nu)}+\beta Q^{(\nu)}\boldsymbol{u}^{(\nu)},$$
$$Q^{(\nu+1)}=Q^{(\nu)}U^{(\nu)}\mathrm{diag}[b, a, \cdots, a] \qquad (9)$$

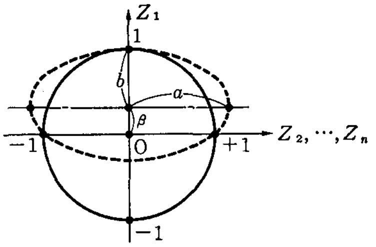

図 2

という形に書くことができる ($\beta=1-b$ で, a, b は n 次元単位超球の上半分を図2のように包む破線の超楕円体の長径, 短径). (“伊理, 韓:ベクトルとテンソル, 教育出版, 1973” のテンソルの概念の説明は, この辺の考え方の参考になろう.) 図2より, 破線の超楕円体

$$(z_1-(1-b))^2/b^2+\textstyle\sum_{j=2}^{n} z_j^2/a^2=1 \tag{10}$$

は, $z_2=\cdots=z_n=0$ のとき $z_1=1$ で球に接するから,「$z_1=0$ のとき $\sum_{j=2}^{n} z_j^2=1$」という条件:

$$(1/b-1)^2+(1/a)^2=1 \tag{11}$$

が a, b が満たすべき条件である. また, 破線の超楕円体の体積は (z から x への変換は斜交変換ではあるが, 体積を“最小”にする問題だけを考えているのであるから, 体積の変換係数 $\det Q$ は問題にならないことに注意!)

$$V=a^{n-1}\cdot b \tag{12}$$

に比例する. そこで, 条件(11)のもとで(12)を最小にする $a, b(>0)$ を求めれば, $a=(1-1/n^2)^{-1/2}, b=n/(n+1)$ ($\beta=1-b=1/(n+1)$) が得られる.

参 考 文 献

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman : *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, 1974.

[2] 伊理正夫 : 数値計算の手順について. 数理科学, 1970年9月号(特集“アルゴリズム”), pp. 21~28.

[3] 伊理正夫 : アルゴリズム研究のゆくえ. bit, Vol. 8, No. 11 (1976年10月), pp. 64~68.

[4] 伊理正夫 : “辞書的順序”や“摂動”は線形計画法の教科書から姿を消すことになるでありましょう. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 22, No. 2 (1977年2月), pp. 110~113.

[5] M. Iri : A Very Personal Reminiscence on the Problem of Computational Complexity. *Proceedings of the Second IBM Symposium on Mathematical Foundations of Computer Sciences*. IBM Japan, Sept. 26~28, 1977, pp. 73~100.

[6] Peter Gács and Laszlo Lovász : Khachian's Algorithm for Linear Programming.

[7] 刀根薫 : 数理計画. 朝倉書店, 1978.

[8] A. W. Tucker : 数理計画法誕生のころ. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 21, No. 1 (1976年1月), pp. 38~43.

[9] Б. Т. Поляк : Минимизация Негладких Фуикционалов. *Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики*, Том 9, вып. 3 (1969), pp. 509~521.

[10] Л. Г. Хачиян : Полиномиалиный Алгоритм в Линейном Программировании. *Доклады Академии Наук СССР*. Том 244, вып. 5 (1979年1月), pp. 1093~1096.

[11] Н. З. Шор : О Скорости Сходимости Метода Обобщенного Градиентного Спуска с Растяжением Пространства, *Кибернетика*, вып. 2 (1970), pp. 80~85.

[12] Д. Б. Юдин и А. С. Немировский : Информационная Сложность и Эффективные Методы Решения Выпуклых Экстремальных Задач. *Экономика и Математические Методы*, Том 12, вып. 2 (1976), pp. 357~369.

[13] “Mathematicians Amazed by Russian's Discovery”, *Science*, Vol. 206 (November 2, 1979), pp. 545~546.

[14] “Young Russian Solves Computer Conundrum”, *Daily Yomiuri*, November 5, 1979.

[15] “A Soviet Discovery Rocks World of Mathematics”, *New York Times*, November 7, 1979.

[16] М. К. Козлов, С. П. Тарасов и Л. Г. Хачиян : Полиномиальная Разрешимость Выпуклого Квадратического Программирования. *Доклады Академии Наук СССР*, Том 248, вып. 5 (1979), pp. 1049~1051.

[17] ソフトウェアの新解法を発見(トピックス). 科学朝日, 1980年2月号, pp. 23~24.

[18] D. Goldfarb and M. J. Todd : Modifications and Implementation of the Shor-Khachian Algorithm for Linear Programming. *Technical Report* TR 80-406, Department of Computer Science, Cornell University, January 1980.

[19] G. B. Dantzig : Comments on Khachian's Algorithm for Linear Programming. *Technical Report* SOL 79-22, Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, November 1979.