

# 不動点アルゴリズムと数理計画法

小島 政和

## 1. Brouwer の不動点とは？

$X$  を  $n$  次元ユークリッド空間  $R^n$  の有界閉凸集合、 $f$  を  $X$  から  $X$  の中への連続写像としたとき、 $f(x)=x$  なる  $x \in X$  が存在する。このような  $x$  を  $f$  の不動点という。この結果は、Brouwer の不動点定理 [2] とよばれ、ゲームの理論や経済的均衡論等の分野でよく使われる基本的な定理の 1 つである。この定理は、今から約 70 年前に証明されているが、不動点を近似する効率のよい手法が提案されたのは比較的最近のことである ([14])。

以下では議論を簡単にするために  $X \subset R^n$  が  $n$  次元の単位超立方体の場合についてのみ考える。すなわち、

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1\}$$

$f$  を  $X$  から  $X$  の中への連続写像とする。  $n=1$  の場合について不動点の存在を証明しておこう。この場合には  $X$  は単位閉区間  $[0, 1]$  になる。  $f$  のグラフ

$$\{(x, y) : y = f(x), 0 \leq x \leq 1\}$$

を書いてみよう (図 1 参照)。このグラフと原点  $O$  から右斜め上 45 度に引いた線分

$$OB = \{(x, y) : y = x, 0 \leq x \leq 1\}$$

との交点が  $f$  の不動点に対応している。  $f$  のグラフは線分

$$OA = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$$

上の 1 点  $(0, f(0))$  と線分

$$BC = \{(1, y) : 0 \leq y \leq 1\}$$

上の 1 点  $(1, f(1))$  を結ぶ曲線であるから必ず線分  $OB$  と交わる。その点を  $(\bar{x}, \bar{y})$  とすれば、 $(\bar{x}, \bar{y})$  が  $f$  のグラフに含まれていることより、 $\bar{y} = f(\bar{x})$ 。また、 $(\bar{x}, \bar{y}) \in OB$  より、 $\bar{y} = \bar{x}$  が得られる。ゆえに、 $f(\bar{x}) = \bar{y} = \bar{x}$  となる。すなわち、 $\bar{x}$  は  $f$  の不動点である。図 1 の場合には  $f$  は 3 個の不動点  $x^1, x^2, x^3$  をもつ。  $f$  が連続であるという仮定は、 $f$  のグラフが  $(0, f(0))$  と  $(1, f(1))$  を結ぶ “つ

ながった 1 本の” 曲線であることを意味している。もし、 $f$  が不連続であり、 $f$  のグラフがつながっていない場合には不動点が存在しないことがある (図 2 参照)。

$n=2$  の場合には  $X$  は単位正方形

$$\{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$$

になる (図 3 参照)。  $f$  は  $X$  上の各点  $x$  をその上のある点  $f(x)$  に移す連続写像である。このとき、 “ $X$  上の点  $x^*$  で  $f$  による像  $f(x^*)$  が  $x^*$  に一致する  $x^*$  が存在する。” これが Brouwer の不動点定理の主張である。

一般に、不動点を求める問題は非線形方程式系

$$g(x) = 0$$

の特別な場合である。ただし、

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$$

実際、

$$g(x) = f(x) - x \quad (x \in X)$$

とおけばよい (図 1 の場合には、 $g$  は図 4 のようになる)。非線形方程式系に対しては多くの手法が提案されている。しかしながら、これらの手法のほとんどは “大域的

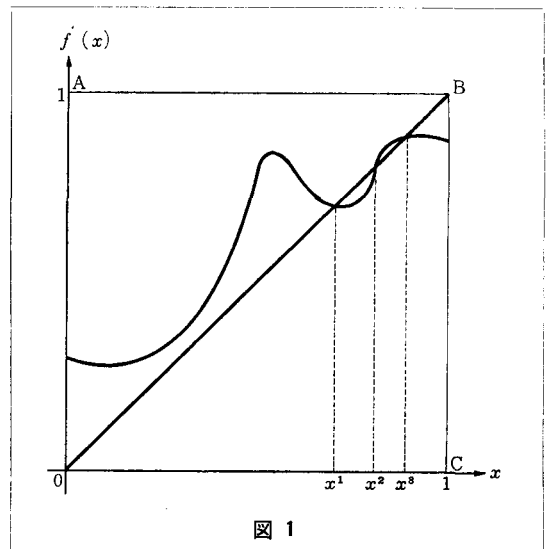


図 1

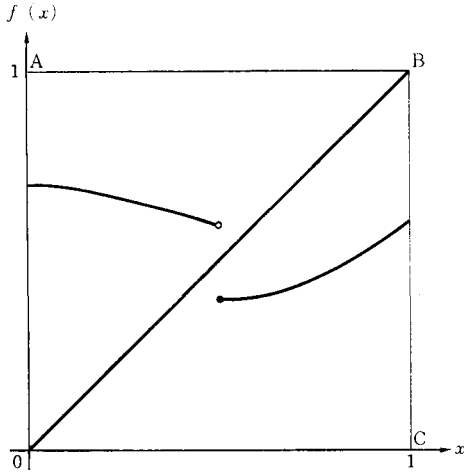


図 2

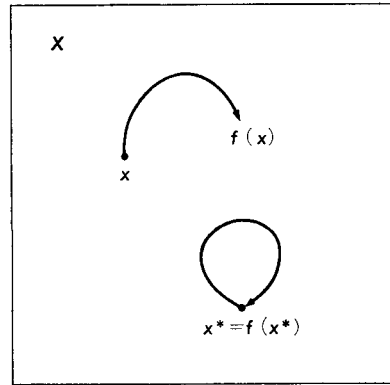


図 3

な収束性がない”，すなわち，“初期点が解に十分近いときにしか解への収束が理論的に保証されない”という大きな欠点をもっている。たとえば，図 4 において  $x^0$  を初期点にして Newton 法を用いた場合には振動がおこって， $g(x)=0$  の解 ( $f$  の不動点) には収束しないことがわかる。不動点アルゴリズムの魅力は大域的な収束性にある。

## 2. 不動点アルゴリズムの原理

Scarf[14] が Brouwer の不動点を近似する方法を発表して以来，不動点アルゴリズムは長足の進歩を遂げている。以下で述べる“不動点アルゴリズムの原理”は，現存する不動点アルゴリズムのなかで計算効率がよいとされているもの ([6], [7], [11]等) が共通にもっている基本的な構造である。

最初に図 1 の例を用いて不動点アルゴリズムの原理を説明しよう。まず， $0 < x^0 < 1$  なる  $x^0 \in X$  を選ぶ。 $x^0$  が不動点アルゴリズムの初期点になる。つぎに，任意の  $(x, t) \in X \times [0, 1]$  に対して，

$$h(x, t) = (1-t)x^0 + tf(x)$$

と定義し，

$$S = \{(x, t) : h(x, t) = x\}$$

とおく。 $t$  を 0 に固定すると，

$$h(x, 0) = x^0 \quad (x \in X)$$

は定値写像になり， $h(\cdot, 0)$  はただ 1 つの不動点  $x^0$  をもつ(図 5 参照)。 $t \in [0, 1]$  をパラメータとみなして，その値を 0 から増加させると，定値写像であった  $h(\cdot, 0)$  は連続的に変形され， $t=1$  で  $f(\cdot)$  に一致する。 $(x, t) \in X \times [0, 1]$  を 1 つ決めると， $h(x, t)$  は  $x^0 \in X$  と  $f(x) \in X$  を結ぶ線分上に位置するから，各  $t \in [0, 1]$  に対して  $h(\cdot,$

$t)$  は  $X$  から  $X$  の中への連続写像となる。したがって，不動点をもつ。 $h(\cdot, t)$  のグラフ

$$\{(x, y) : y = h(x, t)\}$$

と線分  $OB$  との交点が  $h(\cdot, t)$  の不動点に対応している。パラメータ  $t$  が変化するにつれてこの交点(不動点)も動く。パラメータ  $t$  に対応する  $h(\cdot, t)$  の不動点の組の集合を  $S$  とした。 $S$  は図 6 のようになる。

$S$  の定義より， $S$  は  $(x^0, 0)$  を含む。 $(x^0, 0)$  を含む  $S$  の連結成分を  $S^0$  としよう。 $S^0$  は  $(x^0, 0)$  と  $(x^1, 1)$  を結ぶ曲線になっている。 $x^1$  は  $f$  の不動点である。したがって， $(x^0, 0)$  を初期点として，曲線  $S^0$  上の点  $(x, t)$  をたどって， $t=1$  まで到達できれば  $f$  の不動点  $x^1$  が求まる。

以上を  $n \geq 1$  の場合に一般化するとつぎのようになる。

手順 1 :  $0 < x_i^0 < 1 (i=1, \dots, n)$  なる

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in X \text{ を 1 つ 選 ぶ.}$$

手順 2 : 任意の  $(x, t) \in X \times [0, 1]$  に対して，

$$h(x, t) = (1-t)x^0 + tf(x)$$

と定義し，

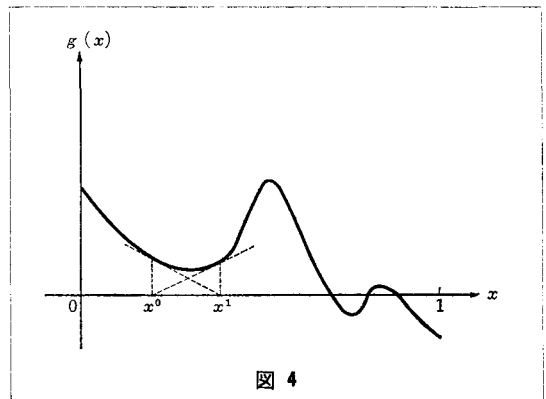


図 4

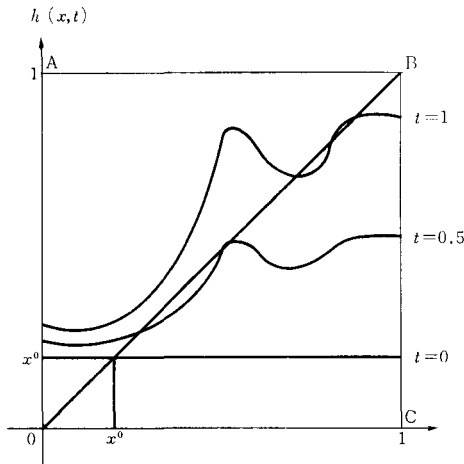


図 5

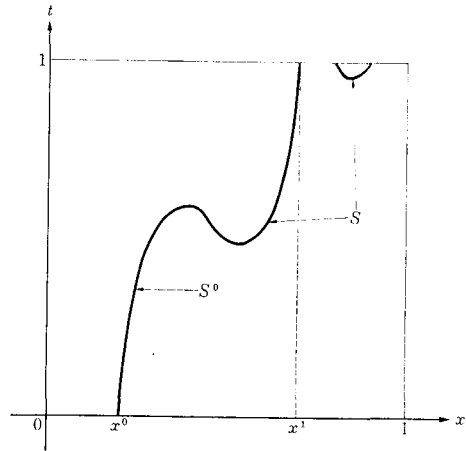


図 6

$$S = \{(x, t) : h(x, t) = x\}$$

とおく。

手順 3 :  $(x^0, 0) \in S$  を初期点とし,  $S$  上の点  $(x, t)$  をたどって  $t=1$  まで到達する。

手順 3 が成功するためには  $S$  に含まれる曲線で  $(x^0, 0)$  とある  $(x^1, 1)$  を結ぶものが存在する必要がある。このことに関して補足しておく。  $S$  を定義するのに使われた非線形方程式系  $h(x, t) = 0$  を成分ごとに表示すると,

$$h_1(x_1, \dots, x_n, t) = 0$$

$$h_2(x_1, \dots, x_n, t) = 0$$

⋮

$$h_n(x_1, \dots, x_n, t) = 0$$

$$0 \leq x_1, \dots, x_n, t \leq 1$$

となる。この方程式系は  $n+1$  個の変数と  $n$  本の方程式よりなっている。変数の個数が方程式の個数より 1 だけ多く、1 次元の自由度をもっている。したがって、適当な条件のもとで、その解集合は 1 次元の自由度をもった互いに交わらない曲線の集合となる(図 6 参照)。 $(x^0, 0)$  を含み,  $S$  に含まれる曲線を  $S^0$  とすると,  $S^0$  は  $(x^0, 0)$  と  $X \times [0, 1]$  の境界に含まれるある  $(x^1, t^1) \neq (x^0, 0)$  を結ぶ曲線になる。 $t^1=1$  を示そう。 $t^1=0$  と仮定すると,  $(x^1, t^1) \in S$  より,

$$x^1 = h(x^1, t^1) = h(x^1, 0) = x^0$$

となって  $(x^1, t^1) \neq (x^0, 0)$  に矛盾する。 $0 < t^1 < 1$  と仮定すると,  $(x^1, t^1)$  が  $X \times [0, 1]$  の境界に含まれていることより, ある番号  $i$  に対して,

$$(1) \quad x_i^{t^1} = 0 \quad \text{または} \quad x_i^{t^1} = 1$$

である。他方,  $(x^1, t^1) \in S$  より,

$$x_i^{t^1} = h_i(x^1, t^1)$$

$$= (1-t^1)x_i^0 + t^1 f_i(x^1)$$

$$= 1 - \{(1-t^1)(1-x_i^0) + t^1(1-f_i(x^1))\}$$

を得る。上の等式と,  $0 < t^1 < 1$ ,  $0 < x_i^0 < 1$ ,  $0 \leq f_i(x^1) \leq 1$  より,  $0 < x_i^{t^1} < 1$  を得る。これは(1)に矛盾する。ゆえに  $t^1=1$  であることが証明された。 $f$  に関する仮定“任意の  $x \in X$  に対して,  $f(x) \in X$ ”が使われたのは証明の最後の部分だけであることを注意しておく。

一般に  $S^0$  は非線形な曲線になるので  $S^0$  を正確にたどることはできない。なんらかの方法で  $S^0$  を近似する必要がある。その近似方法の違いによって,

(a) 微分を使う方法([1], [3])

(b) 区分的線形化手法(相補掃き出し法, [6], [7], [11])

に分類される。(b)に関しては[10]参照。

### 3. 非線形計画への応用

上述の不動点アルゴリズムの原理を数理計画問題(線形, 2次, 凸, 非線形計画問題)に応用した研究としては[12], [5], [11], [13], [9]等がある。ここではごく最近の話題を2つ取り上げて紹介しよう。とくに, 後半で述べる“大域的微小解への1つのアプローチ”に関しては, その可能性が示唆された段階にあるといつてよい。

#### 3.1 パラメトリックな非線形計画

$t \in [0, \infty)$  をパラメータとする非線形計画問題

$P(t)$  目的:  $h_0(x, t) \rightarrow$  最小化

条件:  $h_i(x, t) \leq 0 \quad (1 \leq i \leq q)$

を考える。ただし,  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{R}^p$  は変数,  $h_i: \mathbf{R}^p \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R} \quad (0 \leq i \leq q)$  は2階連続微分可能。任意の

$\alpha \in \mathbf{R}$  と  $u = (u_1, \dots, u_q) \in \mathbf{R}^q$  に対して,

$$\alpha^+ = \max\{0, \alpha\}, \quad \alpha^- = \min\{0, \alpha\}$$

$$u^+ = (u_1^+, \dots, u_q^+)$$

$$u^- = (u_1^-, \dots, u_q^-)$$

と定義すると、任意の  $u \in \mathbf{R}^q$  に対して,

$$u_i^+ \geq 0 \quad (1 \leq i \leq q)$$

$$u_i^- \leq 0 \quad (1 \leq i \leq q)$$

$$u_i^+ = 0 \quad \text{または} \quad u_i^- = 0 \quad (1 \leq i \leq q)$$

が成立する。この関係を用いると、

非線形計画問題  $P(t)$  に対する最適性のための必要条件 (Kuhn-Tucker の平衡条件)は、

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial h_0(x, t)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^q u_i^+ \frac{\partial h_i(x, i)}{\partial x_j} = 0 & (1 \leq j \leq p) \\ u_i^- - h_i(x, t) = 0 & (1 \leq i \leq q) \end{cases}$$

の形に書ける。この方程式系は  $p+q+1$  個の実変数  $x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q, t$  と  $p+q$  本の方程式よりなる方程式系である。したがって、適当な条件のもとでは、その解  $(x, u, t)$  の集合  $S$  は互いに交わらない曲線の集合となる。  $S$  上の1点が与えられれば、それを含む曲線を不動点アルゴリズムで追跡できる。詳しくは[9]参照。

非線形方程式系(2)は問題  $P(t)$  の最適性の必要条件であるから、  $(x, u, t)$  がその解集合  $S$  に含まれていたとしても、  $x$  が  $P(t)$  の最小解であるとは限らない。極小解、極大解、最大解あるいは鞍点解であるかも知れない(図7参照)。それゆえ、点  $(x, u, t)$  が  $S$  の曲線上を動くとき、  $x$  が、

極小解  $\rightarrow$  鞍点解  $\rightarrow$  極大解

のような質的な変化をおこす可能性がある。また、図8のような場合には、点  $(x^*, u^*, t^*) \in S$  において、パラメータ  $t$  の値を微小量増加させようとする  $S$  の点は消滅し、逆に減小させると  $S$  の点は分岐する。このような現象はカタストロフィーとよばれている。不動点アルゴリズムでは、途中でカタストロフィーがおきるような場合でも、それを乗り越えて  $S$  内の曲線を追跡することができる。

### 3.2 大域的最小解への1つのアプローチ

非線形計画問題において、(大域的)最小解を求めることは非常にむずかしいとされている。最初に制約条件の付かない非線形最小化問題

$P1$  目的:  $e_0(x) \rightarrow$  最小化

について考えよう。ここでは、  $e_0$  は  $p$  次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^p$  で定義された1階連続微分可能な実数値関数とする。  $x \in \mathbf{R}^p$  が問題  $P1$  の(大域的)最小解であるとする。よく知られているように、  $x$  は、

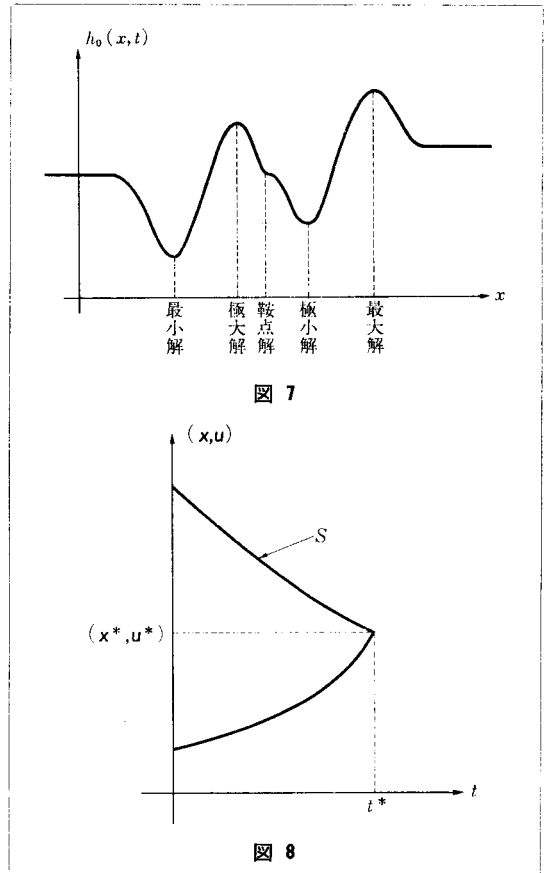


図 7

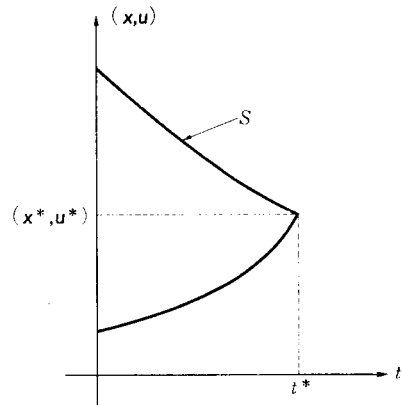


図 8

$$(3) \quad \frac{\partial e_0(x)}{\partial x_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq p)$$

を満たす。一般に、(3)を満たす  $x$  の集合には、  $P1$  の最小解の他に、極小解、極大解、最大解、鞍点解を含む(図7参照)。(3)は  $x_1, \dots, x_p$  の  $p$  個の変数と  $p$  個の実方程式よりなる方程式系である。

等号条件付非線形最小化問題

$P2$  目的:  $e_0(x) \rightarrow$  最小化

$$\text{条件: } e_j(x) = 0 \quad (1 \leq j \leq q)$$

の場合には、  $x$  が最小解であるためには  $x$  が Lagrange の平衡条件

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial e_0(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^q u_j \frac{\partial e_j(x)}{\partial x_i} = 0 & (1 \leq i \leq p) \\ e_j(x) = 0 & (1 \leq j \leq q) \end{cases}$$

を満たすことである。(4)は  $p+q$  個の変数  $x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q$  と  $p+q$  本の実方程式よりなる方程式系である。

不等号条件付非線形最小化問題

$P3$  目的:  $e_0(x) \rightarrow$  最小化

$$\text{条件: } e_j(x) \leq 0 \quad (1 \leq j \leq q)$$

に対しても, 3.1で述べたように,  $x$  が最小解であるための必要条件(Kuhn-Tuckerの平衡条件)は非線形方程式系

$$\begin{cases} \frac{\partial e_0(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^q u_j \frac{\partial e_j(x)}{\partial x_i} = 0 \\ u_j - e_j(x) = 0 \quad (1 \leq j \leq q) \end{cases} \quad (1 \leq i \leq p)$$

になる。

問題  $P1, P2, P3$  のいずれの場合にも 最小解であるための必要条件は非線形方程式系になり, そのすべての解を求めることができればそのなかから最小解を拾い出せる(最小解が存在すると仮定することは必要)。したがって, 非線形方程式系のすべての解を求める手法が開発されれば, 最小解を求める問題は解決される。以下では, “不動点アルゴリズムの原理”にもとづいた多項式方程式系のすべての解を求める手法を紹介しよう。

対象とする非線形方程式系を,

$$(5) \quad f_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

とする。ただし, 各  $f_j$  は各変数  $x_i$  の多項式になっている。このような方程式系を多項式方程式系とよぶ。  $n=2$  であれば, たとえば,

$$(6) \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 4x_1^2 x_2 - 5x_2^2 + x_1 x_2 + 9 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 6x_2^2 + x_1 + 4x_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

問題  $P1$  あるいは  $P2$  において,  $e_i$  が各変数の多項式であれば対応する(3)あるいは(4)は多項式方程式系になる(問題  $P3$  の場合にはこのことは成立しない)。  $f_j$  の各項

$$a x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$$

に対して,

$$\sum_{i=1}^n r_i$$

をその項の次数という。  $f_j$  の次数はそれらの最大値で定義される。(6)において,  $f_1$  の各項

$$4x_1^2 x_2, -5x_2^2, x_1 x_2, 9$$

は, それぞれ, 次数 3, 2, 2, 0 をもつ。したがって  $f_1$  の次数は 3 になる。

さて準備が整ったので多項式方程式系(5)のすべての解を求める手法について説明しよう。

**手順 1** : 各  $j=1, \dots, n$  と  $x=(x_1, \dots, x_n)$  に対して,

$$\alpha(j) = f_j \text{ の次数} + 1$$

$$g_j(x) = x_j^{\alpha(j)} - 1$$

とおく。

**手順 2** : 各  $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, 1]$  に対して,

$$h_j(x, t)$$

$$= (1-t)g_j(x) + f_j(x)$$

$$(1 \leq j \leq n)$$

$$h(x, t)$$

$$= (h_1(x, t), \dots, h_n(x, t))$$

とおく。

**手順 3** : 各変数  $x_i$  を複素数とする。その結果  $h$  は  $\mathbf{C}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^n$  への関数となる。ただし,  $\mathbf{C}$  は複素平面を表わす。

**手順 4** : 方程式系

$$(7) \quad h_j(x_1, \dots, x_n, t) = 0$$

$$(1 \leq j \leq n)$$

の解  $(x, t) \in \mathbf{C}^n \times [0, 1]$  の集合を  $S$  とする。  $t=0$  とおくと(7)は,

$$(8) \quad x_j^{\alpha(j)} - 1 = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

となる。  $j$  を 1 つ決めると, (複素)代数方程式  $x_j^{\alpha(j)} - 1 = 0$

は複素平面  $\mathbf{C}$  の単位円周上に相異なる既知な  $\alpha(j)$  個の解をもつ。したがって, (8)は  $\mathbf{C}^n$  上で相異なる  $\beta = \alpha(1) \times \dots \times \alpha(n)$  個の既知解をもつ。それらを,

$$u_1, \dots, u_\beta$$

とすると,

$$(u_k, 0) \in S \quad (1 \leq k \leq \beta)$$

となる。  $(u_k, 0)$  を含む  $S$  の連結成分を  $S_k$  で表わす。

**手順 5** : 非退化の条件を仮定すると, 各  $S_k$  はなめらかな曲線になる。さらに, (5)が多項式方程式であることを利用すると, 各  $S_k$  はパラメータ  $t$  に関して単調な曲線で, かつ

$$S = \bigcup_{k=1}^{\beta} S_k$$

であることが証明できる(図9参照)。  $S_k$  のうち何本かは  $t=1$  の面に到達し, 他の何本かは  $t=1$  の面に漸近しながら発散する。  $\bar{u}$  を方程式系(5)の複素解とすると, 点  $(\bar{u}, 1)$  は必ずある  $S_k$  の終点になっている。したがって, すべての  $S_k$  を追跡すれば(5)のすべての複素解を求めることができる。その中から実解を拾い出せばよい。

詳しくは[4], [8]参照。この手法は2~3年前に提案されたものであり, 実用化するにはまだ解決しなければならない問題が残っている。たとえば, “ $\beta$  が大きいとき,  $\beta$  本の曲線  $S_1, \dots, S_\beta$  をどのように区別して追跡するか”等。

#### 4. 謝 辞

本稿は1979年度OR学会秋季研究発表会で行なった特

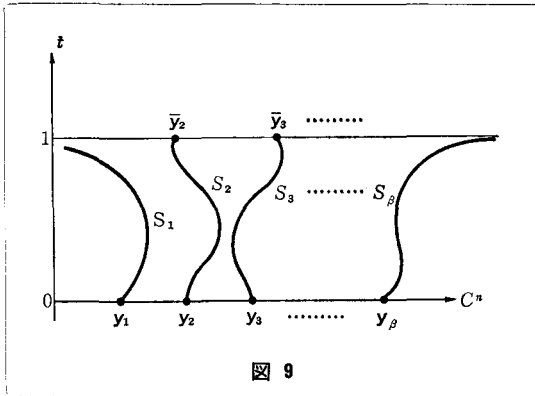


図 9

別講演をまとめたものである。特別講演に招待して下さった東京理科大学の国沢清典先生、講演の司会をして下さった筑波大学の渡辺浩先生に深く感謝いたします。また、私が慶応義塾大学から東京工業大学に移って以来、森村英典先生には大変お世話になりました。特別講演とそのきっかけとなったOR学会文献賞受賞、このような栄誉を賜わるまでに私の研究が進展しましたのも森村先生の日頃の御厚情によるものと心より感謝しております。

#### 参 考 文 献

- [1] Alexander, J. C. and J. A. York, The homotopy continuation method: Numerically implementable topological procedures, *Trans. Amer. Math. Soc.* **242**(1978), 271-284.
- [2] Brouwer, L. E., Über abbildung von mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* **71**(1912), 97-115.
- [3] Chow, S. N., J. Mallet-Paret and J. A. York, Finding zeros of maps: Homotopy methods that are constructive with probability one, *Math. Comp.* **32**(1978), 887-899.
- [4] Drexler, F. J., A Homotopy method for the calculation of all zeros of zero-dimensional polynomial ideals, in *Continuation Methods*, ed. by H. Wacker, Academic Press, New York, 1978.
- [5] Eaves, B. C., On quadratic programming, *Management Sci.* **7**(1971), 698-711.
- [6] Eaves, B. C., Homotopies for computation of fixed points, *Math. Prog.* **3**(1972), 1-22.
- [7] Eaves, B. C. and R. Saigal, Homotopies for computation of fixed points on unbounded regions, *Math. Prog.* **3**(1972), 225-237.
- [8] Garcia, C. B. and W. I. Zangwill, Determining all solutions to certain systems of nonlinear equations, *Math. of Oper. Res.* **4**(1979), 1-14.
- [9] Kojima, M., A complementary pivoting approach to parametric nonlinear programming, to appear in *Math. of Oper. Res.*
- [10] 小島政和, 不動点と相補性の理論(1), (2), (3), オペレーションズ・リサーチ **22**(1977), 174-180, 251-256, 295-301.
- [11] Merrill, O. H., Applications and extensions of an algorithm that computes fixed points of certain non-empty convex upper semi-continuous point to set mappings, Tech. Repts. 71-7, Dept. of Industrial Engineering, Univ. of Michigan, 1971.
- [12] Ravindran, A., Computational aspects of Lemke's complementary algorithm applied to linear programs, School of Industrial Engineering, Purdue Univ., Lafayette, Indiana, 1970.
- [13] Saigal, R., The fixed point approach to nonlinear programming, *Math. Prog. Study* **10**(1979), 142-157.
- [14] Scarf, H., The approximation of fixed points of a continuous mappings, *SIAM J. Applied Math.* **15**(1967), 1328-1342.

## 会員名簿ができます

先に皆様よりお送りいただいた名簿作成資料にもとづき、現在名簿発行の準備をすすめており、12月にはでき上る予定です。頒布は希望者のみとさせていただきますので、学会事務局 (03-815-3351) までお申込みください。(頒布価格 1000円)