# エントロピーと極限定理

高 野 清 治

## 1. はじめに

エントロピーは Shannon[1]により定式化され通信理論に応用されたものであるが，それ自身興味深い量であり，エルゴード理論[2]や関数空間の特徴づけの問題[3]にも応用され，決定的役割を果たしてきたことが知られている．エントロピーのもつ多様な解釈は，それがどのように用いられるかによって異なってくるだろうが，たとえば，ある系に対する全体的な無秩序性の度合いとみると，極限定理とのかかわりが興味深いと思われる．Linnik[4]は，$n$ 個の独立変数の和の分布のエントロピーが$\frac{1}{2}\log n$ に漸近収束すれば極限定理が成立することに着目し，連続型分布を仮定して，ある条件下でこれを証明した．しかし証明の道筋はかなり難解であり，そのままでは理解し難いように思われる．そこでわれわれは有限個の離散値のみをとる変数に制限し，この結果を少し詳しく整理し，合わせてエントロピーの意味を考えてみることにしよう．

## 2. 結果とその解釈

$X_1, \cdots, X_n$ を $n$ 個の独立同分布にしたがう確率変数とし，$\{0, 1, \cdots, a\}$ ($a$: 自然数) に値をとるものとする．さらに，$EX_j=\mu$, $\mathrm{Var}\, X_j=\sigma^2 (\sigma>0)$ と仮定し，和 $S_n=X_1+\cdots+X_n$ を考える．$S_n$ に対するエントロピーは，

$$H_n=H(S_n)=-\sum_{i=0}^{na} q_n(i) \log q_n(i), \text{（底は 2）},$$

$$q_n(i)=P(S_n=i), \quad i=0, 1, \cdots, na.$$

となるが，問題を単純化するために，$H_n$ の代わりに，$\mathscr{H}_n$:

$$\mathscr{H}_n=H_n-\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2), \quad n=1, 2, \cdots$$

を考えることにする．このとき，

**定理 1**　任意の正数 $\delta$ に対して，

$$\frac{1}{2}\log n-\mathscr{H}_n \leqq O(n^{-1/2+\delta}) \ (n\to\infty) \qquad (2.1)$$

が成り立つ．

実は容易に$\frac{1}{2}\log n-\mathscr{H}_n \geqq -O(n^{-1})$ が示されるので，(2.1)は $n\to\infty$ に対してエントロピーがどのように発散してゆくかをある程度漸近的にとらえ得ることを示唆しているだろう．一方，

**定理 2**　$\frac{1}{2}\log n-\mathscr{H}_n \to 0 \ (n\to\infty) \qquad (2.2)$

は，中心極限定理の成立を含む．

このことは後に情報論的考察によって示されるだろう．

(2.1) を仮定して極限分布への収束の速さを調べると，$O(n^{-1/2+\epsilon})$, $(\epsilon>0)$，となり $O(n^{-1/2})$ とならない．これは近似計算の仕方により幾分改善されると思われるが，今のところわかっていない．また必ずしも同分布にしたがわない変数に対しては，Linnik[4]のようにLindeberg条件を考えて $H(S_n/\sqrt{B_n})\to\frac{1}{2}\log(2\pi e)$ $(n\to\infty)$ を示すことが考えられる．われわれの場合は，(2.1)を示すことが基本的であり，少なくも$\mathscr{H}_n$が漸近的にかなり速く$\frac{1}{2}\log n$ に近づき，その違いの程度は間接

的に極限分布への収束の程度と深く関連していることがいえるだろう．

## 3. 定理の証明

ここでは，必要な補題を掲げ，これによって定理の証明を試みよう．補題のいくつかは後に証明される．定理1の証明はかなり面倒であるが，基本的には多項分布を出発点にとり所要の量に寄与する可能な組合せを組織的に数え上げることで得られる．

$$P(X_j=k)=p_k, p_k>0, k=0,1,\cdots,a; \sum_{k=0}^{a} p_k=1$$

とする．また $\sum_{k=0}^{a} r_k=n$ を満たす非負整数 $r_0,\cdots,r_a$ により，

$$p_n(r_0,\cdots,r_a)=\frac{n!}{r_0!\cdots r_a!}p_0^{r_0}\cdots p_a^{r_a} \quad (3.1)$$

とする．

**補題1** $0<\varepsilon<1/\sigma$ を満たす任意の数 $\varepsilon$ に対し，

$$\max_{0\leq k\leq a}|r_k-np_k|\leqq n^{1/2+\varepsilon}$$

とする．このとき，

$$p_n(r_0,\cdots,r_a)=(2\pi n)^{-a/2}(p_0\cdots p_a)^{-1/2}$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{a}(r_k-np_k)^2/np_k\right\}e^{O(n^{-1/2+3\varepsilon})} \quad (3.2)$$

**補題2** 各 $i$; $i=0,1,\cdots,na$ に対して $r_0(i),\cdots,r_a(i)$ を条件：$\sum_{j=0}^{a} jr_j(i)=i, \sum_{j=0}^{a} r_j(i)=n,\ r_j(i)\geqq 0$, $j=0,\cdots,a$ を満たす整数の組とすれば，ある非負整数 $k_0,\cdots,k_{a-2}$ $(k_0\geqq k_1\geqq\cdots\geqq k_{a-2}\geqq 0)$ が存在し，

$$\begin{cases} r_0(i)=n-i+k_0 \\ r_1(i)=i-2k_0+k_1 \\ r_j(i)=k_{j-2}-2k_{j-1}+k_j,\ (j=2,\cdots,a-2) \\ r_{a-1}(i)=k_{a-3}-2k_{a-2} \\ r_a(i)=k_{a-2} \end{cases} \quad (3.3)$$

とかける．したがってまた，

$$q_n(i)=\sum_{k_0,\cdots}\cdots\sum_{k_{a-2}} p_n(n-i+k_0, i-2k_0+k_1,\cdots, k_{a-2}) \quad (3.4)$$

となる．和は可能な $k_0,\cdots,k_{a-2}$ にわたる．

**補題3** 各 $i(0\leqq i\leqq na)$ に対して，$Q_a=\sum_{j=0}^{a}(r_j(i)-np_j)^2/p_j$ とおけば，ある定数 $c_{\alpha\beta}(1\leqq\alpha\leqq a, 1\leqq\beta\leqq a+1)$ が定まり，

$$Q_a=(c_{11}k_{-2}+c_{12}k_{-1})^2+\sum_{j=2}^{a}(c_{j,j-1}k_{j-4}+c_{j,j}k_{j-3}+c_{j,j+1}k_{j-2})^2 \quad (3.5)$$

とかける．ここに $k_{-2}=n$, $k_{-1}=i$ とし，$C=(c_{ij})$ は，

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & & & & \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & & & \\ & c_{32} & c_{33} & c_{34} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & c_{a,a-1} & c_{a,a} & c_{a,a+1} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

なる $a\times(a+1)$ 行列で，条件

$$\begin{cases} (\prod_{j=1}^{a} c_{j,j+1})^2 \prod_{j=0}^{a} p_j=1 & (3.7\text{-}1) \\ c_{12}^{-2}=\sigma^2 & (3.7\text{-}2) \\ c_{11}/c_{12}=-\mu & (3.7\text{-}3) \end{cases}$$

を満たす．

つぎに，$\phi(t)=(2\pi)^{-1/2}e^{-t^2/2}(-\infty<t<\infty)$,

$$\phi_n(i)=h_n\phi(a_n+h_n i),\ h_n=(\sigma n^{1/2})^{-1},$$
$$a_n=-n\mu h_n$$

とかくことにすると，

**補題4** $|\sum_{i=0}^{na}\phi_n(i)-1|\leqq O(n^{-1}).$ (3.8)

**補題5** $D=\{i:|i-n\mu|\leqq n^{1/2+\varepsilon}, i=0,1,\cdots,na\}$ とおく．このとき各 $i\in D$ に対して，

$$U_i=\{(r_0(i),\cdots,r_a(i)):\max_{0\leqq j\leqq a}|r_j(i)-np_j|\leqq n^{1/2+\varepsilon}\}$$
$$V_i=\{(r_0(i),\cdots,r_a(i)):\max_{0\leqq j\leqq a}|r_j(i)-np_j|>n^{1/2+\varepsilon}\}$$

とすれば，

$$\sum_{U_i}{}' p_n(r_0(i),\cdots,r_a(i)) \leqq \phi_n(i)e^{O(n^{-1/2+3\varepsilon})}(1+O(n^{-1})) \quad (3.9)$$

$$\sum_{V_i}{}' p_n(r_0(i),\cdots,r_a(i)) \leqq O\left(\exp\left\{-\frac{n^{2\varepsilon}}{2p^*(1-p^*)}\right\}\right),$$
$$p^*(1-p^*)=\max_{0\leqq j\leqq a}p_j(1-p_j) \quad (3.10)$$

が成り立つ．ここに $\sum'$ はそれぞれ対応するすべての組合せ $(r_0(i),\cdots,r_a(i))$ にわたる和をあらわす．

**補題 6** $Z_1, \cdots, Z_n$を平均0の独立同分布にしたがう変数とし，ある自然数$m$について$E|Z_j|^{2m}<\infty$と仮定する．すると，

$$E|\sum_{j=1}^{n} Z_j|^{2m} \leqq O(n^m) \tag{3.11}$$

([5], p. 225-227)

“定理1の証明” 最初に，

$$\frac{1}{2}\log n - \mathscr{H}_n = \sum_{i=0}^{na} q_n(i) \log \frac{q_n(i)}{\phi_n(i)} \tag{3.12}$$

に注意する．右辺の和を$D, D^c$により2つにわけ，

$$\sum_{i \in D} q_n(i) \log \frac{q_n(i)}{\phi_n(i)} \leqq O(n^{-1/2+3\varepsilon}) \tag{3.13}$$

$$\sum_{i \in D^c} q_n(i) \log \frac{q_n(i)}{\phi_n(i)} \leqq O(n^{-(2m-1)\varepsilon}) \tag{3.14}$$

となることを証明する．これがいえれば，

$$\frac{1}{2}\log n - \mathscr{H}_n \leqq O(n^{-1/2+3\varepsilon}) + O(n^{-(2m-1)\varepsilon})$$

となるが，とくに，$\varepsilon = 1/(4m+4)$と選べば，

$$\leqq O(n^{-(2m-1)/(4m+4)}).$$

したがって，任意に与えられた正数$\delta$に対して，$m$を十分大きくとり，$\delta > 3/(4m+4)$ならしめると証明がすむ．

さて，補題5. (3.9) によれば(3.13)の左辺は，

$$\sum_{i \in D} q_n(i) \log \{(\phi_n(i) e^{O(n^{-1/2+3\varepsilon})}(1+O(n^{-1})) + O\left(\exp\left(-\frac{n^{2\varepsilon}}{2p^*(1-p^*)}\right)\right)/\phi_n(i)\}$$

より大きくならない．すなわち，

$$\leqq O(n^{-1/2+3\varepsilon}) + O(n^{1/2} e^{-Kn^{2\varepsilon}})$$
$$\leqq O(n^{-1/2+3\varepsilon}).$$

となる．ここに，$K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^*(1-p^*)} - \frac{1}{\sigma^2}\right) > 0$である．他方，補題6. (3.11)によれば，

$$\sum_{i \in D^c} q_n(i) \leqq \sum_{i \in D^c} \left(\frac{|i-n\mu|}{n^{1/2+\varepsilon}}\right)^{2m} q_n(i)$$
$$\leqq n^{-(m+2m\varepsilon)} E|S_n - n\mu|^{2m}$$
$$\leqq n^{-(m+2m\varepsilon)} O(n^m) = O(n^{-2m\varepsilon})$$

$$\sum_{i \in D^c} q_n(i) \frac{(i-n\mu)^2}{n}$$
$$\leqq n^{-1} n^{-(m+2m\varepsilon)} E|S_n - n\mu|^{2m+2}$$
$$\leqq O(n^{-2m\varepsilon}).$$

したがって，

$$(3.14)\text{の左辺} \leqq \sum_{i \in D^c} q_n(i) \log \sum_{i \in D^c} q_n(i) + \sum q_n(i) \left\{\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2 n) + \frac{(i-n\mu)^2}{2n\sigma^2}\log e\right\}$$
$$\leqq O(-2m\varepsilon \log n \cdot p_0^n) + O(n^{-2m\varepsilon}\log n) + O(n^{-2m\varepsilon}) \leqq O(n^{-(2m-1)\varepsilon})$$

“定理2の証明”

**補題 7** $\frac{1}{2}\log n - \mathscr{H}_n \geqq -O(n^{-1})$.

**補題 8** $2 \leqq s \leqq r$なる任意の自然数$s, r$をとる．確率ベクトル$\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_r)$，$\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_r)$，$p_j, q_j > 0$に対して，確率ベクトル$\boldsymbol{p}' = (p_1', \cdots, p_s')$，$\boldsymbol{q}' = (q_1', \cdots, q_s')$を，

$$p_j' = \sum_{k \in J_j} p_k, \quad q_j' = \sum_{k \in J_j} q_k, \quad j = 1, \cdots, s$$

と定める．ここで$J_1, \cdots, J_s$は$\{1, \cdots, r\}$を互いに交わりのない$s$個の部分集合に分けたときの各要素である．このとき，

$$D(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geqq D(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}')$$

ただし，$D(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_j p_j \log(p_j/q_j)$.

**補題 9** 上の$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$に対し，

$$D(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \geqq \sum_{j=1}^{r} (p_j^{1/2} - q_j^{1/2})^2 \log e.$$

([6])

さて，$x: -\infty < x < \infty$に対して，

$$F_n(x) = P(S_n \leqq n\mu + \sigma n^{1/2} x)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t) dt$$

とおく．容易にわかるように，

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < a_n \\ \sum_{i=0}^{N_n(x)} q_n(i) & a_n \leqq x < a_n + h_n na \\ 1 & x \geqq a_n + h_n na \end{cases}$$

ただし$h_n = (\sigma n^{1/2})^{-1}$，$a_n = -n\mu h_n$，$N_n(x) = [n\mu + \sigma n^{1/2} x]$ ($[\cdot]$は Gauss 記号)である．

また，

$$\phi_n^*(i) = \phi_n(i) / \sum_{j=0}^{na} \phi_n(j) \quad i = 0, 1, \cdots, na$$

とおく．はじめに，仮定からある$\delta_n \downarrow 0 (n \to \infty)$があって，

$$\frac{1}{2}\log n - \mathscr{H}_n \leqq \delta_n \downarrow 0 \ (n \to \infty)$$

となるから，補題4，(3.8)を用いて，

$$\sum_i q_n(i)\log\frac{q_n(i)}{\phi_n{}^*(i)}=\sum_i q_n(i)\log\frac{q_n(i)}{\phi_n(i)}$$

$$+\sum_i q_n(i)\log\frac{\phi_n(i)}{\phi_n{}^*(i)}$$

$$\leqq \delta_n+|\sum_j \phi_n(j)-1|\log e$$

$$\leqq \delta_n+O(n^{-1}). \tag{3.15}$$

簡単のため，$\varepsilon_n=\delta_n+O(n^{-1})$ とかく．このとき，

$$\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|\leqq \varepsilon_n/\log e+O(n^{-1/4}\varepsilon_n{}^{1/2}) \tag{3.16}$$

が成立することを示そう．

任意の $x\in[a_n, a_n+h_n na)$ に対して，

$$q_n'(1)=\sum_{i=0}^{Nn(x)} q_n(i),\ q_n'(j+1)=q_n(N_n(x)+j)$$

$$\phi_n{}^{*\prime}(1)=\sum_{i=0}^{Nn(x)}\phi_n{}^*(i),$$

$$\phi_n{}^{*\prime}(j+1)=\phi_n{}^*(N_n(x)+j)$$

$$(j=0, 1, \cdots, na-N_n(x))$$

とおくと，

$$|q_n'(1)-\phi_n{}^{*\prime}(1)|=|q_n'(1)^{1/2}-\phi_n{}^{*\prime}(1)^{1/2}|$$

$$|q_n'(1)^{1/2}+\phi_n{}^{*\prime}(1)^{1/2}|$$

なることと，補題8，9および(3.15)により，

$$|q_n'(1)^{1/2}-\phi_n{}^{*\prime}(1)^{1/2}|^2\log e$$

$$=\sum_j|q_n'(j)^{1/2}-\phi_n{}^{*\prime}(j)^{1/2}|^2\log e$$

$$\leqq \sum_j q_n'(j)\log\frac{q_n'(j)}{\phi_n{}^{*\prime}(j)}$$

$$\leqq \sum_i q_n(i)\log\frac{q_n(i)}{\phi_n{}^*(i)}\leqq \varepsilon_n$$

となることを使えば，

$$|q_n'(1)^{1/2}-\phi_n{}^{*\prime}(1)^{1/2}|\leqq(\varepsilon_n/\log e)^{1/2}$$

故に，

$$q_n'(1)^{1/2}+\phi_n{}^{*\prime}(1)^{1/2}\leqq 2\phi_n{}^{*\prime}(1)^{1/2}$$

$$+(\varepsilon_n/\log e)^{1/2}\leqq O(n^{-1/4})+(\varepsilon_n/\log e)^{1/2}.$$

がでるから，結局，

$$|q_n'(1)-\phi_n{}^{*\prime}(1)|\leqq(\varepsilon_n/\log e)^{1/2}$$

$$((\varepsilon_n/\log e)^{1/2}+O(n^{-1/4}))$$

$$=\varepsilon_n/\log e+O(n^{-1/4}\,\varepsilon_n{}^{1/2}).$$

つぎに，$0\leqq\alpha\leqq\beta\leqq na$ を満たす任意の整数 $\alpha, \beta$ に対して，$J_n(\alpha, \beta)=[a_n+h_n\alpha-h_n/2,\ a_n+h_n\beta+h_n/2]$ とおくと，補題4と同様にして，

$$\left|\sum_{i=\alpha}^{\beta}\phi_n(i)-\int_{J_n(\alpha,\beta)}\phi(t)dt\right|\leqq O(n^{-1})$$

となるから，

$$\left|\sum_{i=1}^{Nn(x)}\phi_n(i)-\int_{J_n(0,N_n(x))}\phi(t)dt\right|\leqq O(n^{-1}).$$

もとより，

$$\left|\sum_{i=0}^{Nn(x)}(\phi_n{}^*(i)-\phi_n(i))\right|\leqq O(n^{-1})$$

であるから，結局これらから，

$$|F_n(x)-\Phi(x)|$$

$$\leqq\int_{-\infty}^{a_n}\phi(t)dt+\left|\sum_{i=0}^{Nn(x)}q_n(i)-\int_{a_n}^{x}\phi(t)dt\right|$$

$$\leqq\int_{-\infty}^{a_n}\phi(t)dt+|q_n'(1)-\phi_n{}^{*\prime}(1)|$$

$$+\left|\sum_{i=0}^{Nn(x)}(\phi_n{}^*(i)-\phi_n(i))\right|+\left|\sum_{i=0}^{Nn(x)}\phi_n(i)\right.$$

$$\left.-\int_{J_n(0,N_n(x))}\phi(t)dt\right|+\int_{x-h_n/2}^{x}\phi(t)dt$$

$$\leqq\varepsilon_n/\log e+O(n^{-1/4}\varepsilon_n{}^{1/2})$$

を得る．$x<a_n$ や $x\geqq a_n+h_n na$ に対しては，

$$\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt=O(x^{-1}e^{-x^2/2})\qquad(x\to\infty)$$

などに注意すると，この結果はやはり成り立つことがわかる．こうして定理2が示された．

## 4. 補題の証明

**補題1の証明**　よく知られたstirling formulaによって，

$$p_n(r_0, \cdots, r_a)=(2\pi n)^{-a/2}(p_0\cdots p_a)^{-1/2}$$

$$\prod_{k=0}^{a}(np_k/r_k)^{r_k+1/2}\,e^{O(n^{-1})}$$

そこで $\ln(1+x)=x-x^2/2+O(x^3)\,(x\to 0)$ を用いれば(3.2)を得る．

**補題2の証明**　はじめに，

$$\begin{cases} r_0(i)=n-i+\sum_{j\geqq 2}(j-1)r_j(i)\\ r_1(i)=i-\sum_{j\geqq 2}jr_j(i)\end{cases}$$

の形に着目し，$k_0=\sum_{j\geqq 2}(j-1)r_j(i)$ とおくと，

$$\begin{cases} r_0(i)=n-i+k_0 \\ r_1(i)=i-2k_0+\sum_{j\geqq 3}(j-2)r_j(i) \\ r_2(i)=k_0-\sum_{j\geqq 3}(j-1)r_j(i) \end{cases}$$

を得る．再び $k_1=\sum_{j\geqq 3}(j-2)r_j(i)$ とおいて，

$$\begin{cases} r_0(i)=n-i+k_0 \\ r_1(i)=i-2k_0+k_1 \\ r_2(i)=k_0-2k_1+\sum_{j\geqq 4}(j-3)r_j(i) \\ r_3(i)=k_1-\sum_{j\geqq 4}(j-2)r_j(i) \end{cases}$$

が得られる．この変形をくり返してゆけば，

$$\begin{cases} r_0(i)=n-i+k_0 \\ r_1(i)=i-2k_0+k_1 \\ r_j(i)=k_{j-2}-2k_{j-1}+k_j,\ (j=2,\cdots,a-3) \\ r_{a-2}(i)=k_{a-4}-2k_{a-3}+\sum_{j\geqq a}(j-(a-1))r_j(i) \\ r_{a-1}(i)=k_{a-3}-\sum_{j\geqq a}(j-(a-2))r_j(i) \end{cases}$$

が導かれるが，$k_{a-2}=r_a(i)=\sum_{j\geqq a}(j-(a-1))r_j(i)$ とおくことにより，(3.3)が得られる．(3.4)は容易にわかる．

**補題 3 の証明**　すべての計算過程を述べると大変なので，ここではその大要について紹介する．$Q_a$ は $n, i, k_0, \cdots, k_{a-2}$ に関する 2 次形式であり，以下に示す $(a+1)\times(a+1)$ の対称行列 $G$ によって特徴づけられている．

$$G=\begin{pmatrix} -1+1/p_0 & -1/p_0 & 1/p_0 & 0 & \cdots \\ -1/p_0 & 1/p_0+1/p_1 & -1/p_0-2/p_1 & 1/p_1 & \cdots \\ 1/p_0 & -1/p_0-2/p_1 & 1/p_0+4/p_1+1/p_2 & -2/p_1-2/p_2 & \cdots \\ 0 & 1/p_1 & -2/p_1-2/p_2 & 1/p_1+4/p_2+1/p_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

そこで 1 次変数

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_a \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} n \\ i \\ k_0 \\ \vdots \\ k_{a-2} \end{pmatrix}\qquad \text{(ただし } C \text{ は(3.6)の形とする)}$$

のうち $Q_a=\sum_{j=1}^{a} z_j^2$ とかけるものを探すと，帰納的にそのような $C$ の定まることが示され，しかも，$G={}^tCC$ となることがわかる．したがって(3.7-1)～(3.7-3)を示せば十分である．

$C$ から第 1 列を削除してできる行列を $C_1$, $G$ から第 1 行，第 1 列を削除してできる行列を $G_{1,a}$ とかくと，$G$ と $C$ との上の関係から，

$${}^tC_1C_1=G_{1,a}$$

$$\det({}^tC_1C_1)=(C_{12}C_{23}\cdots C_{a,a+1})^2$$

がでる．帰納法によって $\det G_{1,a}$ を計算すると，

$$\det G_{1,a}=(\prod_{j\geqq 0}p_j)^{-1}$$

がわかり，(3.7-1)が証明される．

つぎに，$C$ から第 1 行および第 1，2 列を削除して行列 $C_2$ を，$G$ から第 1，2 行および第 1，2 列を削除して行列 $G_{2,a}$ を作れば，同様にして，

$$\det G_{2,a}=\det({}^tC_2C_2)=(C_{23}C_{34}\cdots C_{a,a+1})^2,\quad (a\geqq 2)$$

がわかる．そしてかなり厄介であるが，帰納的に，

$$(\prod_{j\geqq 0}p_j)\det G_{2,a}=\sigma^2\equiv p_0\sum_{j\geqq 1}j^2p_j+\sum_{1\leqq j<k\leqq a}\sum(j-k)^2p_jp_k$$

を示すことができるので，これらから (3.7-2) が示される．最後に $C$ から第 2 列を削除して行列 $C_3$ を，また第 1 列を削除して行列 $C_4$ を作り，さらに

$$G_{3,a}=\begin{pmatrix} g_{12} & g_{13} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ g_{23} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{24} & g_{34} & g_{44} & g_{45} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & g_{35} & g_{45} & g_{55} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{a-1,a+1} & g_{a,a+1} & g_{a+1,a+1} \end{pmatrix}$$

(ただし $g_{ij}$ は $G$ の $(i, j)$ 要素である)とかけば，

$$\det G_{3,a}=\det({}^tC_3C_4)=C_{12}C_{12}(C_{23}C_{34}\cdots C_{a,a+1})^2$$

が成立する．こうして，

$$C_{11}/C_{12}=(C_{12}C_{23}\cdots C_{a,a+1})^{-2}\det G_{3,a}$$

を得るが，再び帰納法により，

$$\left(\prod_{j\geqq 0} p_j\right)\det G_{3,a}=-\mu$$

が示されて(3.7-1)を使い(3.7-3)が証明される．

**補題4の証明** $I_n(i)=[a_n+h_n i-h_n/2,\ a_n+h_n i+h_n/2]$ とおくと，

$$\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\phi_n(i)-1\right|$$

$$\leqq \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|h_n\phi(a_n+h_n i)-\int_{I_n(i)}\phi(t)\,dt\right|$$

$$\leqq \sum_{i=-\infty}^{\infty}1/2\int_{I_n(i)}(t-a_n-h_n i)^2|\phi''(\xi_{ni}(t))|\,dt$$

$$\leqq h_n^2/24\sum_{i=-\infty}^{\infty}h_n M_n(i),$$

ここに，$M_n(i)=\sup_{x\in I_n(i)}|\phi''(x)|$であり，$\xi_{ni}(t)$は$I_n(i)$のある内点である．$|\phi''(x)|$は$-\infty<x<\infty$で一様に有界かつ連続だから，

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}h_n M_n(i)\longrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}|\phi''(t)|\,dt<\infty,\ (n\to\infty).$$

これと，$\int_x^{\infty}e^{-t^2/2}dt=O(x^{-1}e^{-x^2/2})$ $(x\to\infty)$ とから(3.8)が証明される．

**補題5の証明** (3.9)については，補題1，2，3と，(3.9)の左辺がつぎの形：

$$\phi_n(i)e^{O(n^{-1/2+3\epsilon})}\sum_{k_0}\cdots\sum_{k_{a-2}}\prod_{j=0}^{a-2}\psi_j(k_j),$$

ここに，$\psi_0(k_0)=(2\pi c_{23}^{-2}n)^{-1/2}\exp\{-(c_{21}n+c_{22}i+c_{23}k_0)^2/2n\}$，$\psi_1(k_1)=(2\pi c_{34}^{-2}n)^{-1/2}\exp\{-(c_{32}i+c_{33}k_0+c_{34}k_1)^2/2n\}$，$\psi_{j-2}(k_{j-2})=(2\pi c^{-2}_{j,j+1}n)^{-1/2}\exp\{-(c_{j,j-1}k_{j-4}+c_{j,j}k_{j-3}+c_{j,j+1}k_{j-2})^2/2n\}$ $(j=4,\cdots,a)$,

のようにかけることに注意すればすぐでる．

そこで(3.10)を示そう．まず$0<p<\lambda<1$（ただし$\lambda n$が整数となるように$\lambda$をとるとする）なる$p$，$\lambda$に対し，

$$\sum_{k=\lambda n}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\leqq e^{-nD(\lambda,p)}$$

が成り立つことに注意する([7], p. 114)．すると，

$$(3.10)\text{の左辺}=P\{\max_{0\leqq j\leqq a}|r_j(i)-np_j|>n^{1/2+\epsilon}\}$$

$$\leqq P\{\max_{0\leqq j\leqq a}|r_j-np_j|>n^{1/2+\epsilon}\}$$

$$\leqq \sum^{a}P(|r_j-np_j|>n^{1/2+\epsilon})$$

$$=\sum_j\sum_{|r_j-np_j|>n^{1/2+\epsilon}}\binom{n}{r_j}p_j^{r_j}(1-p_j)^{n-r_j},$$

そこで$p\to p_j$，$\lambda\to p_j+n^{-1/2+\epsilon}$と考え，$\ln(1+x)=x-x^2/2+O(x^3)$ $(x\to 0)$を用いれば，

$$\leqq\sum_j\exp\left\{-\frac{n^{2\epsilon}}{2p_j(1-p_j)}\right\}e^{O(n^{-1/2+3\epsilon})}$$

を得る．したがって$p^*(1-p^*)=\max_j p_j(1-p_j)$とすれば，(3.10)が得られる．

補題7は$\ln x\geqq 1-1/x\,(x>0)$と(3.8)とからすぐでるので省略する．また補題8も同じ不等式を適用し，$D(\cdot,\cdot)\geqq 0$なることを利用すれば容易に導かれる．他方補題9については，

$$\sum_j p_j\log(p_j/q_j)=-2\sum_j p_j\log(q_j/p_j)^{1/2}$$

$$\geqq -2\sum_j p_j((q_j/p_j)^{1/2}-1)\log e$$

$$=\sum_j(p_j^{1/2}-q_j^{1/2})^2\log e$$

として明らかであろう．

## 参考文献


[1] C. E. Shannon, The Mathematical Theory of Communication, *B. S. T. J.*, 1948, Vol. 27, 379–423, 623–656.

[2] たとえば，J. R. Brown, *Ergodic Theory and Topological Dynamics*, Academic Press, 1976.

[3] たとえば 国沢，梅垣「情報理論の進歩」岩波，1965.

[4] Yu. V. Linnik, An information-theoretic proof of the central limit theorem with the Lindeberg condition, *Theor. Prob. Appl.*, **4**, 288–299.

[5] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley, 1953.

[6] S. Kullback, *Information Theory and Statistics*, Wiley, 1959.

[7] R. B. Ash, *Information Theory*, Interscience. 1965.



（たかの・せいじ　横浜国立大学）