総合報告

整数/組合せ計画法の現状 (その6)

組合せ問題の計算上の複雑さについて

整数計画法研究部会　大　山　達　雄

本報告は整数計画法(以下ＩＰと略記する)研究部会で行なったＩＰに関する諸分野の研究の現状を紹介するサーベイ作業の一部をなすものである．今回は組合せ問題の解法における計算上の複雑さについて $\mathcal{NP}$-完全なる概念を中心に最近の研究の動向を紹介してみよう．

1971年に Cook が［３］の中で $\mathcal{NP}$ あるいは $\mathcal{NP}$-完全($\mathcal{NP}$-Complete) なる概念を提起して以来，計算上の複雑さ (Computational Complexity) に関する理論の研究は多くの研究者の関心をよび，これまでにも多くの組合せ論的な問題がこれらの概念を満たすことが証明され，それによって組合せ問題の“分類化”が行なわれている．まずここでは問題が多項式オーダの計算の手間で解けるかどうかということが問題になるわけであるが，現在までのところ $\mathcal{NP}$-完全なるグループに属する問題が多項式オーダの手間では解けないということは証明されていない．しかしながら $\mathcal{NP}$-完全なる概念が問題の解決に際して計算上の複雑さを表わす尺度として大きな役割を果たしていることは事実である．この報告ではＩＰ問題に限らずより広い意味での組合せ論的な問題に対して，その $\mathcal{NP}$-完全性についてそれに属することがすでに証明されている問題を整理してみることにする．

1.　序　論

すべての問題は YES-NO の解答を求める認定問題 (recognition problem)として表現されうる．たとえば最小化を行なう最適化問題では，ある y に対してそれと等しいかそれより小さな値を有する解が存在するかどうかという問題に変換できる．そこで認定問題に対して以下に述べる $\mathcal{P}$ と $\mathcal{NP}$ という概念を定義しよう．まず $\mathcal{P}$ とは認定問題のうち“良い”多項式的に有界な (“good” polynomial-bounded,［４］) アルゴリズムが存在するようなものをいう．それに対して $\mathcal{NP}$ とは，認定問題のうち多項式的に有界な深さを有する探索木においてバックトラック探索で解けるようなものをいう．あるいはチューリング機械の用語を使えば，$\mathcal{P}$ は 1-テープの決定性チューリング機械で多項式オーダの時間内に認定可能な問題の族であるということができ，また $\mathcal{NP}$ は 1-テープの非決定性チューリング機械で多項式オーダの時間内に認定可能な問題の族であると表現できる．たとえば $\mathcal{P}$ に属するものとしては，マッチング問題，最大フロー問題，割当問題，輸送問題，グラフの平面性チェックの問題などがある．それに対してバックトラック法よりも良い方法が見出されていないような問題としては，たとえば 0-1 整数計画問題，行商人問題，グラフ同型問題などがある．

問題の変換 (transformation) について述べよう．いま２つの認定問題 P′, P が与えられたとする．この時 P′ のいかなる解に対しても，多項式オーダの時間内にPの解を求めれば P′ の解が得られるようにPの解が作られうる場合に問題 P′ は問題Pに変換可能(P′ is reducible to P, P′ is transformable into P)であるといい，$P' \propto P$ と表わすことにする．また $P' \propto P$ でかつ $P \propto P'$ であれば，P と P′ は等価(equivalent)であるという．問題Pに対して $P \in \mathcal{NP}$ であってかつ $\mathcal{NP}$ に属するすべての問題がPに変換可能であれば，Pは $\mathcal{NP}$-完全であるとよばれる．

なお本報告では問題の表現方法としてつぎのような形をとる．問題の表現に必要なデータを表わす入力（以下Ｉと表わす）とそのデータが特性（以下Ｐと表わす）を有するかどうか，つまり(Ｐ)を満足するような(Ｉ)が存在するか否かが問題である．まず Cook の定理のきっかけとなった充足可能性問題を定義しよう．

充足可能性問題(Satisfiability Problem, SAT)

(Ｉ)項 $C_1, C_2, \cdots, C_p$ (各項は論理変数の和である)

(Ｐ)項の和積標準形が充足可能である．つまり以下の(a),(b)を満足するような論理変数の部分集合 $S \subseteq \{x_1, x_2,$

$\cdots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\}$ が存在する．

(a) S は論理変数の補完対を含まない．

(b) すべての $k, 1 \leqq k \leqq p$ に対して $S \cap C_k \neq \phi$.

1971年の Cook の定理([3]参照)はつぎのとおりである．

定理：$\mathcal{NP}$ に属するすべての問題は SAT に変換可能である．

上の定理を用いると $\mathcal{NP}$-完全性の定義はつぎのようにもなされることがわかる．つまり問題 P が (i) P $\in \mathcal{NP}$, (ii) SAT$\propto$P を満たせば P は $\mathcal{NP}$-完全である．以上から P が $\mathcal{NP}$-完全であれば，Cook の定理から P$\propto$SAT であるので，P $\in \mathcal{P}$ は SAT $\in \mathcal{P}$ と等価であることがわかる（これはまずあり得ないであろうが）．

定理：すべての $\mathcal{NP}$-完全な問題は，すべて $\mathcal{P}$ に属するか，全然属さないかのいずれかである．前者の場合は $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$ となる．

以上で $\mathcal{NP}$, $\mathcal{NP}$-完全，問題の変換可能性などの説明をほぼ終ることにして，以下では“どのような問題が $\mathcal{NP}$-完全か”について組合せ問題をそれぞれ整数，グラフ，ネットワーク，スケジューリングに関するものと分類して述べてみよう．各問題についてそれが $\mathcal{NP}$-完全であることを示すには前述の (i), (ii) が満たされることを示す必要があるが，いずれの場合にも (i) はほぼ明らかである（つまり多項式的に有界な深さを有する探索木においてバックトラック探索法で解くことができる）ので，ここでは (ii) のみに関して簡単な説明を加えることにする．

2. 整数と $\mathcal{NP}$-完全性

この章では整数論的な問題あるいは整数を扱った問題の $\mathcal{NP}$-完全性について述べる．

3-充足可能性問題 (3-Satisfiability Problem, 3-SAT)

(I)項 $D_1, D_2, \cdots, D_r$（各項は最大3個の論理変数の和）

(P)与えられた項の和積標準形が充足可能である．

この問題の $\mathcal{NP}$-完全性は SAT$\propto$3-SAT を示すことによって得られる．この変換は，$m>3$ に対して $\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_m$ なる項を新変数 $y_1, y_2, \cdots, y_{m-3}$ を加え，$(\sigma_1+\sigma_2+y_1)\cdot(\sigma_3+\bar{y}_1+y_2)\cdot(\sigma_4+\bar{y}_2+y_3)\cdot\cdots\cdots(\sigma_{m-2}+\bar{y}_{m-4}+y_{m-3})\cdot(\sigma_{m-1}+\sigma_m+\bar{y}_{m-3})$ なる形に表現できることから可能となる．つまり $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ のうちの少なくとも1個が1である場合，すなわち $\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_m$ が1になる場合に限って上の和積形が1になることがわかる．([1]，[9]参照)

0-1 整数計画問題 (0-1 Integer Programming Problem, 0-1 IP)

(I)整数行列 C と整数ベクトル d.

(P)$Cx=d$ を満たす 0-1 ベクトル x が存在する．

0-1 IP の $\mathcal{NP}$-完全性は SAT$\propto$0-1 IP から得られるが，この変換は論理変数を $x_j, 1 \leqq j \leqq n$, 項を $C_i, 1 \leqq i \leqq p$ とした場合に，整数行列 $C=(c_{ij})$, 整数ベクトル $d=(d_i)$を，

$$c_{ij}=\begin{cases} +1 & x_j \in C_i \text{ の時} \\ -1 & \bar{x}_j \in C_i \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots,p \\ j=1,2,\cdots,n \end{pmatrix}$$

$$d_i = 1-\{\text{項 } C_i \text{ の中の補完変数}(\bar{x}_i \text{ の形})\text{の数}\}$$

のように定義することによって可能である([9]参照)．

厳密被覆問題 (Exact Cover Problem, ECP)

(I)集合 $S=\{u_i, 1 \leqq i \leqq t\}$ の部分集合族 $\{S_j\}$.

(P)集合 $\{T_h\}$ が相反で $\cup T_h = \cup S_j = \{u_i, 1 \leqq i \leqq t\}$ を満足するような部分集合族 $\{T_h\} \subseteq \{S_j\}$ が存在する．

ECP の $\mathcal{NP}$-完全性は彩色数問題（3章に定義）$\propto$ECP から得られる．変換はグラフ $G=(N, A)$に対して$S=N \cup \{(e, i) \mid e \in A, 1 \leqq i \leqq k\}$ とし，さらには各 $v \in N, 1 \leqq i \leqq k$ に対して，

$$S_{v_i}=\{v\} \cup \{(e,i) \mid e \text{ は頂点 } v \text{ に連結}\}$$

および各 $e \in A, 1 \leqq i \leqq k$ に対して，

$$T_{e_i}=\{(e,i)\}$$

とすることによって可能である([1]参照)．

接触集合問題 (Hitting Set Problem, HSP)

(I)集合 $\{s_j, 1 \leqq j \leqq r\}$ の部分集合族 $\{U_i\}$.

(P)各 i に対して $|W \cap U_i|=1$ を満たす集合 W が存在する．

3次元マッチング問題 (3-Dimensional Matching Problem, 3-MTC)

(I)有限集合 T, $U \subseteq T \times T \times T$ なる集合 U

(P)$|W|=|T|$かつ W のどの2つの要素もすべての座標軸で異なるような集合 $W \subseteq U$ が存在する．

まず HSP の $\mathcal{NP}$-完全性は ECP$\propto$HSP から得られる．集合 $U_i, 1 \leqq i \leqq t$, 要素 $s_j, 1 \leqq j \leqq |\{S_j\}|$（部分集合 $\{S_j\}$ の数），を $u_i \in S_j$ の場合に限って $s_j \in U_i$ とすれば両者の等価性は明らかであろう([9]参照)．3-MTC の $\mathcal{NP}$-完全性は ECP からの変換によって得られる（詳細は[9]を参照されたい）．各 j に対して$|S_j| \geqq 2$ とする．$T=\{(i,j) \mid u_i \in S_j\}$ とし，$\{u_i\}$ から T への 1-1 写像を α, T から T への順列を π とし，π は各 j に対して$\{(i,j) \mid u_i \in S_j\}$ が π のサイクルになるとする．この時 $U=\{(\alpha(u_i), (i,j), (i,j)) \mid (i,j) \in T\} \cup \{(\beta, \sigma, \pi(\sigma)) \mid \text{すべての } i \text{ に対して } \beta \neq \alpha(u_i)\}$ とすれば ECP と上の 3-MTC の等価性が証明される．

ナップサック問題(Knapsack Problem, KP)

(Ⅰ)$(a_1, a_2, \cdots, a_n, b) \in Z^{n+1}$.

(P)$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$ を満足する 0-1 解が存在する.

数値分割問題(Numerical Partition Problem, NPP)

(Ⅰ)$(c_1, c_2, \cdots, c_s) \in Z^s$

(P)$\sum_{h \in I} c_h = \sum_{h \notin I} c_h$ を満たす集合 $I \subseteq \{1, 2, \cdots, s\}$ が存在する.

上の2つの問題の $\mathcal{NP}$-完全性は各々ECP∝KP, KP∝NPP から得られるが, これらの変換はいずれも容易である.

前者は, $d = |\{S_j\}| + 1$, $n = |\{S_j\}|$, $\sigma_{ji} = \begin{cases} 1, & u_i \in S_j \\ 0, & u_i \notin S_j \end{cases}$

$$x_j = \sum_i \sigma_{ji} d^{i-1}, \quad b = (d^t - 1)/(d-1)$$

または後者は $s = n+2, c_i = a_i, i = 1, 2, \cdots, n$

$$c_{n+1} = b+1, \quad c_{n+2} = \sum_{i=1}^{n} a_i + 1 - b$$

によって可能である([1], [9] 参照).

集合パッキング問題(Set Packing Problem, SPP)

(Ⅰ)集合族 $\{S_j\}$, 正の整数 l.

(P)$\{S_j\}$ は l 個の相反する集合を含む.

集合被覆問題(Set Covering Problem, SCP)

(Ⅰ)有限の集合族 $\{S_j\}$, 正の整数 k.

(P)$\cup T_h = \cup S_j$ を満たすような k 個以下の集合を含む部分族 $\{T_h\} \subseteq \{S_h\}$ が存在する.

まず最初に SPP の $\mathcal{NP}$-完全性はクリーク問題(3章に定義)から与えられたグラフ $G=(N, A)$ に対して,

$$n = |N|, N = \{1, 2, \cdots, n\}, l = k, S_i = \{(i, j) \mid (i, j) \notin A\}$$

なる変換を行なうことによって可能である([1], [9] 参照).

つぎに SCP の $\mathcal{NP}$-完全性は, 頂点被覆問題(3章に定義)をグラフ $G' = (N', A')$ から $N' = \{1, 2, \cdots, n'\}$ および G' の弧を要素として S_j を頂点 j に隣接した弧の集合とし, $k=l$ と置くことによって SCP との等価性が示される.

行商人問題(Travelling Salesman Problem, TSP)

(Ⅰ)弧(i, j)に長さ c_{ij} を有する n 頂点完全有向グラフ.

(P)長さが y 以下のハミルトニアン閉路が存在する.

TSP の $\mathcal{NP}$-完全性は有向ハミルトン閉路問題(3章に定義)をグラフ $G=(V, E)$ から $n=|V|$, $c_{ij}=0$, $(i, j) \in E$ の時; $c_{ij}=1$, $(i, j) \notin E$ の時; $y=0$ を用いて変換することによって容易に証明できる([1], [9] 参照).

スタイナー木問題(Steiner Tree Problem, STP)

(Ⅰ)グラフ $G=(N, A)$, $R \subseteq N$, 重み関数 $w: A \to Z$, 正整数 k.

(P)G は頂点集合 R を含む重さ k 以下の部分木を有する.

最大カット問題(Maximum Cut Problem, MCP)

(Ⅰ)グラフ $G=(N, A)$, 写像 $w: A \to Z$, 正整数 W.

(P) $\sum_{(u,v) \in A, u \in S, v \notin S} w((u, v)) \geqq W$ を満たす集合 $S \subseteq N$ が存在する. STP の $\mathcal{NP}$-完全性は, ECP を $N = \{n_0\} \cup \{S_j\} \cup \{u_i\}$, $R = \{n_0\} \cup \{u_i\}$, $A = \{(n_0, S_j)\} \cup \{(S_j, u_i) \mid u_i \in S_j\}$ を用いて,

$$w((n_0, S_j)) = |S_j|, w((S_j, u_i)) = 0, \quad k = |\{u_i\}|$$

と変換することによって得られる([9] 参照). また MCP の $\mathcal{NP}$-完全性は, NPP を $N = \{1, 2, \cdots, s\}$, $A = \{(i, j) \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$, $w((i, j)) = c_i c_j$, $W = \frac{1}{4}(\sum c_i)^2$ を用いて変換することによって示すことができる([9] 参照).

時間割問題(Timetable Problem, TP)

(Ⅰ)有限集合 H, 集合族 $\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$, $T_i \subseteq H$, $1 \leqq i \leqq n$, および $\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$, $C_j \subseteq H$, $1 \leqq j \leqq m$, 非負整数を要素とする $n \times m$ 行列 $R = (R_{ij})$.

(P)以下の性質を満たす関数 $f(i, j, h): \{1, 2, \cdots, n\} \times \{1, 2, \cdots, m\} \times H \to \{0, 1\}$ が存在する.

$f(i, j, h) = 1$ ならば $h \in T_i \cap C_j$, すべての $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq m$ に対して $\sum_{h \in H} f(i, j, h) = R_{ij}$, すべての $1 \leqq i \leqq n$, $h \in H$ に対して $\sum_{j=1}^{m} f(i, j, h) \leqq 1$, すべての $1 \leqq j \leqq m$, $h \in H$ に対して $\sum_{i=1}^{n} f(i, j, h) \leqq 1$.

特殊時間割問題(Restricted Timetable Problem, RTP)

上の TP の (Ⅰ) に(1)$|H|=3$, (2)$C_j = H$, $1 \leqq j \leqq m$, (3)$|T_i| = \sum_{j=1}^{m} R_{ij} = 2$ or 3, $1 \leqq i \leqq n$, (4)$R_{ij} = 0$ or 1, $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq m$ の4条件を加えたものである. RTP が $\mathcal{NP}$-完全であることは 3-SAT∝RTPを示すことによって得られる([5] 参照). したがって一般の TP が $\mathcal{NP}$-完全であることが分かる.

以下にいくつかの $\mathcal{NP}$-完全な問題を掲げよう. これらの変換に関する詳細は, 各参考文献を参照されたい.

単純最大カット問題(Simple Maximum Cut Problem, SMCP)

(Ⅰ)グラフ G と正整数 k.

(P)G の頂点が2つの部分集合 S_1, S_2 にそれらの間の弧の数が k 本以上になるように分割できる.([7] 参照)

最適線形配置問題(Optimal Linear Arrangement Problem, OLAP)

(Ⅰ)頂点集合 N なるグラフ G と正整数 k.

(P)1-1写像 $\Pi: N \to Z$ で各弧(u, v) に対して $|\Pi(u) - \Pi(v)|$ の和が k 以下になるものが存在する.([7] 参照)

3つ組への分割問題(Partition into Triplet Problem, PITP)

(Ⅰ)正整数の集合 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ と正整数 B, D.

(P)添字集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ が $p \leqq D$ なる p 個の部分集合 $\{S_j\}$ に分割され, $1 \leqq j \leqq p$ なる各 j に対して $|S_j| \leqq 3$

および $\sum_{i \in S_j} A_i \leqq B$ が満足される．（[6] 参照）

連続集合問題(Consecutive Sets Problem, CSP)

(I)集合 Σ とその有限部分集合族 $\{S_1, \cdots, S_n\}$ と正整数 D.

(P) Σ の要素の列 x で，$|x|=D$ で各 i に対して S_i の要素が x 中に連続列として現われるものが存在する．([11] 参照)

一般化部分ラテン方格拡張問題 (Generalized Partial Latin Square Completion Problem, GPLSC)

(I)各行のいくつかの要素が $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ なる集合の部分集合に属する整数を割り当てられているような大きさ n の行の集合 $\{L_i, 1 \leqq i \leqq M\}$.

(P)次数 n のラテン方格のうち行 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ が行 $L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_m}$ と各々一致し，これらの行 $L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_m}$ の割り当てられた整数の数の合計が k であるようなものが存在する．([13] 参照)

3. グラフと $\mathcal{NP}$-完全性

この章ではグラフに関する組合せ的な問題のうち $\mathcal{NP}$-完全なることが証明されているものを紹介しよう．

彩色数問題(Chromatic Number Problem, CNP)

(I)グラフ $G=(N, A)$ と正整数 k.

(P)任意の隣接している 2 頂点 $u, v \in N$ に対して $\phi(u) \neq \phi(v)$ なる関数 $\phi: N \to Z_k$ が存在する．

CNP の $\mathcal{NP}$-完全性は 3-SAT$\propto$CNP から得られる．この変換に伴うグラフは $N=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\} \cup \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \cup \{D_1, D_2, \cdots, D_r\}$ および $A=\{(x_i, \bar{x}_i) | 1 \leqq i \leqq n\} \cup \{v_i, v_j) | i \neq j\} \cup \{v_i, x_j) | i \neq j\} \cup \{v_i, \bar{x}_j) | i \neq j\} \cup \{(x_i, D_f) | x_i \notin D_f\} \cup \{\bar{x}_i, D_f) | \bar{x}_i \notin D_f\}$, $k=n+1$ となる．

クリーク問題(Clique Problem, CP)

(I)グラフ $G=(N, A)$ と正整数 k.

(P) G は k 個の相互に隣接した頂点の集合を有する．

頂点被覆問題(Vertex Covering Problem, VCP)

(I)グラフ $G'=(N', A')$ と正整数 l.

(P) $|R| \leqq l$ ですべての弧が R のいずれかの頂点に接続しているような部分集合 $R \subseteq N'$ が存在する．

上の 2 つの問題の $\mathcal{NP}$-完全性は各々SAT$\propto$CP, CP$\propto$VCP から得られるが，前者は $N=\{(\sigma, i) | \sigma \in C_i$, σ は論理変数$\}$, $A=\{((\sigma, i), (\delta, j)) | i \neq j$ で $\sigma \neq \delta\}$, $k=p$ なる変換によってこれらの等価性が明らかとなる．また後者は G' を G の補グラフとし $l=|N|-k$ とすれば，S が G においてクリークであれば $N \backslash S$ が G の補グラフにおいて頂点被覆であることから等価性が得られる．

フィードバック頂点集合問題 (Feedback Node Set Problem, FNSP)

(I)有向グラフ $H=(V, E)$ と正整数 k.

(P) H のすべての有向閉路が $R \subseteq V$ 中の頂点を含みかつ $|R|=k$ なる集合 $R \subseteq V$ が存在する．

フィードバック弧集合問題 (Feedback Arc Set Problem, FASP)

(I)有向グラフ $H=(V, E)$ と正整数 k.

(P) H のすべての有向閉路が $S \subseteq A$ 中の弧を含みかつ $|S|=k$ なる集合 $S \subseteq A$ が存在する．

これらの問題の $\mathcal{NP}$-完全性はいずれも VCP からの変換によって示される．FNSP においては $V=N'$, $E=\{(u, v) | (u, v) \in A'\}$, $k=l$, また FASP においては $V=N' \times \{0, 1\}$, $E=\{(\langle u, 0\rangle, \langle u, 1\rangle) | u \in N'\} \cup \{(\langle u, 1\rangle, \langle v, 0\rangle) | (u, v) \in A'\}$, $k=l$ なる変換によって等価性が証明される([1] 参照)．

有向ハミルトン閉路問題 (Directed Hamilton Circuit Problem, DHCP)

(I)有向グラフ $H=(V, E)$.

(P)各頂点を一度ずつ含む有向閉路が存在する．

ハミルトン閉路問題 (Undirected Hamilton Circuit Problem, UHCP)

(I)グラフ $G=(V, E)$.

(P)各頂点を一度ずつ含む閉路が存在する．

DHCP の $\mathcal{NP}$-完全性は VCP からの変換によって得られるが，詳細は [1] 等を参照されたい．また UHCP に関しては DHCP から $N=V \times \{0, 1, 2\}$, $A=\{(\langle u, 0\rangle, \langle u, 1\rangle), (\langle u, 1\rangle, \langle u, 2\rangle) | u \in V\} \cup \{(\langle u, 2\rangle, \langle v, 0\rangle) | (u, v) \in E\}$ なる変換が用いられる．

有向ハミルトン径路問題 (Directed Hamilton Path Problem, DHPP)

(I)有向グラフ $H'=(V', E')$.

(P)各頂点を一度ずつ通る有向径路が存在する．

DHPP の $\mathcal{NP}$-完全性はDHCP$\propto$DHPP を示すことによって得られるが，その変換は $V'=V \cup \{v_0'\}$, $v_0' \notin V$, $E'=\{(v, w) | (v, w) \in E, w \neq v_0\} \cup \{v, v_0') | (v, v_0) \in E\}$, $v_0 \in V$ によって与えられる．

クリーク被覆問題(Clique Cover Problem, CCP)

(I)グラフ G' と正整数 l.

(P) G' は l 個あるいはそれ以下のクリークの和である．

CCP の $\mathcal{NP}$-完全性は CNP$\propto$CCP から得られる．つまりグラフ G と彩色数 k が与えられた時にグラフ G' を G の補グラフとし $l=k$ と置くと等価性が容易に証明される．

以下のような問題も $\mathcal{NP}$-完全性が証明されている．

Planar Degree Constrained 3-Coloring Problem (PD 3 C)
(I)各頂点が次数4以下の平面グラフ.
(P)グラフが3彩色である.([7]参照)
Degree Constrained Node Cover Problem (DNCP)
(I)最大頂点次数が3であるグラフ G と正整数 k.
(P) G は k 個の頂点の集合 S を有し, S に含まれない頂点はすべて S に含まれる頂点と連結している.([7]参照)
3次ハミルトン閉路問題 (Cubic Hamilton Circuit Problem, CHCP)
(I)3次グラフ G.
(P) G はハミルトン閉路を有する.([7]参照)
Degree Constrained Directed Planar Hamilton Path Problem (DDPHP)
(I)各頂点が4以下の外次数と3以下の内次数を有するような平面有向グラフ G.
(P) G はハミルトン径路を有する.([7]参照)
グラフ分割問題(Graph Partition Problem, GPP)
(I) $2p$ 個の頂点から成るグラフと正整数 k.
(P) G の頂点は2つの p 個の頂点集合 S_1, S_2 に分割され, それらの間の弧の数は k 以下である.([7]参照)
グラフの三角形分割問題 (Partition into Triangles Problem, PITP)
(I) $3n$ 個の頂点をもつグラフ G.
(P) G の頂点集合は n 個の3角形で被覆できる.([7])

4. ネットワークと $\mathcal{NP}$-完全性

ここでは無向あるいは有向ネットワークのフロー問題の $\mathcal{NP}$-完全性について述べる.
離散的多品種フロー問題 (Discrete Multicommodity Flow Problem, DMFP)
(I)無向ネットワーク G, 相互に共有しないソース, シンクの組 $(s_1,t_1),(s_2,t_2),\cdots\cdots,(s_k,t_k)$ の集合.
(P) s_i と t_i を連結する k 個の相交わらない径路が存在する.
有向ネットワークの2品種整数値フロー問題 (D 2 CIF)
(I)有向有限ネットワーク $G=(V,E)$, 容量関数 $c:E\to N$(非負整数の集合), ソース s_1,s_2 とシンク t_1,t_2, 正整数 k.
(P)すべての $e_{uv}\in E$ に対して $f_1(e_{uv})+f_2(e_{uv})\leqq c(e_{uv})$ であるような $E\to N$ なるフロー値 k の関数 f_1, f_2 が存在する.
無向ネットワークの2品種整数値フロー問題 (U 2 CIF)
(I)無向有限ネットワーク $G=(V, E)$, 容量関数 $C:E\to N$(非負整数の集合), ソース s_1,s_2 とシンク t_1,t_2, 正整数 k.
(P)すべての $e_{uv}\in E$ に対して $|f_1(e_{uv})|+|f_2(e_{uv})|\leqq c(e_{uv})$ であるような $E\to N$ なるフロー値 k の関数 f_1, f_2 が存在する. すべての弧の容量が1に等しいようなネットワークフロー問題は**単純(simple)**であるとよばれる.
DMFP および単純 D 2 CIF の $\mathcal{NP}$-完全性は SAT からの変換によって得られる(詳細は[5],[10]参照). また単純 U 2 CIF の $\mathcal{NP}$-完全性は単純 D 2 CIF を変換することによって得られる. 以上から任意の容量関数を有する2品種整数値フロー問題は有向, 無向のネットワークに対して $\mathcal{NP}$-完全であることがわかる. したがって2品種以上の多品種整数値フロー問題の $\mathcal{NP}$-完全性も得られたことになる.

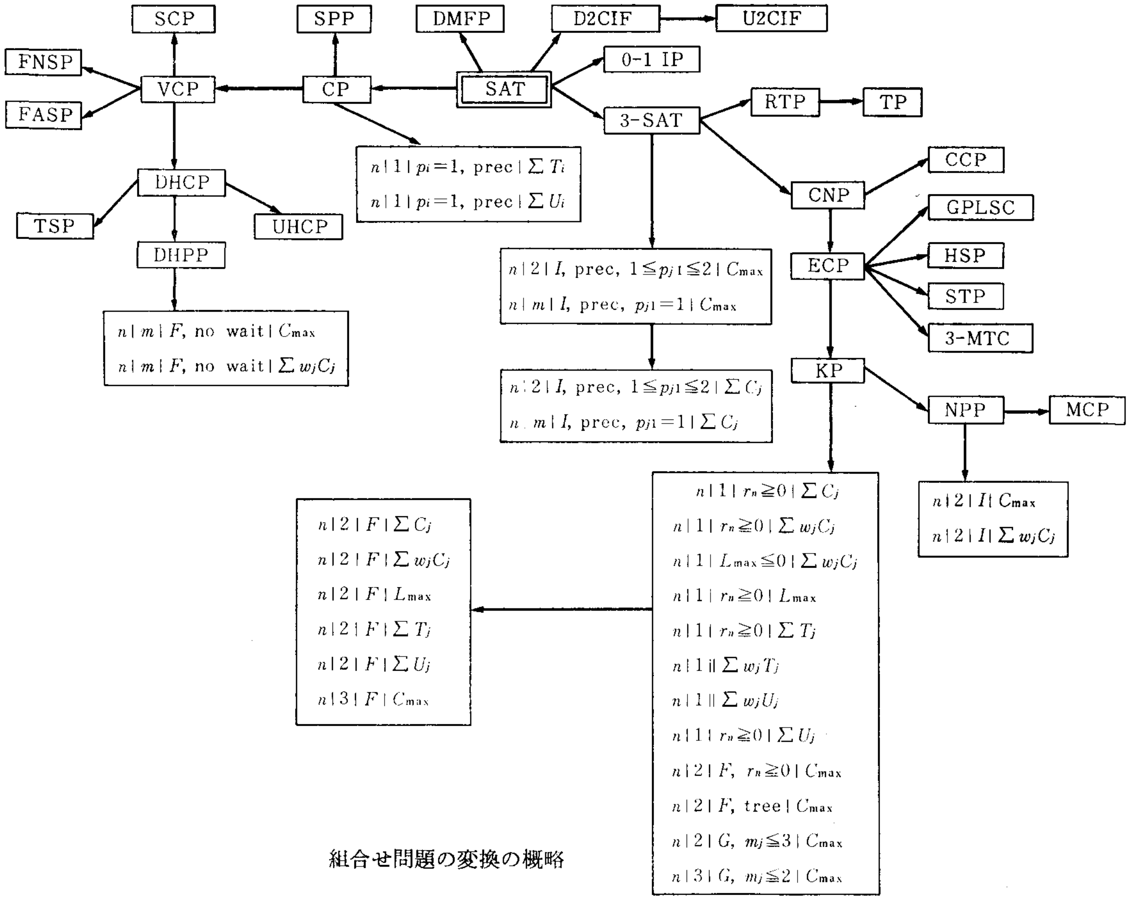
5. スケジューリング問題と $\mathcal{NP}$-完全性

いま**仕事(job)**の集合を $J_j, 1\leqq j\leqq n$, とし, その各々の仕事はいくつかの手順(operation)から成り, 各手順は各々の**機械(machine)** $M_i, 1\leqq i\leqq m$ に対応づけられているとする. 各機械が同時に2つ以上の仕事はできないとした場合, 各機械でどのように仕事を処理するのがある評価基準のもとで最適であるかを求めるのが**スケジューリング問題**である. 各仕事 J_j に対して以下のような前提と表記方法を用いることにする.

m_j : J_j を構成する手順数
μ_j : J_j において使用される機械の順序を示すベクトル
p_{jr} : J_j の r 番目の手順の処理時間
r_j : J_j が開始可能になる時刻
d_j : J_j が終了しなければならない時刻
B_j : J_j の開始時刻, C_j : J_j の終了時刻
遅れ : $L_j=C_j-d_j$, 遅延 : $T_j=\max\{0, L_j\}$
遅延指標 : $u_j=0$, if $C_j\leqq d_j$, 重み : w_j
$u_j=1$, otherwise,

スケジューリング問題を $n|m|l,\lambda|k$ (n : 仕事の数, m : 機械の数, l : 問題の種類, λ : 評価基準, λ : 追加制約)なる表記方法を用いて示すことにする. いま上の l,k については以下のような分類を用いる.

$l=F$: フローショップ問題, 各仕事 J_j に対して $m_j=m$, $\mu_j=(M_1,M_2,\cdots,M_m)$.
$l=P$: 置換ショップ問題, フローショップ問題のうち各機械が仕事を同順序で処理するもの.
$l=G$: (一般)ジョブショップ問題, m_j, μ_j が各仕事 J_j に対して異なるもの.
$l=I$: 並列ショップ問題, 各仕事が m 台の同種の機械のいずれかで処理され, μ_j は定義されないもの.



組合せ問題の変換の概略

$k=C_{\max}=\max\limits_{1\leqq j\leqq n} C_j$, $\quad k=\sum w_jC_j=\sum_{j=1}^n w_jC_j$

$k=L_{\max}=\max\limits_{1\leqq j\leqq n} L_j$, $\quad k=\sum w_jT_j=\sum_{j=1}^n w_jT_j$

$k=\sum w_jU_j=\sum_{j=1}^n w_jU_j$

また追加制約としてはつぎのようなものがある．

$r_j\geqq 0$：仕事によって r_j が任意の値をとる．

$r_n\geqq 0$：1つの仕事たとえば J_n に対してのみ r_n が非負．

$L_{\max}\leqq 0$：$C_j\leqq d_j$, $1\leqq j\leqq n$, この時 $k\in\{C_{\max}, \sum w_jC_j\}$.

prec.：仕事の間に前後関係がある．

tree：仕事の前後関係を表わすグラフが枝として与えられる．グラフの各頂点の枝の入次数あるいは出次数が最大1であるような有向木の集合である．

no wait：開始時間と完了時間の間に待ち時間のないもの．

$m_j\leqq m_*$：仕事を構成する手順の数が上限値を有する．

$1\leqq p_{jr}\leqq p_*$：各仕事の処理時間が上，下限値を有する．

$w_j=1$：重みがすべて1である．

以上のような表記方法を用いるとつぎのようなスケジューリング問題の $\mathcal{NP}$-完全性がNPPを変換することによって得られる([12]，[14] 参照)．

(1). $n|2|I|C_{\max}$, $\quad$ (2). $n|2|I|\sum w_jC_j$

いま(1)のNPP$\propto n|2|I|C_{\max}$の変換は，$n=s, p_{j1}=c_j$, $1\leqq j\leqq s, y=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j$ によって容易に等価性が証明される．

またKPからの変換によって以下のような問題の$\mathcal{NP}$-完全性も証明することができる([12]，[14]，[15]参照)．

(3). $n|1|r_n\geqq 0, w_j=1|\sum w_jT_j$, $n|1||\sum w_jT_j$

(4). $n|1|r_n\geqq 0, w_j=1|\sum w_jC_j$, $n|1|r_n\geqq 0|\sum w_jC_j$
$n|1|L_{\max}\leqq 0|\sum w_jC_j$, $\quad$ (5). $n|1|r_n\geqq 0|L_{\max}$

(6). $n|1|\sum w_jU_j$, $n|1|r_n\geqq 0, w_j=1|\sum w_jU_j$

(7). $n|2|F, r_n\geqq 0|C_{\max}$, $n|2|F$, tree$|C_{\max}$,
$n|2|G, m_j\leqq 3|C_{\max}$

(8). $n|3|G, m_j\leqq 2|C_{\max}$

(3)に関してのみKPからの変換 KP$\propto n|1|r_n\geqq 0, w_j=1|\sum w_jT_j$ の概略を示そう．いま前述のKPの a_j の個数を t と表わすと，$n=t+1, r_j=0$, $p_j=a_j, d_j=\sum_{j=1}^t a_j+1, r_n=b, p_n=1, d_n=b+1, y=0$ なる変換によってこれらの問題の等価性が容易に証明される．以下に掲げるスケジューリング問題のうち(9)は DHPP, (10) は CP, (11)は3-SATからの変換によって$\mathcal{NP}$-完全性が証明される．

(9). $n|m|F$, no wait$|C_{\max}$, $n|m|F$, no wait, $w_j=1|\sum w_j C_j$

(10). $n|1|p_j=1$, prec. $|\sum T_i$, $n|1|p_i=1$, prec. $|\sum U_i$

(11). $n|2|I$, prec., $1\leqq p_{j1}\leqq 2|C_{\max}$, $n|m|I$, prec., $p_{j1}=1|\sum C_{\max}$

また上に掲げた (1)～(11) のようなスケジューリング問題の $\mathcal{NP}$-完全性を用いると，より一般的な形の問題の $\mathcal{NP}$-完全性も容易に証明することができる．以下のような変換が容易に得られるが，ここでは結果のみを掲げるので証明等の詳細は [14] 等を参照されたい．

$n|1|r_n\geqq 0, w_j=1|\sum w_j C_j \propto n|2|F, w_j=1|\sum w_j C_j$

$n|1|r_n\geqq 0|\sum w_j C_j \propto n|2|F|\sum w_j C_j$

$n|1|r_n\geqq 0|L_{\max} \propto n|2|F|L_{\max}$

$n|1|r_n\geqq 0, w_j=1|\sum w_j T_j \propto n|2|F, w_j=1|\sum w_j T_j$

$n|1|r_n\geqq 0, w_j=1|\sum w_j U_j \propto n|2|F, w_j=1|\sum w_j U_j$

$n|2|F, r_n\geqq 0|C_{\max} \propto n|3|F|C_{\max}$

$n|2|I$, prec., $1\leqq p_{j1}\leqq 2|C_{\max} \propto n|2|I$, prec., $1\leqq p_{j1}\leqq 2, w_j=1|\sum w_j C_j$

$n|m|I$, prec., $p_{j1}=1|C_{\max} \propto n|m|I$, prec., $p_{j1}=1, w_j=1|\sum w_j C_j$

$n|2|F, r_n\geqq 0|C_{\max} \propto n|3|F|C_{\max}$

組合せ問題とよばれるもののうち現在までに $\mathcal{NP}$-完全性の証明されたもの(すべてではないが)を分類して紹介してきた．最後にこれらの相関関係を表わす変換の概略を模式化したものを掲げておく．これからもつぎつぎといろいろな種類の問題の $\mathcal{NP}$-完全性が証明されていくであろうが，$\mathcal{NP}$-完全なる問題に“多項式的に有界なアルゴリズム”が存在しないということが未だ証明されていない現在でもこれらの $\mathcal{NP}$-完全なる問題が“同程度に”解くのがむずかしい問題であることを示す目安には十分なりうるものである．この分野に興味を有される諸氏にとってこのような報告がなんらかの役に立てれば幸いであることを最後につけ加えておこう．

参考文献

[1] Aho A, V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D.; *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, 1974.

[2] Baker, K. R.; *Introduction to Sequencing and Scheduling*, John Wiley & Sons, Inc., 1974.

[3] Cook, S. A.; The Complexity of Theorem-Proving Procedures, *Proc. of the Third ACM Symposium on Theory of Computing*, 1971, pp. 151-158,

[4] Edmonds, J.; Paths, Trees and Flowers, *Canad. J. Math.*, **17**, 1965, pp. 449-467.

[5] Even, S., Itai, A. and Shamir, A.; On the Complexity of Timetable and Multicommodity Flow Problems, *SIAM J. Comput.*, vol. 5, No. 4, Dec. 1976.

[6] Garey, M. R. and Johnson, D. S.; Complexity Results for Multiprocessor Scheduling under Resource Constraints, Bell Telephone Laboratory, 1974.

[7] Garey, M. R., Johnson, D. S. and Stockmeyer, L.; Some Simplified $\mathcal{NP}$-complete Problems, *Proc. of the Sixth ACM Symposium on Theory of Computing*, 1974, pp. 47-63.

[8] Itai, A.; Multicommodity Flow, Ph. D dissertation, submitted to the Fienberg Graduate School of Weizman Institute of Science, Rehovot, Israel, 1975.

[9] Karp, R. M.; Reducibility among Combinatorial Problems, *Complexity of Computer Computations* (Edited by R. E. Miller, J. W. Thatcher and J. D. Bohlinger), Plenum Press, 1972, pp. 85-103.

[10] Karp, R. M.; On the Computational Complexity of Combinatorial Problems, *Network* **5**, 1975, pp. 45-68.

[11] Kou, L.; Polynomial Complete Consecutive Information Retrieval Problems, to appear in *SIAM J. Comput.*

[12] Lenstra, J. K., Rinnooy Kan, A. H. G. and Brucker, P.; Complexity of Machine Scheduling Problems, *Annals of Discrete Mathematics* (Edited by P. L. Hammer et al.) **1**, North Holland, 1977.

[13] Oyama, T.; On the Completion of Partial Latin Squares, Technical Report No. 326, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, N. Y., 1977.

[14] Rinnooy Kan; Machine Scheduling Problems: Classification, Complexity and Computations, Ph. D dissertation, H. E. Stenfert Kroesse B. V., Leiden, 1976.

[15] Ullman, J. D.; Complexity of Sequencing Problems, Technical Report No. 161, October 1974. Department of Electrical Engineering, Computer Science Laboratory, Princeton University.

(おおやま・たつお　電力中研)