エントロピー, 情報と決定

坂口　実

(1) Entropy, (2a) Selective Information, (2b) Strategic Information, (3) Decision を考える. (2a)と(2b)とは等しく情報といっても, 前者は事象系に内包する不確実性に関連したものでentropyの減小量で, その大きさ(amount)が計量される. 後者は決定問題において戦略を構成する基盤となるもので, それがあるときとないときとの最適利得の差でその価値(value)が計量される. (1)と(2a)とはほとんど同義語である. (2b)と(3)とは密接な関係がある. ある decision rule が最適だというのは, ある特定された情報構造に関してである, ということは今では常識的になっている(たとえば Kriebel [1], Marschak-Radner [2] など). ところが(1)と(3)とは "irrelevant" であるという(White [3] による). それは(2a)と(2b)との間の関係が薄いからである. 薄いとは言っても全然無関係ではなくて, 近年多くの研究がその間の事情の解明に貢献した. この小文の目的はそれの概観を与えることにある.

1. 情報は多いほど得であるか?

"More information leads to better payoffs". これは一般に1人 game, すなわち decision-making under uncertainty(略して DMUU)において通用する格言である. まずこれを簡単な例題により検証しよう. 2-state 2-action DMUU の一般形は, 効用行列 $[u(a,\theta)]$ が,

$$(1.1)\quad \text{Action}\left\{\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\theta_1 \quad\quad \theta_2}^{\text{state}}} \\ a_1 & u_1+r_1 & u_2 \\ a_2 & u_1 & u_2+r_2 \end{array}\right.,\quad \text{ただし}\ r_1, r_2>0$$

のときである. r_i は状態 θ_i が真のときに誤決定をするときの regret を表わす. 未知の θ について通信行列

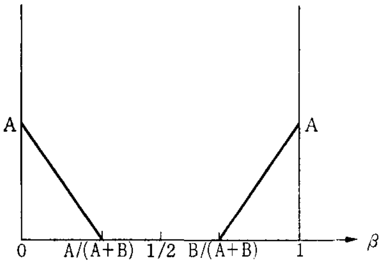
$$(1.2)\quad \text{State}\left\{\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{y_1 \quad y_2}^{\text{Message}}} \\ \theta_1 & \beta & \bar{\beta} \\ \theta_2 & \bar{\beta} & \beta \end{array}\right.,\quad \text{ただし}\ 0<\beta=1-\bar{\beta}<1$$

をもって decision-maker(略して DM)に信号を送る agent がいるとする. 信号 y_i は "未知の θ は本当は θ_i である" と知らせるものと考えると, この agent は確率 β で本当を伝え, 残りの確率でうそをいうことになる. 未知の θ に関して DM がもっている事前知識を $\boldsymbol{\pi}=\langle\pi_1, \pi_2\rangle$ とすると, たとえば message $Y=y_1$ を受けたのち DM は, 事前知識 π を事後知識 $\boldsymbol{\pi}^{y_1}=(\pi_1\beta+\pi_2\bar{\beta})^{-1}(\pi_1\beta, \pi_2\bar{\beta})$ に改訂するから, 情報価値(expected value of sample information)

$$(1.3)\quad \text{EVSI}\equiv\text{EUSI}-\text{EUAB}$$
$$=E\,[\max_a u(a,\boldsymbol{\pi}^Y)\,|\,\boldsymbol{\pi}]-\max_a u(a,\boldsymbol{\pi})$$

ただし, $u(a,\boldsymbol{\pi})\equiv\sum_i \pi_i u(a,\theta_i)$, EUAB は expected utility of a priori best の略記, を計算して, β の関数として図示すると図1.1のようになる(Marschak [4]).

さて, 一方, 通信 channel (1.2) は BSC だか



（ただし A＝$\pi_1 r_1$，B＝$\pi_2 r_2$とおき A＜B のとき）

図 1.1

ら，通信容量

$$C(\beta)\equiv\max_{0\leq\zeta\leq 1}\ [\zeta I(\beta;\zeta\beta+\bar{\zeta}\bar{\beta})+\bar{\zeta}I(\bar{\beta};\zeta\beta+\bar{\zeta}\bar{\beta})]$$

$=I(\beta;1/2)$，ただし $I(a;b)\equiv a\log(a/b)+\bar{a}\log(\bar{a}/\bar{b})$

をもつ．ゆえに［**定理**］(1.1)-(1.2)で与えられる DMUU においては $|\beta-1/2|$ が大きいほど，すなわち通信容量 $C(\beta)$ が大きいほど EVSI が大きい：$\mathrm{EVSI}(\beta')\leqq\mathrm{EVSI}(\beta'')\Leftrightarrow C(\beta')\leqq C(\beta'')$.

前記の格言は2人 game になったら成立しない．Ho-Blau [5] は“情報が多いほど，両人にとって悪い”という2人非0和 gameの例を示している．Sakaguchi [6] は“情報が多いほど，一方にとってはよく，相手にとっては悪い”という2人0和 game の class を示した．いま k 個の $m\times n$ 行列

$$\boldsymbol{A}(\omega)=[a_{ij}(\omega)\,|\,1\leqq i\leqq m,1\leqq j\leqq n],\quad \omega=1,\cdots,k$$

が与えられているとき，つぎの game を考える．

Step 0. “nature” が state ω を確率分布 $\langle g_\omega|\omega=1,\cdots,k\rangle$ により選択する．Agent O がいて，nature の選択した ω を知ったのち，確率分布 $\langle h_\omega(\theta,\tau)\,|\,1\leqq\theta\leqq r,1\leqq\tau\leqq s\rangle$ により (θ,τ) を選択して，$\theta(\tau)$を player I (II) に知らせる．

Step 1_{I}. I は θ を知らされたのち，$i\in\{1,\cdots,m\}$ を選ぶ．

Step 1_{II}. IIは τ を知らされたのち，$j\in\{1,\cdots,n\}$ を選ぶ．

Step 2. IIは $a_{ij}(\omega)$を I へ支払う．

I とIIの行動戦略をそれぞれ，

$$\vec{X}=[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r],\ 各\ \boldsymbol{x}_\theta=\langle x_{\theta 1},\cdots,x_{\theta m}\rangle^T,$$
$$\vec{Y}=[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s],\ 各\ \boldsymbol{y}_\tau=\langle y_{\tau 1},\cdots,y_{\tau n}\rangle^T$$

とする（たとえば $\boldsymbol{x}_\theta$ の意味は：I は θ を知らされたならば，確率分布 $\boldsymbol{x}_\theta$ によりどれかの i を選ぶ）．そうすると I の期待利得は，

$$(1.4)\quad M(\vec{X},\vec{Y})\equiv\sum_\tau\sum_\theta p(\theta,\tau)\boldsymbol{x}_\theta^T\boldsymbol{B}(\theta,\tau)\boldsymbol{y}_\tau$$

ただし，$p(\theta,\tau)\equiv\sum_\omega g_\omega h_\omega(\theta,\tau)$，$\boldsymbol{B}(\theta,\tau)\equiv\sum_\omega g_\omega h_\omega(\theta,\tau)\,\boldsymbol{A}(w)/p(\theta,\tau)$ である．いま Oが“独立通信構造”をもつ：$h_\omega(\theta,\tau)=p_{\omega\theta}\cdot q_{\omega\tau}$，ただし $P\equiv[p_{\omega\theta}]$, $Q\equiv[q_{\omega\tau}]$ はそれぞれ $k\times r$，$k\times s$ Markov 行列と仮定する．そうすると，

［**定理**］この game の値を $V(\mathscr{A},P,Q)$ とすると，

$P\supset P'\Rightarrow$ 任意の Q に対して，

$$V(\mathscr{A},P,Q)\geqq V(\mathscr{A},P',Q)$$

$Q\supset Q'\Rightarrow$ 任意の P に対して，

$$V(\mathscr{A},P,Q)\leqq V(\mathscr{A},P,Q')$$

が成立する．ここで P$\supset P'$ とは，P,P' がそれぞれ $k\times r_1,k\times r_2$ Markov 行列のとき $r_1\times r_2$ Markov 行列 S が存在して $PS=P'$ となることをいう．この定義はまた，

$$\sum_{i,j}p_{ij}\log(p_{ij}/\sum_i p_{ij})\geqq\sum_{i,j}p'_{ij}\log(p'_{ij}/\sum_i p'_{ij})$$

（すなわち uniform input のとき P が P' より以上の相互情報量を与える）と同等である．また通信行列(1.2)に対しては$\frac{1}{2}<\beta<\beta'<1\Rightarrow P\subset P'$ である．上の定理は“相手への情報が不変ならば，自分への情報がよいほど自分に得になる”ことを述べている．情報が共通だったら一概にそうは言えないことを Hi-and-Lo の例題：

$$\boldsymbol{A}(1)=\begin{array}{c c}& \begin{array}{cc}\text{fold} & \text{bet}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{fold}\\ \text{bet}\end{array} & \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1+a\end{bmatrix}\end{array},\quad \boldsymbol{A}(2)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -(1+a)\end{bmatrix},$$

$$P=Q=\begin{bmatrix}\beta & \bar{\beta}\\ \bar{\beta} & \beta\end{bmatrix},\qquad ただし\ a>0,\ 1/2\leqq\beta\leqq 1$$

により示すことができる(Sakaguchi [6]).

2. 情報の量と価値

前節の第1例題は，ある広い class の DMUU

では情報の量(amount)と価値(value)とは "go together" なことを示しているが，極端な場合には情報の量と価値とが一致することさえある．その一例をあげよう(Arrow[12], Antoniak[13])．完全事象系$\begin{pmatrix}E_1, \cdots, E_m \\ p_1, \cdots, p_m\end{pmatrix}$がある．資金$\$x$をもっている gambler が各事象$E_i$の起ることに金額$b_i$ずつを賭ける．all $b_i \geqq 0$, $\sum_i b_i = x$とする．実際にE_iが起ったときには$k_i b_i$が利得として与えられる．k_iは事象E_iの "odd" である．普通は all $k_i > 1$, $\sum_i k_i^{-1} \leqq 1$になっている．もしもこの gambler が対数効用をもっているならば：［**定理**］完全情報の価値(EVPI)は$H(\boldsymbol{p}) \equiv -\sum_i p_i \log p_i$に等しい．もしも通信系$P \equiv [p_{ij} | 1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n]$により情報を受けることができるならば，EVSI は相互情報量$R \equiv \sum_{i,j} p_i p_{ij} \log(p_{ij} / \sum_i p_i p_{ij})$に等しい．［**定理**］前記の$R>0$とする．通信系$P$の情報を買うときは料金$c>0$を前払いしなければならないとする．そうするとある$x_1(\boldsymbol{p}, P) > c$が存在して，$\left\{\begin{matrix} 0 \leqq x \leqq x_1 \\ x > x_1 \end{matrix}\right\}$ならば情報を買うことが$\left\{\begin{matrix}\text{払う料金に引き合わない} \\ \text{と　く}\end{matrix}\right\}$．この$x_1$は$x_1 = c/(1-e^{-R})$に等しい．また通信系$P$により，はじめに message j_1，つぎに$j_2, \cdots$というふうに繰返し情報が得られ，それを利用して初期資金$\$x$を多段最適配分により増殖してゆくとする．$N$段過程の最適方程式は，

$$V_N(x, \boldsymbol{p}) = \sum_j q_j \max_{b \in B_x} \sum_i P(i|j) V_{N-1}(k_i b_i, \boldsymbol{p}^j)$$
$$(N=1, 2, \cdots;\ V_0(x, \boldsymbol{p}) \equiv \log x)$$

(ただし$q_j \equiv \sum_i p_i p_{ij}$, $P(i|j) \equiv p_i p_{ij}/q_j$, $\boldsymbol{p}^j \equiv \langle P(i|j) | i=1, \cdots, m \rangle$, $B_x \equiv \{\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_m) | \sum_i b_i = x$, all $b_i \geqq 0\}$)である．この場合，標本情報$(j_1, \cdots, j_N)$の価値は多変量相互情報量の和$\sum_{k=1}^{N} T(i; j_1, \cdots, j_k)$に等しいことが示される(Sakaguchi [14])．

3. Entropy と Decision とは irrelevant である

前2節にもかかわらず，最適決定そのものは，エントロピーあるいは(選択的)情報論的観点から巧く説明できないことが多い．標記は White [3] によるが同じ意味のことはもっと早く Danskin の論文 [7] "Reconnaissance" に出ている．そこではx＝識別水準，たとえば偵察機の飛行高度；p_i＝第i種の目標の存在確率；$p_{ij}(x)$＝識別水準がxのときに第i種の目標が第j型の偵察写真を生ずる確率；として識別水準xの偵察によって得られる情報量を，

$$(3.1)\quad I(x) \equiv \sum_{i,j} p_i p_{ij}(x) \log\{p_{ij}(x) / \sum_i p_i p_{ij}(x)\} \to \max_x$$

という方向の配分問題をやっている．いま$q_j(x) \equiv \sum_i p_i p_{ij}(x)$, $P(i|j, x) \equiv p_i p_{ij}(x)/q_j(x)$とおくと(3.1)は，事後エントロピー

$$(3.2)\quad \mathrm{PE}(x) \equiv \sum_j q_j(x) \sum_i P(i|j, x)\{-\log P(i|j, x)\} \to \min_x$$

の問題と同じである．

一方，Danskin のモデルと離れて，一般にp_i＝state がiである事前確率；$p_{ij}(x)$＝水準xのもとで state がiであったときに結果jを得る確率として，さらに$u(a, i)$＝state iのときに action aをとったときの効用を導入すると，事後効用，

$$(3.3)\quad \mathrm{PU}(x) \equiv \sum_j q_j(x) \max_a \sum_i P(i|j, x)\, u(a, i) \to \max_x$$

という問題が考えられる．多くの場合 (3.2) と (3.3) とは異なる解をもつのである．

それを Pollock の探索問題 [8] によって説明しよう．m個の箱があって，そのどれか1つに ball がはいっている．どれかの箱を選んで1回だけ探してみることができる．箱iに実際に ball が存在したときに，そこを探しても見逃してしまうという条件つき確率をα_i, $0 \leqq \alpha_i < 1$，とする．1回の探索の，のちの行動がどうであるかによってつぎの3通りの問題を考える．

(a) Information Search: 行動をしない．ただ ball がどの箱にあるか，に関して得られた情報量に比例する報酬をもらう．(b) Detection

Search: 行動をしない．ただ ball を detect できれば1，できなければ0の報酬をもらう．(c) Whereabont Search：探索をやったのちに（もしもそれが失敗ならば）ballはどの箱にあり，とguess する．当れば1，外れれば0をもらう．

$\boldsymbol{p}=\langle p_1,\cdots,p_m\rangle$ に対して $T_i\boldsymbol{p}\equiv(p_i\alpha_i+\bar{p}_i)^{-1}(p_1,\cdots,p_i\alpha_i,\cdots,p_m)$ とおく．箱 i を探して発見できなかったときは，$\boldsymbol{p}$ は事後知識 $T_i\boldsymbol{p}$ に改訂される．上記3問題の解はつぎのようになる：(a)では $\Delta_i(\boldsymbol{p})\equiv H(\boldsymbol{p})-(p_i\alpha_i+\bar{p}_i)H(T_i\boldsymbol{p})$ を最大にする箱 i を探す．(b) では $p_i\bar{\alpha}_i$ を最大にする箱 i を探す．(c) では $\mathrm{PU}_i(\boldsymbol{p})\equiv p_i\bar{\alpha}_i+(p_i\alpha_i+\bar{p}_i)\max\limits_{k=1,2,3}(T_i\boldsymbol{p})_k$ を最大にする箱 i を探し，もし発見できなければ $(T_i\boldsymbol{p})_k\to\max\limits_k$ にする箱を guess する．

［注］ state i は ball が箱 i にあること；結果 $j=1,0$ はそれぞれ ball を発見，発見できず；水準 $x(=1,\cdots,m)$ は箱 x を探すという行動；さらに $p_{ij}(x)$ は，

	$x=1$		$x=2$		$x=3$	
	$j=1$	$j=0$	$j=1$	$j=0$	$j=1$	$j=0$
$i=1$	$\bar{\alpha}_1$	α_1	0	1	0	1
2	0	1	$\bar{\alpha}_2$	α_2	0	1
3	0	1	0	1	$\bar{\alpha}_3$	α_3

になっている($m=3$ とした)．問題(a)は(3.2)であり，(b)と(c)とはそれぞれ $u(a,i)$ を適当に定義すれば(3.3)に一致することを確かめよ．

数値例として $m=3$，$\boldsymbol{p}=\langle 0.1,\ 0.3,\ 0.6\rangle$，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,\ 0.6,\ 0.7)$ のとき，

Criterion		$i=1$	$i=2$	$i=3$
(a) Information Search	$\Delta_i(\boldsymbol{p})=$	$\underline{0.14}$	0.07	0.04
(b) Detection Search	$p_i\bar{\alpha}_i=$	0.10	0.12	$\underline{0.18}$
(c) Whereabout Search	$PU_i(\boldsymbol{p})=$	0.70	$\underline{0.72}$	0.60

となって，最適解は(a)，(b)，(c)のもとでそれぞれ箱1，3，2を探すことである．なお(a)の多段 search への拡張(Sakaguchi [9])，連続時刻多段 search における(a)と(b)との関係（Sakaguchi [10]，Barker [11]）などについての研究がある．

4. 統計的推測とエントロピー最大原理

物理学で初めて entropy の概念が導入されたのは，不確実性の介在する世界において無秩序性あるいは不確実性の程度を測る尺度としてであった．そこではたとえば初期の統計熱力学でのように，すべての確率的系はそれが要求される制約のもとで，entropy が最大になったところで平衡に達すると考えられた．近年 Jaynes(1957)[15]は，完全でない部分的な情報にもとづいて，われわれの社会の問題(必ずしも物理的世界に限定しない)を解こうというときには，系の entropy を最大にするような確率分布を利用すべきであり，われわれのもつ情報を bias なく利用するにはそれしかないと考えた．DMUU において“nature”の選択につき事前知識を特定することが不可能または不適当な場合に，entropy 最大原理（略して MEP)を用いて最適決定を求めることがよくある(たとえば Tribus-Fitts [16]，Wilson [17]，Sakaguchi [18] など)が，これは上記の Jaynes の考えにもとづいている．以下には決定問題ではないけれども，大衆の購買行動における銘柄選択と，大衆の移動における旅行分布についての Herniter [19] および Wilson [17] の entropy model を説明しよう．

よく売れて低価格の商品たとえば，たばこ，ウイスキーなどはいくつかのブランド(Br.)のものから大衆は選択して購買する．最も簡単な場合として2銘柄市場を考える．この商品の顧客全体は3つの層 C_1,C_2,C_3 に分かれ，層 C_i，$i=1,2$ は Br. i の固定層，層 C_3 は2つの銘柄の間の選択層である．C_3 に属する顧客は，各人が自分に固有の Br. 1 の選択確率 α，$0<\alpha<1$ をもち，同一人の相異なる2つの購買時点においては独立にかつ同じ値 α をもって銘柄が選択される．いま顧客全体の中から無作意に1人の顧客を抽出したとき，それが層 C_i $(i=1,2,3)$ に属する確率を p_i とする．もしも彼が C_3 に属したとき彼に固有の選択確率 α は

表 4.1　2銘柄市場の構造

層	確率	銘柄	pdf	選択確率	
				Br. 1	Br. 2
C_1	p_1	Br. 1			
C_2	p_2	Br. 2			
C_3	p_3	Br. 1, Br. 2	$f(\alpha)$	α	$1-\alpha$

pdf $f(\alpha)$ をもつ r. v. であると考える(表4.1参照). そうすると，今この商品に対する1つの購買が起ったとき，そこにはつぎのように三重の不確実性が介在する．①購買者はどの層に属するか? ②もしも C_3 に属するならば，どの数値 α をもっているか? ③数値 α をもっているとしたとき，銘柄1と2のどちらを買ったか? 故にこの確率系の全 entropy は，

$$(4.1)\quad S_{\text{II}}[\boldsymbol{p}, f(\cdot)] \equiv H(\boldsymbol{p}) + p_3\int_0^1 f(\alpha)\ (-\log f(\alpha)+G(\alpha))d\alpha$$

となる．ここで $G(\alpha)\equiv -\alpha\log\alpha-(1-\alpha)\log(1-\alpha)$ である．われわれの所有する唯一のデータが各銘柄の市場占有率(market share) m_1, m_2 (ただし $0<m_1=1-m_2<1$) であるとする．そうするとこの市場の構造から制約 $p_1+p_3\int_0^1\alpha f(\alpha)d\alpha=m_1$ が存在しなければならない．そして前述の MEP により最大問題：

$$(4.2)\quad S_{\text{II}}[\boldsymbol{p}, f(\cdot)]\to\max.$$

制約：(a) $p_1+p_2+p_3=1$, all $p_i\geqq 0$

(b) $\int_0^1 f(\alpha)d\alpha=1$, $f(\alpha)\geqq 0$, $0\leqq\alpha\leqq 1$

(c) $p_1+p_3\int_0^1\alpha f(\alpha)d\alpha=m_1$

に当面することになる．

［**定理**］ 問題(4.2)の最適解は $f^*(\alpha)=(1/p_3^*)(\alpha/p_1^*)^{-\alpha}\cdot[(1-\alpha)/p_2^*]^{-(1-\alpha)}$ (ただし p_i^*, $i=1,2,3$, は $(\boldsymbol{p}^*, f^*(\cdot))$ が (4.2a)～(4.2c) を満足するように選定されている) で与えられる．さらに $S_{\text{II}}[\boldsymbol{p}^*, f^*(\cdot)]=(-\log p_1^*)m_1+(-\log p_2^*)m_2$.

平衡状態において，同一人による相続く2つの購買における repeat および switch の割合が推定できる．たとえば $p(1|2)\equiv Pr$ {つぎに Br. 1が買われる | まず Br. 2 が買われる} $=p_3^*\int_0^1(1-\alpha)\alpha f^*(\alpha)d\alpha/m_2$ である．こうしてこの銘柄選択過程における推移行列

$$P=\begin{array}{c|cc} & \text{Br. 1} & \text{Br. 2}\\ \hline \text{Br. 1} & (p_1+p_3\langle\alpha^2\rangle)/m_1 & p_3\langle\alpha(1-\alpha)\rangle/m_1\\ \text{Br. 2} & p_3\langle\alpha(1-\alpha)\rangle/m_2 & (p_2+p_3\langle(1-\alpha)^2\rangle)/m_2\end{array}$$

が得られる (ここでたとえば $\langle\alpha^2\rangle$ は $\int_0^1\alpha^2 f^*(\alpha)d\alpha$ のこと．＊記号は省略した)．これは $\langle m_1, m_2\rangle$ を定常確率 vector にもつ：$(m_1, m_2)P=(m_1, m_2)$. また $m_1p(2|1)=m_2p(1|2)$ が成立している．表4.2は Herniter [19] による数値である．この entropy model は $m(\geqq 3)$ 銘柄市場への拡張も容易で，また銘柄間の価格差の影響をも考慮した発展や，銘柄—ストア model への拡張も Sakaguchi [20], [21] によりなされている．

さて MEP の第2の例として trip distribution の entropy model を Evans [32] により説明する．起点 $i(i=1,\cdots,m)$ から目的地 $j(j=1,\cdots,n)$ への $\left\{\begin{matrix}\text{旅行の数}\\\text{単位コスト}\end{matrix}\right\}$ を $\left\{\begin{matrix}t_{ij}\\c_{ij}\end{matrix}\right\}$ で表わす．全部で $w\equiv\sum_{i,j}t_{ij}$ 個の trip が, mn 通りのどの(i,j)pair においてもすべて等確率で起こるとすれば, trip matrix $\boldsymbol{t}=[t_{ij}|1\leqq i\leqq m, 1\leqq j\leqq n]$ が実現する確率は $(w!/\prod_{i,j}t_{ij}!)w^{-w}$ である．対数をとってから Stirling の公式 $n!\cong\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+1/2}e^{-n}$, *i. e.*, $\log n!\cong n\log n-n$ を使うと，これは $-\sum_{i,j}t_{ij}\log t_{ij}$ になる．$\alpha>0$ を助変数として最小問題：

表 4.2　2銘柄市場の最適解

市場占有率		層確率			エントロピー	推移確率		
m_1	m_2	p_1	p_2	p_3	S_{II}		$p(1\|l)$	$p(2\|l)$
.1	.9	.019	.689	.292	.73	$l=1$	.550	.450
						$l=2$	.050	.950
.2	.8	.066	.558	.376	1.01		.682	.318
							.080	.920
.3	.7	.126	.451	.423	1.18		.752	.248
							.106	.893
.4	.6	.195	.357	.448	1.27		.800	.200
							.133	.867
.5	.5	.272	.272	.456	1.30		.836	.164
							.164	.836

$$(4.3)\quad F(\boldsymbol{t})\equiv\sum_{i,j}t_{ij}\log t_{ij}+\alpha\sum_{i,j}c_{ij}t_{ij}\to\min_{t}$$

$$\text{制約：(a)}\quad \sum_{j}t_{ij}=s_i,\quad i=1,\cdots,m$$

$$\text{(b)}\quad \sum_{i}t_{ij}=d_j,\quad j=1,\cdots,n$$

$$\text{(c)}\quad t_{ij}\geqq 0,\quad \forall i,j$$

が考えられる．s_i は起点 i における "supply"，d_j は目的地 j における "demand" であり $\sum_i s_i=\sum_j d_j$ が仮定されている．$w\equiv\sum_{i,j}t_{ij}$ は所与だから $\sum_{i,j}t_{ij}\log t_{ij}\to\min$ は entropy 最大化と同じ．そこで $\alpha=0$ のときの (4.3) の解は $t_{ij}^{*}=s_i d_j/w$, $\forall i,j$, になる．α の値が増大するにつれて total trip cost $\sum_{i,j}c_{ij}t_{ij}$ が最小化の主要部分になってきて，(4.3)の解は $\alpha\to+\infty$ のとき最適輸送 (optimal transportation) に近づくだろう．さて $F(\boldsymbol{t})$は許容集合の上で strictly convex だから，停留点が unique local minimum を与える．Lagrangianを $L(\boldsymbol{t};\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\equiv F(\boldsymbol{t})+\sum_i\lambda_i(s_i-\sum_j t_{ij})+\sum_j\mu_j(d_j-\sum_i t_{ij})$ とおくと，$\partial L/\partial t_{ij}=0$ の根として $t_{ij}^{0}=\exp(-1+\lambda_i+\mu_j-\alpha c_{ij})$を得る．$(s_i)$, (d_j), $[c_{ij}]$, α が所与のとき(4.3a)～(4.3c) を満足し，かつ

$$(4.4)\quad t_{ij}=a_i b_j\exp(-\alpha c_{ij}),\quad \forall i,j$$

(ただし a_i, b_j はそれぞれ i, j だけに依存する正の定数）のような trip distribution $\boldsymbol{t}=[t_{ij}]$ を求めることが gravity model である．Beckmann [33] は，以上とはまったく異なった utility approach からも(4.4)が導出できることを示している．

また (4.3) に類似した興味深い問題として，与えられた周辺分布をもち所与の２変量分布$Q(i,j)$と最も "近い" $P(i,j)$を求めること：

$$(4.5)\quad \sum_{i,j}P(i,j)\log\{P(i,j)/Q(i,j)\}\to\min$$

$$\text{制約：(a)}\quad \sum_{j}P(i,j)=f_i,\quad \forall i$$

$$\text{(b)}\quad \sum_{i}P(i,j)=g_j,\quad \forall j$$

$$\text{(c)}\quad \sum_{i,j}P(i,j)=1,\quad P(i,j)\geqq 0,\quad \forall i,j$$

があって面白い応用をもっている（たとえば Ku-Kullback [34], Charnes-Cooper-Learner [35] など）．

5. 統計的推測と相互情報原理

統計的実験 $[\Theta,\{f(x|\theta)|\theta\in\Theta\},\mathscr{X}]$ がある output x について "x の pdf は $\varphi(x)$ である" という形で予測をしたい．何も事前知識がないときには相互情報量

$$T(\theta;x)\equiv\int p(\theta)d\theta\int f(x|\theta)\log\{f(x|\theta)/q(x)\}dx\to\max_{p(\cdot)}$$

(ただし $q(x)\equiv\int p(\theta)f(x|\theta)d\theta$) にする $p^{*}(\theta)$ に対して "x の pdf は $q^{*}(x)\equiv\int p^{*}(\theta)f(x|\theta)d\theta$ である" と予測するのが合理的である．これを相互情報原理(略して MIP)という．

[定理] nature と statistician (それぞれ player Ⅰ, Ⅱとする)との間の２人０和 gameで，payoff を$M(p,\varphi)\equiv\int p(\theta)d\theta\int f(x|\theta)\log\{f(x|\theta)/\varphi(x)\}dx$ とすると，上記の $p^{*}(\theta)$, $q^{*}(x)$ はそれぞれ Ⅰ, Ⅱ の最適戦略である (Ville [22], Jaynes [15], Kashyap [23])．

この実験を独立に repeat できるとする．まず x を観察した後につぎの y を "y の pdf は $\varphi(y|x)$ である" という形で予測したい．はじめの事前知識を仮りに $p(\theta)$であったとすると，x を観察した後にはそれは，$p(\theta|x)\equiv p(\theta)f(x|\theta)/q(x)$に改訂されるから，

$$\begin{aligned}T(\theta;y|x)&\equiv\int q(x)dx\int p(\theta|x)dx\int f(y|\theta)\\&\qquad\log\{f(y|\theta)/\int p(\theta|x)f(y|\theta)d\theta\}dy\\&=\iint p(\theta)f(x|\theta)d\theta dx\int f(y|\theta)\\&\qquad\log\{f(y|\theta)/g(y|x)\}dy\to\max_{p(\cdot)}\end{aligned}$$

(ただし $g(y|x)\equiv\int p(\theta)f(x|\theta)f(y|\theta)d\theta/q(x)$) にする $p^{*}(\theta)$ に対して "y の pdf は $g^{*}(y|x)\equiv\int p^{*}(\theta)f(x|\theta)f(y|\theta)d\theta/q^{*}(x)$ である" と予測するのがよい(Oberlin-Kashyap [24])．

（例１） 二項実験：$\Theta=\{\theta_1,\ \theta_0\}$, $f(x|\theta_i)=\theta_i^{x}(1-\theta_i)^{1-x}$, $(x=1,0)$．θ の事前分布を $\langle\zeta,\bar{\zeta}\rangle$ として，$\theta_\zeta\equiv\zeta\theta_1+\bar{\zeta}\theta_0$ とおく．$T(\theta;x)=\zeta I(\theta_1;\theta_\zeta)+\bar{\zeta}I(\theta_0;\theta_\zeta)$ を最大にする ζ を ζ^{*} とおくと，$\theta_\zeta{}^{*}=\zeta^{*}\theta_1+(1-\zeta^{*})\theta_0=(1+e^{r})^{-1}$, (ただし，$r\equiv(H_1-$

$H_0)/(\theta_1-\theta_0))$ $H_i\equiv-\theta_i\log\theta_i-\bar{\theta}_i\log\bar{\theta}_i$, が出るから，output x の分布は $\langle(1+e^{\tau})^{-1}, e^{\tau}(1+e^{\tau})^{-1}\rangle$ と予測される．つぎにまず x を観察した後に，つぎの y の pdf を予測したい．$y|x$ の事後 pdf は $g(1|x)=1-g(0|x)=\{\zeta\theta_1^{1+x}(1-\theta_1)^{1-x}+\bar{\zeta}\theta_0^{1+x}(1-\theta_0)^{1-x}\}/[\theta_\zeta^{x}(1-\theta_\zeta)^{1-x}]$, $(x=1, 0)$ をもつ．そこで $T(\theta;y|x)=\zeta\{\theta_1 I(\theta_1;g(1|1))+\bar{\theta}_1 I(\bar{\theta}_1;g(1|0))\}+\bar{\zeta}\{\theta_0 I(\theta_0;g(1|1))+\bar{\theta}_0 I(\bar{\theta}_0;g(1|0))\}$ を最大にする ζ を ζ^{**} とおくと，

$$g^*(1|x)=\begin{cases}\{\zeta^{**}\theta_1^2+(1-\zeta^{**})\theta_0^2\}/\theta_{\zeta^{**}}, & x=1\\ \{\zeta^{**}\theta_1\bar{\theta}_1+(1-\zeta^{**})\theta_0\bar{\theta}_0\}/(1-\theta_{\zeta^{**}}), & x=0\end{cases}$$

が出る．したがって x を観察した後の y の pdf は $g^*(y|x)$ と予測される．

数値例として $\theta_1=0.4$, $\theta_0=0.9$ のとき $\zeta^*=0.465$, $\theta_{\zeta^*}=0.668$ となるから，x の分布については $\langle 0.668, 0.332\rangle$ と予測される．さらに $\zeta^{**}=0.505$, $g^*(1|1)=0.744$, $g^*(1|0)=0.470$ となるから，x を観察した後の y の分布については；$x=1$ ならば $\langle 0.744, 0.256\rangle$, $x=0$ ならば $\langle 0.470, 0.530\rangle$ と予測される．

（例 2） 正規実験：$\Theta=\{\theta|-\infty<\theta<\infty\}$, $f(x|\theta)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\{-(x-\theta)^2/(2\sigma^2)\}$. θ の事前分布を $\theta\sim N(m,v^2)$,（ただし，$0<v\leqq V$）と想定する．途中を省いて結果だけを記すと，$T(\theta;x)=\frac{1}{2}\log(1+v^2/\sigma^2)$ だから output x は $x\sim N(m, V^2+\sigma^2)$ と予測される．まず x を観察した後の y の事後分布は $y|x\sim N(\theta_x,\sigma_x^2)$,（ただし $\theta_x\equiv(\sigma^{-2}x+v^{-2}m)/(\sigma^{-2}+v^{-2})$, $\sigma_x^2\equiv(\sigma^{-2}+v^{-2})^{-1}+\sigma^2$）であるから $T(\theta;y|x)=\frac{1}{2}\log\{1+v^2/(\sigma^2+v^2)\}$. したがって y については $y|x\sim N((\sigma^{-2}x+V^{-2}m)/(\sigma^{-2}+V^{-2}), (\sigma^{-2}+V^{-2})^{-1}+\sigma^2)$ と予測される．この分散は前の分散 $V^2+\sigma^2$ より小さい．

本節の話に密接な関連のある他の研究に Tzannes-Noonan [25], Aitchison [26], Akaike [27], Kim-David [28], Heyman [29] などがある．

MEP と MIP との関係はあまりはっきりしていない．通信系 $P=[p_{ij}]$ に入力 $\boldsymbol{p}=\langle p_1,\cdots,p_m\rangle$ を加えるとき，input i と output j とができるだけ $\left\{\begin{array}{c}\text{関係づけられている}\\ \text{独立である}\end{array}\right\}$ ほど，

$$\left\{\begin{array}{l}\text{相互情報量}\,T(i;j)\equiv\sum_{i,j}p_ip_{ij}\log(p_{ij}/\sum_i p_ip_{ij})\\ \text{entropy}\ H(i,j)\equiv-\sum_{i,j}p_ip_{ij}\log(p_ip_{ij})\end{array}\right\}$$

は大きいから，もともと MEP と MIP とは対立的な criterion である．$H_i\equiv-\sum_j p_{ij}\log p_{ij}$ とおく．matching input および最大値を両原理のもとで比較すると：MEP のもとでは $\boldsymbol{p}^*_{MEP}=\langle e^{H_i}(\sum_i e^{H_i})^{-1}|i=1,\cdots,m\rangle$, Max Entropy$=\log(\sum_i e^{H_i})$. MIP のもとでは（正則正方 Markov 行列 P に対して）$\boldsymbol{p}^*_{MIP}P=\langle e^{-X_j}(\sum_j e^{-X_j})^{-1}|j=1,\cdots,n\rangle$, Max. Information$=\log(\sum_j e^{-X_j})$, ここで (X_j) は $P(X_1,\cdots,X_n)^T=(H_1,\cdots,H_n)^T$ の根である (Sakaguchi [30])．最近 Witsenhausen [31], Weyner らにより研究されている情報の private 部分と common 部分への分解の理論は，この方面に新しい光を当てる可能性がある．

参 考 文 献

雑誌名は再出以降は略記を用いた．

[1] *Nav. Res. Logist. Q.*, **12**('65), 139-154.

[2] *Economic Theory of Teams*, Yale Univ. Press, New Haven, 1972.

[3] *Oper. Res. Q.*, **26**('75), 15-23.

[4] *Contributions to Scientific Research in Management*, Univ. Calif. Printing Dept., 1959, 79-100.

[5] *J. Opt. Theory Appl.*, **11**('73), 437-440.

[6] *Math. Japonica*, **21**('76), 311-326.

[7] *Opns. Res.*, **10** ('62), 285-299.

[8] *ibid*, **19**('71), 559-586.

[9] *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, **20** ('73), 77-88.

[10] *ibid*, **22**('75), 176-183.

[11] *OR*, **25**('77), 304-314.

[12] *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, North-Holland, 1970, 267-278.

[13] *NRLQ*, **23**('76), 283-295.
[14] *MJ*, **24**('79), in print.
[15] たとえば *IEEE Trans.*, *SSC*-**4**('68), 227-241.
[16] *ibid.*, *SSC*-**4**('68), 241-248.
[17] *ORQ*, **21**('70), 247-265.
[18] *RSAR*, *JUSE*, **22**('75), 116-119.
[19] *J. Market. Res.*, **10**('73), 361-375.
[20] *RSAR*, *JUSE*, **23**('76), 14-24.
[21] *ibid*, **24**('77), 5-14.
[22] *Theory of Games : Techniques and Applications*(Mensch, *ed.*). The English Univ. Press, London, 1966, 85-100.
[23] *IEEE Trans.*, *IT*-**17**('71), 641-650.
[24] *ibid*, *SMC*-**3**('73), 359-364.
[25] *Information and Control*, **22**('73), 1-12.
[26] *Biometrika*, **62**('75), 547-554.
[27] *ibid*, **65**('78), 53-59.
[28] *J. Appl. Prob.*, **15**('78), 523-530.
[29] *OR*, **17**('69), 1194-1205.
[30] *J. Oper. Res. Soc. Japan*, **3**('61), 123-132.
[31] *SIAM J. Appl. Math.*, **31**('76), 313-333.
[32] *Transpn. Res.*, **7**('73), 39-61.
[33] *Information, Inference and Decision*(Menges, *ed.*), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Holland, 1974, 155-163.
[34] *IEEE IT*-**15**('69), 444-447.
[35] Centre for Cybernetic Studies, Univ. Texas, Res. Rep., CCS-252, 1975, 16.

(さかぐち・みのる　大阪大学)

シンポジウム・ルポ

「ORとエントロピー」

本特集の内容は，学会の秋季研究発表会の前日の９月19日東京理科大で開催された第７回シンポジウム「ORとエントロピー」で報告されたものであります．シンポジウムは理科大・国沢清典教授の司会で行なわれ，参加者は約30名でした．以下は各発表での話題，ディスカッスされた内容等のごく簡単な速報記事であることをおことわりします．

まず高野氏は，エントロピーと中心極限定理との結びつきを離散型確率分布をもとに見通しよく示した．n個の独立同分布にしたがう確率変数の和の確率分布のエントロピーが$1/2 \log n$に漸近収束することで極限定理の成立を証明している．本報告に関し必ずしも同分布に従わない変数に対する場合のアプローチの方法，収束の速さの改善の可能性などについての質疑があった．

ついで，堀部氏は，最近パターン認識などの分野で利用が考えられている周辺分布から同時分布を推定する方法として最大エントロピー的同時分布推定法を紹介した．周辺分布からは同時分布は一意に求められないことは自明であるが，ある特定の周辺分布族だけがわかっているとき，この周辺分布族をもつ同時分布のうち最も不確定さの大きい分布をもって推定同時分布としようというものである．その不確定さの尺度としてエントロピーを導入している．この報告に対して，多国間の貿易量予測問題への応用が考えられそうだという提案があった．

神保氏は，エントロピー・モデルを考える場合によく現われる（エントロピー）最大化問題についてこれを数理計画問題の凸計画あるいは擬凸計画として考え，そのいくつかの解法および最適解のエントロピー的解釈について紹介した．本報告に関連してエントロピー最大化に関してよく用いられる，単位コストあたりのエントロピー最大という仮説の裏づけ，また具体的活用事例に関する質問があった．

坂口氏は，エントロピー，情報および決定との相互関係について総合的な報告を行なった．情報は多いほど得であるとする格言は１人ゲームについて成り立つことであり，２人ゲームでは成立しないこと，情報の量と価値との関係，エントロピーと決定とは無関係であること，エントロピー最大原理の統計的推測問題への応用，統計的推測問題への相互情報原理の適用などである．

最後に，萱原氏はエントロピー・モデルの１つの代表的な応用事例として，証券投資における資金配分比率を求める問題をエントロピー最大化問題として定式化し，その効率的なアルゴリズムを紹介した．伝統的なポートフォリオ問題の解法に比べて，ここで紹介されたモデルとその解法はインプット量のてい減さらには計算の手間も大きく省力化できるものであることを示した．

エントロピーという概念は不確定性，ランダムネス，一様性，情報などなどいろいろな意味に用いられていることもあって，なかなかその本質を理解することは難しい．しかし今回のシンポジウムに参加して筆者のエントロピー概念に対するエントロピーもかなり減少したように思う．

(森清　堯)