

多階層計画システムと計画調整

青 沼 龍 雄

近年エネルギー問題に端を発して、希少資源の適切な配分やその効率的な使い方を求める多部門計画モデルが経済計画や公共的計画の分野で重要視されてきた。また企業においても組織のマンモス化、活動の多様化国際化に伴って、資金・人員・エネルギーなどの部門間共有資源の配分や中間財の事業部門取引きに関する問題の重要性が認識されている。この種の意味決定問題を数理計画モデルとして定式化する試みも多くなされている。これらの数理計画モデルは、組織的・時間的に広い範囲を包括しなければならないことから、しばしば多部門・多段階構造とよばれるきわめて大型のモデルになることが知られている。構造化された問題の効率的解法を研究する分野として大規模数理計画法の誕生をみたことは周知の通りである。一方、数理計画で著名な Geoffrion さんのお言葉：“The Purpose of Mathematical Programming is Insight, not Numbers”の示すように、問題の解を求めることの重要性以上に、そのような解の出てくる必然性を対象システムの特性的なかからくみ取ることが重要である。計算術としてはあまり評価されない分割計算法を、組織設計論や分析論などの立場から考察すると、効率的な計画システムや情報システムを設計するうえで有益な示唆を与えてくれる。

組織が大きくなると情報自治とか情報の分権化

(informational decentralization)の思想がシステム設計に必要なことになる。情報的に分権化されたシステムでは、組織の全体目的に適う計画を作るために部分組織間の計画調整 (coordination) を行なう機能がきわめて重要である。そこで、多部門個別計画 (project planning) や多期間計画 (multiperiod planning) を行なう場合を例にとりながら、情報的に分権化された計画システムの特性とその計画調整メカニズムについて考察してみたい。

1. 情報的に分権化された計画プロセス

適切な情報を短時間で意思決定者に提供するための情報処理システムとして、MISやMDSSの設計の必要性が唱えられてもう久しい。組織が大きく複雑になればなるほど、意思決定に必要な情報的要求は途方もなく大きくなり、物理的・経済的面からも中央集権的意思決定を前提とした情報システムの設計は困難となろう。そのために、計画システムは多重レベル・階層化され、情報的に分権化されたシステムが作られる。ここで言う“情報の分権システム”とは単に上位組織が下位組織のもつ情報のすべてを知ることなく組織の全体目的に適う計画を作ることができるシステムを指し、Hurwiczのいう厳密な定義とは異なっている。

図1は多階層システムの基本である2-レベルシステムである。以後の説明では、この2-レベ

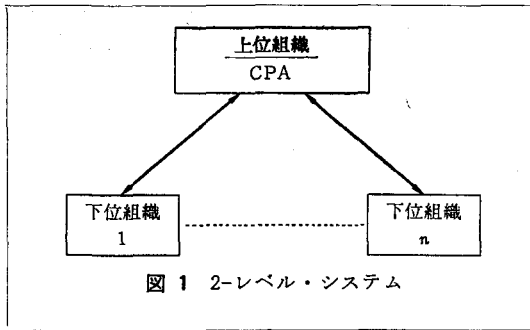


図 1 2-レベル・システム

ル・システムを対象にして議論することにしよう。上位組織 (CPA; Central Planning Agency) と下位組織の間で伝達し合う情報を規定すると、情報的に分権化された1つの計画プロセスが定義される。そのとき、定義された計画プロセスは、組織の全体目標を本当に達成することができるか、交換する情報量や必要回数は現実的なものか、経験が有効に利用できるか、意識的に誤った情報の伝達が行なわれたとき (cheating) の影響はどうか、などについて調べてみる必要がある。

数理計画プロセスを具体的に記述するには、計画のための組織をつぎの4つの面から考察することが必要である [11] : (1)組織全体の理想としてある計画問題、(2)組織の階層構造と部分組織の役割、(3)部分組織の活動を調整する様式、これを計画調整メカニズムとよぶ。(4)調整メカニズムに対応する計画問題 (計画プロセスから誘導される計画問題)。もし(1)の問題と一致する場合にはこの計画プロセスは(1)に関して調整可能であると言う。

計画プロセスを定式化するには一般に2つの方法が考えられる。第1は計画問題(1)をいくつかの部分組織の計画問題に分割し、それらが組織全体の計画になるような調整メカニズムを導入して計画問題(1)に最も適したシステムを設計するという形をとる。これは分割的方法とよばれ、分割理論からのシステム設計である。第2は、部分組織が行なっている(部分)計画問題を明確にし、それらが調整メカニズムによって組織全体のどんな計画問題の解になるかを明らかにしていく方法で構成

的方法とよんでいる。現実のシステムがうまく機能しているかを判定するための分析的手法として有効である。

数理計画プロセスの効率は分割計算法とは別な観点から評価され、たとえば、①実行可能計画の得やすさ、②情報交換の初期段階における最適適度 (現実の計画作成では普通3~5回程度の情報交換が行なわれているという[3])、③改良過程における実行可能性の保持、④改良の単調性の有無、⑤“良い”初期値の有効性(経験の有効さ)、⑥現実的に扱い得る部分組織の数、などがとくに重要視されている。

2. 代表的な調整メカニズム

計画問題が線形計画モデルで定式化される理想的な環境を考える。たとえば、 n 部門の最適活動レベルを決めるつぎの問題を取り上げる：

$$\max \sum_{i=1}^n C_i x_i$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n A_i x_i \leq b_0$$

$$B_i x_i \leq b_i, \quad x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

ここで x_i は第 i 部門の活動レベル、 b_0 は各部門の共用資源、 b_i は第 i 部門独自の資源である。この計画問題が、図1の情報の分権システムで解かれるとしよう。このとき、CPA が下位組織に伝達する情報には、一般に(イ)下位組織が使用できる共用資源の量(予算) y_i 、と(ロ)共用資源の価格(振替価格) π_0 、の2種類がある。(イ)の場合には、下位組織は資源 y_i の限界価値 (シャドウ・プライス)、すなわち共用資源の“入札価格”をCPAに提出してこたえる。この方法による計画調整を資源指導型あるいは予算配分による調整という。(ロ)の場合には、下位組織はCPAから指示された価値体系のもとで最適計画を求め、そこで消費される共用資源の量をCPAに報告する。この方法による調整は、価格指導型あるいは振替価格による計画調整という。

資源指導型の下位組織の計画問題は、自己の技術係数だけを用いてつぎのように定式化される：

$$\begin{aligned} \max \quad & v_i(y_i) = C_i x_i \\ (2) \quad & A_i x_i \leq y_i \\ & B_i x_i \leq b_i, x_i \geq 0 \end{aligned}$$

また、このときのCPAの配分問題は形式的にはつぎのように書くことができる：

$$(3) \quad \max \left\{ \sum_{i=1}^n v_i(y_i) \mid \sum_{i=1}^n y_i \leq b_0 \right\}$$

$v_i(y_i)$ は折線1次の凹関数になることは、よく知られているが、その完全な形を算出することは計算量の面から不可能である。問題(2)の y_i の双対解(シャドウ・プライス) π_i は y_i における $v_i(y_i)$ の“ある種の勾配”(Subgradient)を表わしている。これを用いてCPAは配分量の調整を行なうのが資源指導型の考え方である。このプロセスは最終的に各部門の資源の限界価値が一致したとき($\pi_1^* = \dots = \pi_n^*$)、最適な配分が得られて終了するはずである。シャドウ・プライスの特異性に関するEilon [4]の数値例からもわかるようにCPAがたとえ最適配分 $\{y_i^*\}$ を行なった場合でも問題(2)の双対解が各部門を通じて一致する保証はない。そのために $v_i(y_i)$ を $\pi_i y_i$ で代用するという単純なCPAの配分問題は機能しないのである。このため、たとえば初期の2レベル計画法[9]では今までに得られた π_i の加重平均を用いている。

問題(1)はまたつぎのように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad \text{双対変数} \\ & A_i x_i - y_i \leq 0 : \pi_i \\ (4) \quad & B_i x_i \leq b_i : \rho_i \\ & \sum_{i=1}^n y_i \leq b_0, x_i \geq 0 \end{aligned}$$

これにBendersの分割原理を適用すれば、つぎのようなTen KateのCPA配分問題が得られる[12].

$$\max \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

$$(5) \quad \pi_i^{(l)} y_i + \rho_i^{(l)} b_i \geq \sigma_i \quad (i=1, \dots, n; l=1, \dots)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq b_0$$

ここで $\pi_i^{(l)}$ 、 $\rho_i^{(l)}$ は(2)のすべての双対解(基底)であり、 $\pi_i^{(l)} y_i + \rho_i^{(l)} b_i \geq \sigma_i$ は $v_i(y_i)$ の折線表示と考えてよい。

資源指導型は、下位組織が常に自己の評価関数に関して最適計画を作っている、CPMは初期配分で良い経験値を利用することができる、適切な資源配分さえすれば常に実行可能な計画が得られる、という応用上すぐれた特徴もっている。

価格指導型における下位組織の計画問題は、つぎのようになる：

$$\begin{aligned} (6) \quad \max \quad & z_i(\pi_0) = (c_i - \pi_0 A_i) x_i \\ & B_i x_i \leq b_i, x_i \geq 0 \end{aligned}$$

π_0 はCPMが決めた共用資源 b_0 の価格、 $\pi_0 A_i$ はその消費に伴う費用を表わしている。

この方法では、部分計画の全体が共用資源の制約を必ずしも満たさないことに注意することが肝要である。したがってCPMは共有資源の制約を満たすような部分計画の採用レベルを決定する問題を解かなければならない。このときの共有資源のシャドウ・プライスが b_0 の振替価格として用いられる。これがDantzig-Wolfeの計画プロセスである。

希少資源の事業部間取引を行なう場合に、組織の全体目的に合致するような振替価格が求めれば価格による完全な分権化ができて都合がよい。しかし、この価格指導型のメカニズムを考察することによってこのことが不可能であることがわかる。希少資源の制約は一般に問題(6)の内点の計画に対応すると考えてよい。しかし、 π_0 のどんな値($\neq 0$)に対しても(6)の最適解は境界上になるからである。このように価格指導型では実行可能計画を求めることが大変厄介であると同時に最適な計画への接近がきわめて遅いという欠点もっている[2, 7, 11]。しかし、部分組織の数が増えるとその傾向が改善されるという実験報告もなされて

表 1 2つの調整メカニズムの比較

	資源指導型	価格指導型
情報の数	共有資源の回数	共有資源の回数
情報の型	C P Aから：資源配分量（予算） 下位から：入札価格	C P Aから：資源の振替価格 下位から：資源の使用量
情報交換数	有限 [12] か無限 [9]	有限回
調整機能	<ul style="list-style-type: none"> ・実行可能計画が得やすい。 ・少ない情報交換でよい計画が得られる。 ・経験の利用が有効。 ・改良に単調性がない [9] ・誤った情報に敏感である。 	<ul style="list-style-type: none"> ・実行可能計画が得難い。 ・情報交換の回数が多い。 ・経験の利用は効果がない。 ・改良に単調性がある。 ・誤った情報にあまり敏感でない。
部分組織の計画	実行可能計画は必ずしも得られないが、自己の評価関数に関して最適な計画が得られる。	常に実行可能計画が得られるが、自己の評価関数に関して最適ではない。
組織構造	部分組織の数は少ないほうがよい	部分組織の数が多いと有効になる
その他	現実的である	理論的である

いる [3]。表1はこれら2のつの方法の比較をまとめたものである。

資源型調整メカニズムに一部価格型の調整機能を付加したハイブリッドな調整メカニズムも考えることができる。Aonuma 分割理論[1]では、資源指導型を基礎にして一部の活動の価格体系を変えろという調整方法をとっている。その結果、きわめて少ない回数の情報交換で高い最適度の計画が得られている。純粹の資源型とは異なって、この傾向は部分組織数が多くなると一層促進される。C P Aの資源調整は $y_t = y_t^{(k)} + T_t^{(k)} \lambda_t$ の形で行なわれ、 λ_t は前回の配分 $y_t^{(k)}$ を調整する変数である。 $T_t^{(k)}$ は特定の活動に関する技術情報の蓄積を表わし、上の2方法が技術情報の伝達を行なわなかったのに対し、この方法では一部の活動の技術情報を伝達しなければならない。この点では Hurwicz のいう情報的に最も効率の良いプロセスではない。しかし、情報交換回数まで含めた総情報交換量の面ではすぐれているものと考えられる。

3. 多期間計画における分割と調整

個別計画と同様に多期間計画に対しても情報的分権化のプロセスを考えることができる。とくに

多期間モデルでは近時点のデータと遠時点のデータとでは確実度が異なることから、各期のモデルを分割最適化するシステムのほうが計画調整の段階で計画担当者のもつ不確実度に対する“体験的効用関数”をうまく利用することができる。

計画対象期間 N のつぎの計画問題を考えてみよう。

$$\max \sum_{t=1}^n c_t x_t$$

$$(7) \quad A_1 x_1 + T_1 y_1 \leq b_1$$

$$S_{t-1} y_{t-1} + A_t x_t + T_t y_t \leq b_t \quad (t=2, \dots, N)$$

$$y_t, x_t \geq 0 \quad (t=1, \dots, N)$$

x_t は第 t 期の活動レベル、 y_t は第 t 期と $t+1$ 期を結ぶ連結変数である。

Dantzig-Wolfe の分割理論を応用した価格指導型の第 t 期分割モデルはつぎのように定式化される(すでに $k-1$ 回計画が作られた後)：

$$\max -\pi_{t-1} T_{t-1} y_{t-1} + c_t x_t + \sum_{j=1}^{k-1} p_t^j \lambda_t^{jk}$$

$$(8) \quad S_{t-1} y_{t-1} + A_t x_t + \sum_j q_t^j \lambda_t^{jk} \leq b_t : \pi_t$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_t^{jk} = 1$$

ここで $q_t^j = T_t y_t^{(j)}$ は第 $t+1$ 期以後の計画による

t 期の資源 b_t の消費量, p_t^j はその計画からの利益額, λ_t^{jk} は提出済みのこれら $k-1$ 個の計画の採用レベルを表わす変数である. また, π_{t-1} は $t-1$ 期の計画における資源 b_{t-1} の価値, $T_{t-1} y_{t-1}$ はその使用量を表わしている.

第 1 期のモデルは第 2 期以降の計画に対して, CPA の役割を果たし, 同様に第 2 期のモデルは第 3 期以降に対する CPA の役割を果たしている... 等々となっていることがわかるであろう. したがって (8) で表わされた分権化システムは, nested な形の N -レベルの階層システムによる計画プロセスを表わしている. 問題 (8) の定義の順番を逆にすれば, 第 1 期が最下位になるような階層的計画プロセスも作ることができる.

全体の連結変数の数が少ないときは, Aonuma の分割法を適用することによって, 資源指導型の計画プロセスを作ることができる. この方法では連結変数の初期値に良い経験値を利用することができるので計画調整の効率が高められる. また, 各期のモデルは x_t だけの変数のモデルになるので, 目的関数 $z_t \equiv c_t x_t$ の間に陰伏的な効用関数 $U(z_1, z_2, \dots, z_N)$ が存在する場合に Geoffrion の対話型評価法が利用できて都合が良い.

4. 目標の階層間分割

さて, 構成的方法による計画プロセスの作成の例を述べよう. Ruefli [10] は図 2 で示される 3-レベル階層組織の計画プロセスをつぎの 3 つのモデルで定式化した.

[第 k 管理部門の問題]

$$\min W_k^+ y_k^+ + W_k^- y_k^- \quad \text{双対変数}$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} A_{j,k} x_{j,k} - y_k^+ + y_k^- = G_k : \pi_k$$

$$0 \leq x_{j,k} \leq 1, y_k^+, y_k^- \geq 0$$

ここで $A_{j,k}$ は業務部門から提出されたプロジェクト, G_k は CPA から与えられた目標値を表わす. 目的関数は目標値に対する不満足度である.

[業務部門の問題]

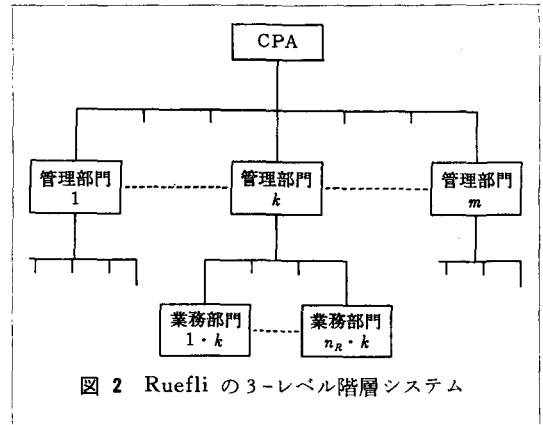


図 2 Ruefli の 3-レベル階層システム

$$\min \pi_k A_{j,k}$$

$$D_{j,k} A_{j,k} \geq F_{j,k}, A_{j,k} \geq 0$$

$A_{j,k}$ はプロジェクトを表わす変数である.

[CPA の問題]

$$\max \sum_{k=1}^m \pi_k G_k$$

$$\sum_{k=1}^m P_k G_k \leq G_0, G_k \geq 0$$

G_k は目標値を表わす変数, G_0 は目標に関する制約ベクトルを表わす.

この計画プロセスでは管理部門の双対変数 $\pi_k^{(t)}$ が CPA と業務部門に伝達され, つぎの管理部門のモデルに対する目標値 $G_k^{(t+1)}$ とプロジェクト $A_{j,k}^{(t+1)}$ が求められて情報の反復が行なわれる. しかし, この計画プロセスが解こうとしている組織全体の計画問題は何なのか, このプロセスによって得られる計画は組織の全体目的に適うものなのか明らかでない. この例は, 部分組織単位の計画問題を明らかにしていっても組織全体の問題が明らかにならないことを示している. とくに, このモデルでは CPA による目標値の設定が可能領域の境界にのみ限定されてしまうことがわかる. もし目標値が内点からも選べるようなモデルにすれば, Freeland [5] が示すように, たとえば CPA の問題は,

$$\min \sum_{k=1}^m \sigma_k$$

$$\sigma_k \geq \pi_k^{(t)} G_k \quad (t=1, 2, \dots)$$

$$\sum_{k=1}^m P_k G_k \leq G_0$$

となり、しかも組織全体は目標に対する不満足度最小化を狙っていることが明らかになる。この方法はさらに CPA や管理部門がそれぞれ独自に設定した目標をもち、しかもそれらの間にコンフリクトのある非協力型組織の目標設定の問題にも拡張することができる[6]。

参 考 文 献

[1] Aonuma, T., "A Resource-directive Decomposition Algorithm", presented at the XXIV TIMS Int. Meeting, 1979.

[2] Burton, R. M., et al., "The Economics of Decomposition", *Decision Sci.*, **5** (1974), 297-310.

[3] Christen, J., & B. Obel, "Simulation of Decentralized Planning.....", *Mgmt. Sci.*, **24** (1978), 1658-1667.

[4] Eilon, A., & R. Flaver, "Note on Many-sided Shadow Prices", *Omega*, **2**(1974), 821-823.

[5] Freeland, J. R., "A Note on Goal Decomposition in a Decentralized, Organization", *Mgmt. Sci.*, **23**(1976), 100-102.

[6] —, & N. R. Baker, "Goal Partitioning in a Hierarchical Organization", *Omega*, **3**(1975), 673-688.

[7] —, & J. H. Moore, "Implication of Resource Direction Allocation Models...", *Mgmt. Sci.*, **23**(1977), 1050-1059.

[8] Geoffrion, A. M., "Primal Resource-directive Approaches for...", *Opns. Res.*, **18**(1970), 375-403.

[9] Kornai, J., & T. Liptak, "Two-level Planning", *Econometrica*, **33**(1965), 141-169.

[10] Ruefli, T. W., "A Generalized Goal Decomposition Model", *Mgmt. Sci.*, **17** (1971), B-505-518.

[11] Sweeny, D. J., et al., "Composition vs. Decomposition", *Mgmt. Sci.*, **24**(1978), 1491-1499.

[12] Ten Kate, A., "Decomposition of Linear Programs by Direct Distribution", *Econometrica*, **40**(1972), 883-898.

■ミニミニOR■

交通量ゼロでも衝突はおこる

台風の前夜のこと。仕事が遅くなって、豪雨のなかを深夜に車をドライブして帰る破目になった。青梅街道をわが家にむかって進行するわけだが、前後左右は雨中にかかわらずタクシーがわれがちにラッシュしていて危険きわまりない。深夜なのにこんなに交通量があるのかといふかりながら1台1台やり過ぎすと、後方はまったくの真空状態なので2度おどろいた。深夜まで働いている交通信号が、パルスの整形回路のように作用し、十数台のタクシーを団子状にかためてしまったのだ。このタクシー群を全線にならずと、昼間のラッシュ時に比べて交通量はゼロに等しくなるはずだが、交通量ゼロだからといって、決して安全ではないのである。バラバラになって走れば前後左右を気にする必要がなくなるにもかかわらず、わざわざ密集して鼻をつき合わせるように走るタクシー運転手の知恵のなさはあきれるばかりだが、危険の確率は平均交通量とは関係ないものであることを体験して、怖ろしさに身ぶるいた次第である。

深夜でなくとも、一般の高速道路では車輛の流れが団子化することが知られている。私はなるべく団子の谷間を選んで走るようにしている。運転手の習性をどのように教育したら団子化現象が解消してスムーズな車の流れが得られるのだろうか。

(小野勝章)

× × ×

× × ×