多人数による最適停止問題

蔵野正美・安田正実・中神潤一

1. はじめに

われわれは多次元確率過程の最適停止問題を考察し，単調論理ルールのもとでの均衡停止戦略を求める．たとえば，ある一家が千葉へ転勤になり，貸家の物件をつぎつぎと探している場合を考えてみよう．住居に対する希望は家族の各人それぞれ異なり，家の立地条件や環境から各自の価値，利得が対応する．家族の意見をうまくとりまとめ，なるべく皆が満足できるようにしたい．借りるかどうかを決定するルールとして，多数決，妻の独裁，子供たちだけの意見などが考えられる．これらのルールではどのような決定をしたらよいだろうか．

いま p 次元確率変数 $X_n=(X^1{}_n,\cdots,X^p{}_n)^T, n\geqq 1$ (T は転置を表わす)が p 人の集団(各人をプレイヤーとよぶ) によってつぎつぎに観測され，集団全体の決定のみがこの観測過程を停止できるとする．もし n 期で停止すると，プレイヤー $i\,(i=1,\cdots,p)$ は $Y^i{}_n\equiv X^i{}_n-nc^i$ の利得を受けとる．ただし $\boldsymbol{c}=(c^1,\cdots,c^p)$は1期間当りの観測費用である．プレイヤーたちは停止時の利得 $Y_n=(Y^1{}_n,\cdots,Y^p{}_n)^T$ の期待値を最大にしたいと思っている．各期でプレイヤーから表示される2種の意見――観測過程を停止または継続――を集約するには，集団の意志決定のルールが必要である．まず始めに，p 人中過半数が停止の意見のとき，観測過程を停止できる単純多数決が考えられる．また集団の決定におよぼす影響がプレイヤーの間で強弱のある不平等なルールや，とくに完全に決定を支配する独裁者がいる場合もある．さらに現在の社会で行なわれている代議員制や間接民主主義のように，集団（社会の構成メンバー）の意志決定が階層的な場合なども考えられる．

本稿では，集団の意志決定ルールとして論理関数にもとづき，多人数停止問題を非協力ゲームの均衡点の概念を導入して解析する．さらに，種々の決定ルールがどのような性質をもっているか，数値例によって考察してみよう．

2. 問題の定式化と結果

プレイヤー i が $X_n=(X^1{}_n,\cdots,X^p{}_n)^T$ の実現値を観測して，n 期で過程を停止するという意見を $\sigma^i{}_n=1$，継続するという意見を $\sigma^i{}_n=0$ で表わす．この系列 $\sigma^i=(\sigma^i{}_1,\sigma^i{}_2,\cdots)$ をプレイヤー i の個人停止戦略とよび，この集まり，行列 $\sigma=(\sigma^1,\sigma^2,\cdots,\sigma^p)^T$ を停止戦略という．集団の意志決定ルールを表わすために論理関数を使う．$\{0, 1\}$ 上の p 変数論理関数 $f:\{0,1\}^p\to\{0,1\}$ が単調とは，すべての i で $x^i\leqq y^i$ ならば $f(x^1,\cdots,x^p)\leqq f(y^1,\cdots,y^p)$が成り立つときをいう．論理関数$f$が単調で，$f(1,\cdots,1)=1$ であるとき，単調論理ルールとよぶ．これはつぎのような意志決定ルールを含む．

(1) 多数決のルール

p 人中 r 人以上 $(1\leqq r\leqq p)$ が停止の意見のと

き，観測過程を停止できるルールを $f[p,r]$ で表わす．すなわち，

$$f[p,r](x^1,\cdots,x^p)=\begin{cases}1, & \sum x^i \geqq r \text{ のとき}\\ 0, & \sum x^i<r \text{ のとき}\end{cases}$$

(ここで$\sum$はふつうの和)とくに，r が p の過半数ならば，単純多数決であり，$r=p$ ならば，全員一致のルールである．

(2) 不平等なルール

(2.1) (1)のルールの条件を非負定数 $w^1,\cdots,w^p$ で重みづけしたもの

$$f(x^1,\cdots,x^p)=\begin{cases}1 & \sum w^i x^i \geqq r \text{ のとき}\\ 0 & \sum w^i x^i<r \text{ のとき}\end{cases}$$

はプレイヤー間が強弱のある不平等なルールを表わせる．

(2.2) (2.1)を拡張するには，論理和＋，論理積・による単調論理関数 f を考えればよい．単調であることは否定を含まないから，直感的な停止戦略――あるレベル以上の実現値が観測されたら，停止――に結びつく．注意として，$f=x^i\cdot(\cdots)$ の形ならば，プレイヤー i が停止の意見をもたない限り観測過程は停止しない．つまり拒否権をもっている．また $f=x^i$ ならば，プレイヤー i が独裁者で他のプレイヤーは集団の決定に何らの影響をもたないアウトサイダーである．

(3) 階層的なルール

2つの単調論理関数の合成もまたそうである．これは階層的構造を表わすと考えられる．たとえば図1を見よ．

多数決ルールのみを考えるとき，つぎの記号を用いる．q 人ずつの小集団が p 個集まって pq 人の集団を構成している場合で，第1層の決定を $f[q,s]$ 第2層の決定を $f[p,r]$ としたとき $(1\leqq s\leqq q,\ 1\leqq r\leqq p)$，全体の意志決定を $f[p,r][q,s]$ と表わす．

つぎに停止戦略 $\sigma=(\sigma^1,\cdots,\sigma^p)^T$ と単調論理ルール f に対して，集団の停止時刻 $t_{f(\sigma)}\equiv t(\sigma)$ を，

$$t(\sigma)\equiv\min\{n\geqq 1; f(\sigma^1{}_n,\cdots,\sigma^p{}_n)=1\}$$

で定義する．はじめて $f(\sigma^1{}_n,\cdots,\sigma^p{}_n)=1$ を満たし

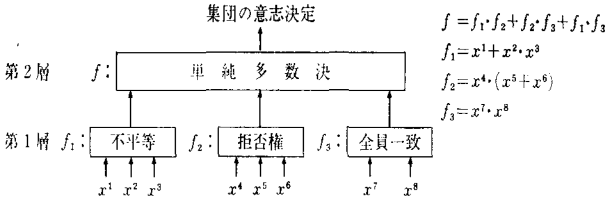


図1 8人の集団における個人意見の集約の例

たとき，観測過程を停止し，各プレイヤー i は $Y^i{}_{t(\sigma)}$ の利得を受けとる．

集団の合理的な停止戦略を求めるために非協力ゲームにおける均衡点[7]の概念を導入しよう．戦略 $^*\sigma=(^*\sigma^1,\cdots,{}^*\sigma^p)^T$ が均衡停止戦略であるとは各プレイヤー i の任意の個人戦略 σ^i に対して，$^*\sigma(i)=(^*\sigma^1,\cdots,\sigma^i,\cdots,{}^*\sigma^p)^T$ とすると，

$$\mathrm{E}[Y^i{}_{t(^*\sigma)}]\geqq \mathrm{E}[Y^i{}_{t(^*\sigma(i))}]$$

が成り立つときをいう．これはプレイヤー i のみが $^*\sigma^i$ と異なる個人戦略 σ^i をとっても，自分の期待利得を増加できないことを意味している．

簡単のために，$X_1, X_2,\cdots$ は独立で，X_n の各成分 $X^1{}_n,\cdots,X^p{}_n$ も独立と仮定して均衡停止戦略を求める．ただし，独立の仮定は本質的ではない．

有限期間問題の結果(N 期間で必ず停止)．

ベクトル列 $v_n=(v^1{}_n,\cdots,v^p{}_n)^T$ をつぎの再帰式；

$$\begin{cases} v^i{}_1=\mathrm{E}[X^i{}_N]-c^i\\ v^i{}_{n+1}=v^i{}_n-c^i+\beta_n{}^{(i)}\,\mathrm{E}(X^i{}_{N-n}-v^i{}_n)^+\\ \qquad -\alpha_n{}^{(i)}\,\mathrm{E}(X^i{}_{N-n}-v^i{}_n)^- \quad (n\geqq 1)\end{cases}$$

ただし $\beta_n{}^{(i)}\equiv P(f(^*\sigma^1{}_{N-n},\cdots,\overset{i}{1},\cdots,{}^*\sigma^p{}_{N-n})=1)$ $\alpha_n{}^{(i)}\equiv P(f(^*\sigma^1{}_{N-n},\cdots,\overset{i}{0},\cdots,{}^*\sigma^p{}_{N-n})=1)$，$^*\sigma^i{}_{N-n}\equiv I\{X^i{}_{N-n}\geqq v^i{}_n\}$ $(N>n\geqq 1)$，$^*\sigma^i{}_N\equiv 1$ (ここで$(\ )^+$，$(\ )^-$は，正，負の部分，I は indicator とする)で定義する．

定理　上で定めた $^*\sigma=(^*\sigma^1,\cdots,{}^*\sigma^p)^T$，$^*\sigma^i=(^*\sigma^i{}_1,\cdots,{}^*\sigma^i{}_N)$ が均衡戦略で，$\mathrm{E}[Y_{t(^*\sigma)}]=v_N$．また各プレイヤー i の停止の意見は自分の利得 $X^i{}_n$，$v^i{}_n$ にしか依存しない．

無限期間問題の結果．$v=(v^1,\cdots,v^p)^T$ についての方程式：$i=1,\cdots,p$ で

$$\beta^{(i)}\,\mathrm{E}(X^i-v^i)^+-\alpha^{(i)}\,\mathrm{E}(X^i-v^i)^-=c^i$$

ただし，$\beta^{(i)},\alpha^{(i)}$ は前と同様に $^*\sigma^i=I\{X^i\geqq v^i\}$

としたもので，v^i を除く $v^1, \cdots, v^p$ の関数．$\{X_n^i\}$ は iid で，X^i と同一分布に従うとする．

定理　上の方程式が解 $^*v$ をもつならば，各 n で $^*\sigma^i{}_n = I\{X^i{}_n \geqq {}^*v^i\}$ なる $^*\sigma$ が均衡戦略であり，$\mathrm{E}[Y_{t(^*\sigma)}] = {}^*v$ が成り立つ．

どんな単調論理ルールであっても，$c=0$ ならば，利得 $^*v$ は，

$$\mathrm{E}X^i \leqq {}^*v^i \leqq \sup\{a; P(X^i > a) = 1\}$$

であり，$\rho^{(i)} = \alpha^{(i)}/\beta^{(i)}$ とおけば，$0 \leqq \rho^{(i)} \leqq 1$ で，0に近いと $^*v^i$ は大きく，1に近いと $^*v^i$ は小さい．$\rho^{(i)}=0$ は拒否権をもつプレイヤーで X^i のとり得る最大の値 $\sup\{a; P(X^i>a)=1\}$ を期待利得にもつ．それに対して，$\rho^{(i)}=1$ はアウトサイダーで，平均 $\mathrm{E}X^i$ しかもつことができない．

3. 例

ここでは数値例で各種のルールの特徴を調べてみる．とくに断らない限り，確率変数 $X^1{}_n, \cdots, X^p{}_n$ は独立で同一の区間 (0, 1) 上の一様分布に従うとする．

3.1 多数決ルールと全員一致のルール

まず多数決ルール $f[p, r]$ を考える．図2は，$p=5$，$c=0$ の場合の期待利得を計算したものである．図のように，停止に必要な人数，多数決水準 r が少ない ($r=1$ や 2) と，各個人の利得は小さい．このことは少人数で停止が可能という“強制停止”の力が働き，彼らは小さい利得でもあきらめざるを得ない．r が大であれば ($r=4$ や 5)，この力は弱まり利得は大きくなる．とくに観測期間 n が長くなるにつれて，順次 $r=3, 4, 5$ と利得は大きくなる．このことは非協力ゲームでありながら，段々と協力的色彩をおびてくるからであろう．

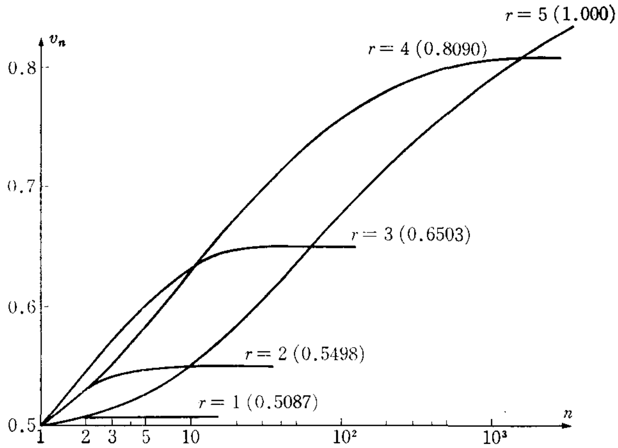


図 2　ルール $f[5, r]$ に対する期待利得 v_n と（　）はその極限値

本稿では，確率ベクトルの成分が独立な場合であったが，つぎにプレイヤー間に相関のあるときを調べてみよう．図3は $(X^1{}_n, X^2{}_n)$ が2次元正規分布 $N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}\right)$ に従う場合である．明らかに，$r=2$ のほうが $r=1$ より大きな利得をもつと予想される．また $r=1$ のとき，負の相関が高い場合 ($\rho=-0.7$) をみると，2人のプレイヤーの利害が対立していて，小さい値でもがまんして早く停止する“強制停止”の力がここでも働いている．

無限期間問題の場合，上記の $c=0$ では全員一致のルールが一番良い．では異なる $c \equiv c^1 = c^2$ の

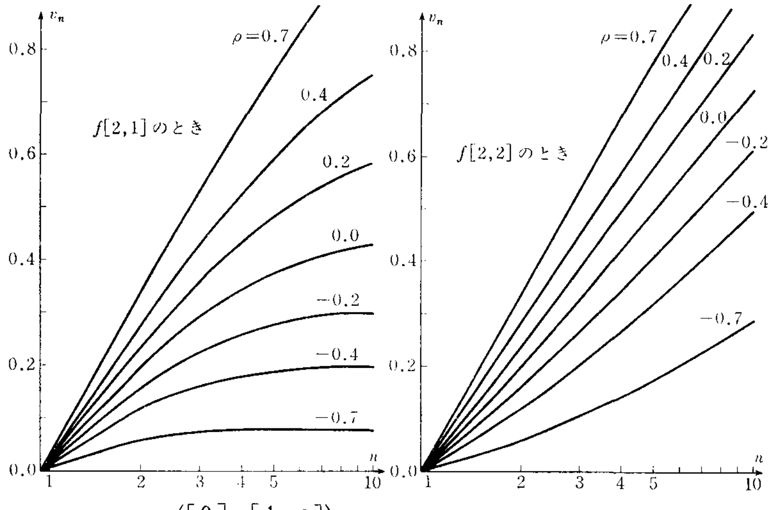


図 3　$N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}\right)$ のとき，$f[2, r]$ に対する期待利得

値に対しては，どの多数決水準が利得を最大にするだろうか．図4を見ると，cが0に近ければ，$r=p$の全員一致が最適多数決を与えていて，観測費用cが高くなるにつれてこの水準は低くなっていく．

3.2 不平等なルール

ここでは$p=3$のとき，独裁者，拒否権を含めた不平等ルール(表1)を考え，その状態を図5と図6に示す．プレイヤー1はf_a, f_b, f_c, f_dの各ルールで拒否権をもつが，対応するv_nの極限値1への近づき方は独裁者f_aが顕著で，全員一致の場合が遅くなっている．

3.3 階層的なルール

複雑な構造をもっているので，くわしい解析はできないが，数値例から大体つぎのような傾向をもっている．

1段階決定のルール$f[p,r]=f[p,r]$ [1, 1]$=f$[1, 1][p, r] のいくつかのほうが2段階決定より有利（図7）．要するに，直接なもののほうが，自分の意見を反映できて期待利得が大きくなる．

4. あとがき

1次元の停止問題は歴史も古く多くの研究

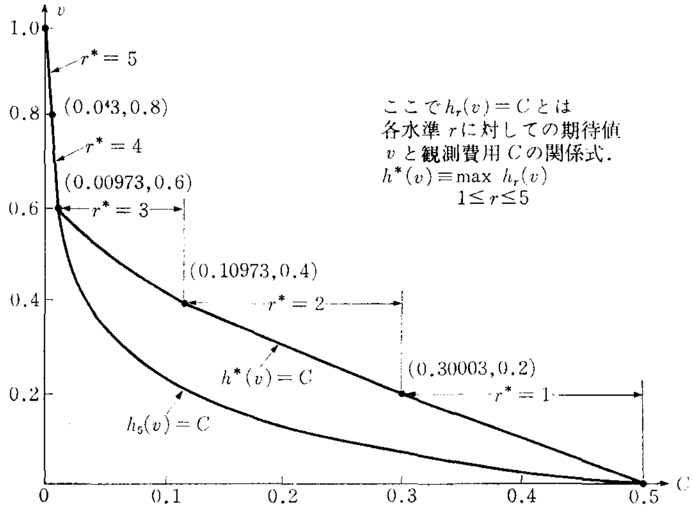


図4　無限期間問題における最適多数決水準 r^*

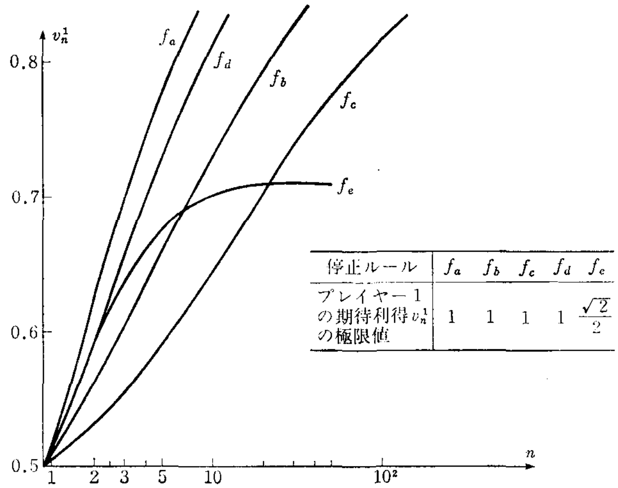


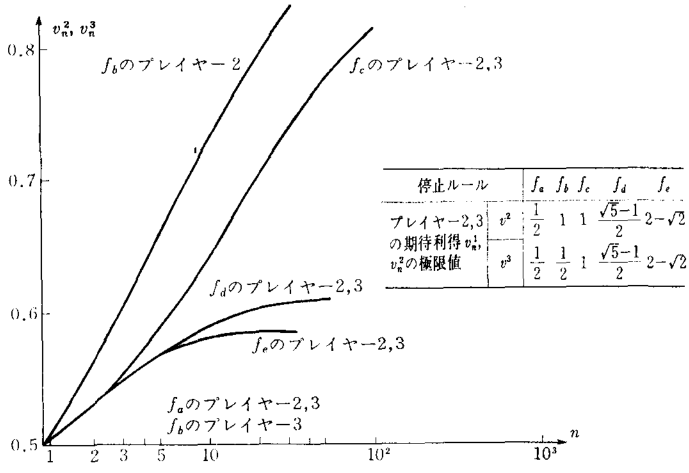
図5　不平等ルールにおけるプレイヤーの期待利得 $v^1{}_n$

表1　$p=3$のとき，不平等ルールの例

停止ルール f	f_a	f_b	f_c	f_d	f_e
	σ^1	$\sigma^1\cdot\sigma^2$	$\sigma^1\cdot\sigma^2\cdot\sigma^3$	$\sigma^1\cdot\sigma^2+\sigma^1\cdot\sigma^3$	$\sigma^1+\sigma^2\cdot\sigma^3$
性　質	プレイヤー1がただ1人拒否権をもつ独裁者．プレイヤー2，3はアウトサイダー．	プレイヤー1，2が拒否権をもつ．プレイヤー3はアウトサイダー．	プレイヤー1，2，3が拒否権をもつ．全員一致のルール．	プレイヤー1が拒否権をもつ．プレイヤー2，3は1と協力して停止できる．	プレイヤー1は強いが，プレイヤー2，3は互いに協力して停止できる．

があるが，多次元問題は始まったばかりである．[10]は決定ルールが全員一致の場合に均衡停止戦略を求めた．[４]，[５]，[６]は２節で述べた結果を導いている．よく知られている秘書選択の問題を多次元の変形としてグループ面接の例を述べているが，ここでは割愛した．われわれのモデルは個人の意見を同時に発表し集約するが，[11]，[３]はあらかじめ定められた先手後手の手順に従う場合を動的計画法で解析した．結果としては手順に無関係であり，２節と同じ再帰式を導いている．また[３]の Winning class は手順を除くと，単調論理ルールと同じであることを注意しておく．連続時間の場合，これと類似の議論もできるが，それはシステム全体が同時には停止していない[９]とは異なるモデルになる．

最後に，集団の意志決定ルールの公理的研究[７]，[２]からの検討も必要であろうし，利得の分配をしないことが本稿の前提であったが，ルールとともに停止時の分配方法を考えた協力ゲーム的接近は今後の課題としたい．



停止ルール		f_a	f_b	f_c	f_d	f_e
プレイヤー2,3の期待利得 v^1_n, v^2_n の極限値	v^2	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$2-\sqrt{2}$
	v^3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$2-\sqrt{2}$

図 6　不平等ルールにおけるプレイヤー2，3の期待利得 $v^2{}_n, v^3{}_n$

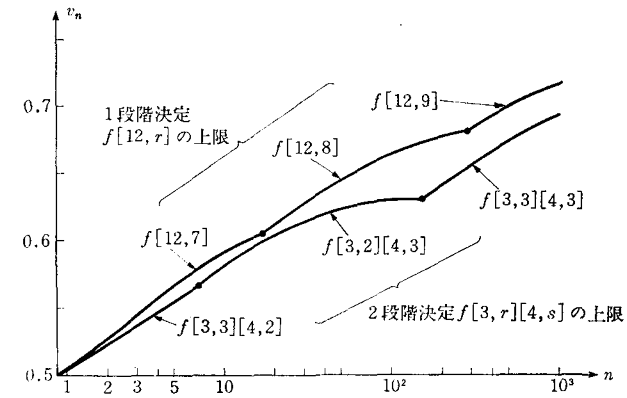


図 7　1段階決定と2段階決定の比較

参 考 文 献

[１] Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmund, D. : Great Expectations. Houghton Mifflin Co., Boston, 1971.

[２] Fishburn, P. S. : The Theory of Representative Majority Decision. *Econometrica*, **34** (1971), 273-284.

[３] Kadane, J. B. : Reversibility of a Multilateral Sequential Game: Proof of a Conjecture of Sakaguchi. *J. Op. Res. Soc. Japan*, **21** (1978), 509-516.

[４] 蔵野正美，安田正実，中神潤一：多次元確率変数の stopping problem について．OR 学会アブストラクト(1977年)．

[５] Kurano, M., Yasuda, M. and Nakagami, J. : Multivariate Stopping Problem with a Majority Rule(preprint), 1978.

[６] 安田正実，中神潤一，蔵野正美：Multivariate Stopping Problem with a Monotone Logical Rule. 京都大学数理解析研究所講究録(1979).

[７] Murakami, Y. : Formal Structure of Majority Decision, *Econometrica*, **34**(1966), 709-718.

[８] Nash, J. : Non-cooperative Game, *Ann. of Math.*, **54**(1951), 286-295.

[９] Presman, E. L. and Sonin, I. M. : Equilibrium Points in a Game related to the Best Choice Problem, *J. Prob. Appli.*, **20**(1975), 770-781.

[10] Sakaguchi, M. : Optimal Stopping in Sampling from a Bivariate Distribution, *J. Op. Res. Soc. Japan*, **16**(1973), 186-200.

[11] Sakaguchi, M. : A Bilateral Sequential Game for Sums of Bivariate Random Variables, *J.Op. Res. Soc. Japan*, **21**(1978), 486-508.

(くらの・まさみ，やすだ・まさみ，なかがみ・じゅんいち　千葉大学)