エントロピー・モデルと ポートフォリオ問題

國澤清典・萱原秀二

1. はじめに

この小論の目的は，いわゆるポートフォリオ問題を，投資証券への資金配分比率のエントロピー最大化問題として定式化し，その計算のアルゴリズムを示すことにある．ポートフォリオモデルといえば，Markowitz の mean-variance approach が有名であるが，われわれのモデルは，伝統的モデルに比べてインプットの量と計算の手続きが大幅に簡略化できる．第2節と3節では，機会損失の最小化がエントロピー最大化の問題になることを導く．4節以下では，いわゆる有効ポートフォリオの求め方が示される．

2. ポートフォリオ問題

まず，n 個の投資可能な証券 $S_j(j=1,2,\cdots,n)$ があるとし，各証券の収益は表1のようなペイオフ・マトリックスの形で予想されているものとする．ここで，$\theta_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ は各証券の収益に影響をおよぼす将来の環境状態（ステート）を表わし，R_{ij} はステート θ_i が生起した場合の証券 S_j の収益率でつぎのように定義する．

$$R_{ij}=\frac{(P_{j,t}|\theta_i)}{p_{j,t-1}}$$

ただし，$P_{j,t}$：t 期末における S_j の価格

そこで，証券 S_j への資金の配分比率を a_j で表わすことにすると，ステート θ_i が生起したときのポートフォリオの収益率 $R(\theta_i,\boldsymbol{a})$は，

表1 ペイオフ表

		a_1 S_1	a_2 S_2	……	a_j S_j	……	a_n S_n
q_1	θ_1	R_{11}	R_{12}	……	R_{1j}	……	R_{1n}
q_2	θ_2	⋮					⋮
⋮	⋮						
q_i	θ_i				R_{ij}		
⋮	⋮	⋮					⋮
q_m	θ_m	R_{m1}	……				R_{mn}

$$R(\theta_i,\boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{n}a_jR_{ij}, \tag{1}$$

ただし，

$\sum a_j=1,\ \ a_j\geq 0$

その場合の機会損失 $l(\theta_i,\boldsymbol{a})$は，

$$l(\theta_i,\boldsymbol{a})=\max_{\boldsymbol{a}^*\in A}U[R(\theta_i,\boldsymbol{a}^*)]-U[R(\theta_i,\boldsymbol{a})] \tag{2}$$

となる．ただし，U は収益率 R の効用，$\max U[R(\theta_i,\boldsymbol{a}^*)]$ は θ_i が生起したときに得られる可能な配分案の効用の中での最大値を表わす．特定の θ_i のもとで，最大の効用が得られる資金の配分案は，特定の i のもとで R_{ij} が最大の証券$(R_{ij}{}^*)$に資金の全額を投資することであるから，この案は $a_j{}^*=1$，$a_j=0(j\neq j^*)$となっている．

そして，θ_i の生起についての主観確率が q_i であるとすると，機会損失の期待値は，

$$\sum_{i=1}^{m}q_il(\theta_i,\boldsymbol{a})=\sum q_i[U(R_{ij}{}^*)-U[R(\theta_i,\boldsymbol{a})]] \tag{3}$$

と表わされる．

ここで，われわれは最適配分比率を決めるに当

り，この期待機会損失を最小にすることにしよう．そうすると，この問題は，一定のポートフォリオの期待収益率のもとで，配分比率 a_j のエントロピーを最大にする問題として定式化できる．

3. 機会損失とエントロピー

いま，効用関数 U が log 関数であると仮定し，収益率 R_{ij} をつぎのようにかきかえると，

$$R_{ij}=1+r_{ij}$$

ポートフォリオの収益率の効用 $U[R(\theta_i,\boldsymbol{a})]$ は，

$$\log(\sum_j a_j R_{ij})=\log[\sum_j a_j(1+r_{ij})]$$
$$=\log(1+\sum_j a_j r_{ij}) \qquad (4)$$

となるが，(4)式は，これをテーラー展開し，3次以上の項をゼロと仮定することによって，

$$\log(1+\sum_j a_j r_{ij})=\sum_j a_j r_{ij}-\frac{1}{2}(\sum_j a_j r_{ij})^2 \qquad (5)$$

と表わすことができる．

ところで，期待機会損失は，

$$\sum_i q_i l(\theta_i,\boldsymbol{a})=\sum_i q_i \log R_{ij}^*$$
$$-\sum_i q_i \log(\sum a_j R_{ij})$$

であるから，これに(5)式を代入することによって，

$$\sum_i q_i l(\theta_i,\boldsymbol{a})=\sum_i q_i \log R_{ij}^*-\sum_i q_i \sum_j a_j r_{ij}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_i q_i(\sum a_j r_{ij})^2 \qquad (6)$$

が得られる．つぎに(6)式の第3項を，分散(V)の定義式を用いてつぎのように変形する．

$$\frac{1}{2}\sum_i q_i(\sum_j a_j r_{ij})^2=\frac{1}{2}[V(\sum_j a_j r_{ij})$$
$$+(\sum_j a_j \sum_i q_i r_{ij})^2$$
$$=\frac{1}{2}[V(\sum_j a_j \tilde{r}_j)$$
$$+(\sum_i a_j \tilde{r}_j)^2] \qquad (7)$$

ここで，$\tilde{r}_j$ を市場全体の収益率 $\tilde{r}_m$ の線形関数で表わすことにしよう．

$$\tilde{r}_{j,t}=\alpha_j+\beta_j\tilde{r}_{m,t}+\tilde{u}_{j,t}$$

ただし，$\tilde{u}_j$ は誤差項で，期待値 $E(\tilde{u}_{j,t})=0$，$\mathrm{cov}(\tilde{u}_{j,t},\tilde{u}_{j,t-1})=0$，$\mathrm{cov}(\tilde{r}_m,\tilde{u}_{j,t})=0$，と仮定する．

そうすると，(7)式の第1項は(8)式のようになる．

$$\frac{1}{2}V[\sum_j a_j(\alpha_j+\beta_j\tilde{r}_m+\tilde{u}_j)]$$
$$=\frac{1}{2}\sum_j a_j^2\beta_j^2 V(\tilde{r}_m)+\frac{1}{2}\sum_j a_j^2 V(\tilde{u}_j) \qquad (8)$$

(8)式の第2項はゼロと仮定しても無理はない．なぜなら，かりに $a_j=1/n$，とすると，

$$\sum a_j^2 V(\tilde{u}_j)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum V(\tilde{u}_j)\right)=\frac{1}{n}\bar{V}(\tilde{u}_j)$$

となることからわかるように，n を十分に大きくとればゼロに収斂するからである．

さらに(8)式の第1項であるが，これは，$\sum a_j \log a_j \beta_j^2 V(\tilde{r}_m)$，を2次以上の項がゼロに近くなるような適当な定数 C の近傍でテーラー展開すると，

$$\frac{1}{2}\sum_j a_j \log a_j\beta_j^2 V(\tilde{r}_m)\fallingdotseq\frac{1}{2}\sum_j a_j\log C$$
$$+\frac{1}{2C}\sum_j a_j(a_j\beta_j^2 V(\tilde{r}_m)-C)$$

となるから，$\frac{1}{2}\sum a_j^2\beta_j^2 V(\tilde{r}_m)$ の項を左辺に移行することによって，(9)式のように表わすことができる．

$$\frac{1}{2}\sum a_j^2\beta_j^2 V(\tilde{r}_m)=\frac{C}{2}[\sum a_j\log a_j$$
$$+\sum a_j \log\beta_j^2 V(\tilde{r}_m)-\log C+1] \qquad (9)$$

かくして，(6)，(7)，(8)，(9)から，期待機会損失は，(10)式のようになる．

$$\sum_i q_i l(\theta_i,\boldsymbol{a})\fallingdotseq\sum_i q_i\log R_{ij}^*$$
$$-\sum_j a_j\bar{r}_j+\frac{1}{2}(\sum_j a_j\bar{r}_j)^2+\frac{C}{2}[\sum_j a_j\log a_j$$
$$+\sum_j a_j\log\beta_j^2 V(\tilde{r}_m)-\log C+1] \qquad (10)$$

(10)式に含まれている $\beta_j^2 V(\tilde{r}_m)$ は，$\tilde{r}_j$ の分散のうち，市場全体の変動を反映する部分を表わしているが，資本市場理論によると，各証券の期待収益率は，この市場全体の動きを反映するリスク部分だけの増加関数になることが知られている．そこでわれわれのペイオフ表も，S を比例係数として，

$$\beta_j^2 V(\tilde{r}_m)=S(\sum_i q_i(1+\tilde{r}_{ij}))=S(1+\bar{r}_j)$$

となるように予想されているとする．そうすると

$$\sum_j a_j \log \beta_j{}^2 V(\tilde{r}_m) = \log S + \sum_j a_j \log(1+\tilde{r}_j)$$
$$\fallingdotseq \log S + \sum_j a_j \tilde{r}_j \qquad (11)$$

となるから，これを(10)式に代入して，整理すれば，最終的に，

$$\sum_i q_i l(\theta_i, \boldsymbol{a}) = \frac{C}{2}\sum_j a_j \log a_j - \left(1-\frac{C}{2}\right)E + \frac{1}{2}E^2 + B \qquad (12)$$

ただし，$E=\sum a_j \tilde{r}_j$

$$B=\sum q_i \log R_{ij}{}^* + \frac{C}{2}(\log S - \log C + 1) = \text{constant}$$

が得られる．

ここで，$\sum a_j \log a_j$ は，a_j のエントロピーの定義式に (-1) をかけたものであることに注意しよう．

さらに，(12)式は discrimination $(D(a))$ の概念を用いてつぎのようにも表わすことができる．

$$\sum_i q_i l(\theta_i, \boldsymbol{a}) = \frac{C}{2}D(a) - \left(1-\frac{C}{2}\right)E + \frac{1}{2}E^2 + B' \qquad (13)$$

ただし，$D(\mathrm{a}) = \log n + \sum a_j \log a_j$

$$B' = \sum q_i \log R_{ij}{}^* + \frac{C}{2}(\log S - \log C - \log n + 1) = \text{constant}$$

4. 投資機会の有効フロンティア

図1の点線は，横軸にポートフォリオの期待収益率(E)，縦軸に discrimination$(D(a))$ をとって，(13)式の曲線を描いたものである．1つの点線は，機会損失が等しいさまざまな E と $D(a)$ の組合せを示している．したがって，点線の位置は機会損失の大きさを表わすが，点線の位置が低くなるほど，機会損失は小さくなる．

かくして，制約条件，

$\sum a_j \tilde{r}_j = E^*$

$a_j \geq 0$, $\sum a_j = 1$

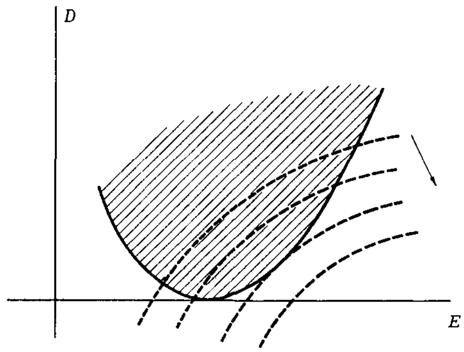

図 1　等機会損失曲線と投資機会曲線

のもとで，$D(a)$を最小にする資金配分比率 a_j を求めれば，そのポートフォリオは機会損失が最小になっているという意味で，最適ポートフォリオであるといえる．

ところで，discrimination は，一般に，

$$D(a,b) = \sum_j a_j \log \frac{a_j}{b_j}$$

$(\sum b_j = 1,\ \sum a_j = 1,\ a_j \geq 0,\ b_j > 0)$

と定義されるが，いま，ポートフォリオの期待収益率 $E=\sum a_j \tilde{r}_j$ における $\tilde{r}_j$ と b_j を与件とすると，われわれは a_j をさまざまに変えることによって，図1の斜線部分のように E と D の無数の組合せを作ることができる．

しかし，Eを変化させながら，そのもとでDを最小ならしめる a_j のベクトル $[\boldsymbol{a}]$ を求めてゆくと，D はつぎのような式で表わされ，

$$\min D(a,b) = \lambda E_0 - \log \sum b_j e^{\lambda \tilde{r}_j}$$

図1の実線のような下に凸の曲線を描く．図1の境界線において，有効な部分は E_0 の右側だけであることは図から容易に理解できよう．

E_0 から右側の境界線上のポートフォリオは，いずれも最適ポートフォリオであるが，これらのポートフォリオにおいては，期待収益率を大きくすれば，それだけ discrimination も大きくなることがわかる．

ここで，ちょっと，ポートフォリオセレクションにおける discrimination の意味についてふれておく．

いま，投資可能なn個の証券があるとし，これらの証券に関して何の情報ももち合せていないとしよう．つまり，われわれは完全に盲目的なわけであるから，各証券への資金配分比率は，すべて均等に$1/n$にせざるをえない．この場合，配分比率のエントロピーは最大となり，その値は$\log n$となっている．

つぎに，情報を入手することによって収益率の予想をたて，資金配分比率をa_jにしたとする．この場合のエントロピーはいうまでもなく，$(-)\sum a_j \log a_j$である．そこで，2つのエントロピーの差をとると，その差$[\log n-(-\sum a_j \log a_j)]$は，“あいまいさ”を減少させるために取り入れた情報の量ということができる．

2つのエントロピーの差は，

$$\begin{aligned}
&\log n+\sum a_j \log a_j \\
&=\sum a_j \log n-\sum a_j \log \frac{1}{a_j} \\
&=\sum a_j\left(\log a_j-\log \frac{1}{n}\right) \\
&=\sum a_j\left(\log a_j / \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

となるが，これは discrimination にほかならない．情報にもとづく判断，予想に大きく依存して特定の証券への資金配分比率を高めれば高めるほど，すなわち discrimination を大きくすればするほど，それだけポートフォリオのリスクが高まることは改めて説明するまでもないであろう．かくして，discrimination はポートフォリオのリスクの大きさを表わす指標であるということができる．

5. ポートフォリオモデルのアルゴリズム

E-D 基準のポートフォリオモデルは，

制約条件：$E=\sum a_j \bar{r}_j$

$a_j \geq 0,\ \sum a_j=1$

目的関数：$D=\sum a_j \log \dfrac{a_j}{b_j} \longrightarrow \min$

と定式化することができる．

しかし，この形をとる場合，問題になるのは，投資する銘柄数とb_jをアプリオリに決めなければならないことである．

そこで，ここでは，$\bar{r}_j$だけをインプット要件とする方法を示すことにしよう．

制約条件：$\sum a_j=1 \quad a_j>0$

目的関数：$f(a)=\dfrac{-H(a)}{E(a)} \longrightarrow \min$

ただし，$E(a)=\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{r}_j$

$$-H(a)=\sum_{j=1}^{n} a_j \log a_j$$

まず，$f(a)$をa_jで微分する．

$$\nabla f(a_j)=\frac{(\log a_j+1) E(a)+\bar{r}_j H(a)}{E^2(a)}$$

Kuhn-Tuker の定理，$\nabla f(a_j)+\sum \lambda_j=0$，を用いて，

$$\frac{(\log a_j+1)}{E(a)}+\frac{\bar{r}_j H(a)}{E^2(a)}+\lambda_j=0$$

$$\log a_j=\frac{-\bar{r}_j H(a)}{E(a)}-\lambda_j E(a)-1$$

故に，

$$a_j=\exp \left\{\frac{-\bar{r}_j H(a)}{E(a)}-\lambda_j E(a)-1\right\}.$$

さらに，Kuhn-Tuker の定理，$\sum \lambda_j a_j=0$，より，$a_j>0$のとき，$\lambda_j=0$，であるから，

$$a_j=\exp \left\{\frac{-\bar{r}_j H(a)}{E(a)}-1\right\}. \tag{14}$$

ここで，

$$\frac{-H(a)}{E(a)}=M(n)$$

とおくと，任意の銘柄数nのもとで$M(n)$が最小のとき(これを$M^*(n)$とかくことにする)a_jは最適値となっている．

ところで，(14)式より，a_jの最適値は，

$$a_j=\exp \{\bar{r}_j M^*(n)-1\} \tag{15}$$

であるから，これを変形すれば，

$$\frac{1}{M^*(n)}(\log a_j)=\bar{r}_j-\frac{1}{M^*(n)}. \tag{16}$$

(16)式において，$\log a_j<0$，$M^*(n)<0$，であるから，

$$\bar{r}_j-\frac{1}{M^*(n)}>0 \tag{17}$$

でなければならない．このことは，(17)式の条件を満足しなくなるとき，$M^*(n)$が最小になることを意味している．

かくして，この最小化問題を解くにあたっては，収益率 $\bar{r}_j$ の大きい証券から，逐次 n を増やしながら，1つの証券を追加するごとに，$M^*(s)$を計算し，(17)式の条件を満足しなくなるまで，同じ手続きを繰り返せばよいことになる．そして，最終的に，$-H(a)/E(a)$の最小値，すなわち $M^*(n)$ が決まった段階では，投資証券の数 n と配分比率 a_j の最適値が同時に決まっている．その時の最適配分比率 a_j^* は，(15)式から，

$$a_j^*=\exp\{\bar{r}_j M^*(n)-1\}$$

であることはいうまでもない．

参考文献

[1] H. Markowitz, "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 1952.

[2] E. Elton, G. Gruber and M. Padberg, "Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 1976.

[3] 国沢清典，「エントロピーモデル」，日科技連．

[4] K. Borch, "The Economics of Uncertainty"

[5] H. Theil, "Economics and Information Theory"

[6] 萱原，八柳，「情報理論とポートフォリオセレクション」，証券アナリストジャーナル，1972年1月

[7] W. Sharpe, "A Simplified Model for Portfolio Analysis", *Management Science*, 1963.

[8] 萱原，「ポートフォリオ選択におけるエントロピー基準と機関投資家行動」，証券経済学会年報，昭和54年

（くにさわ・きよのり　東京理科大学，かやはら・ひでじ　野村證券投資信託委託）