ストッピング・ルール

——問題の性質——

竹内　啓

1.　問題の一般的定式

世の中には，行動の中で情報を得ながら決定を下していかなければならない問題が多くある．しかもその場合，決定はその場で下さなければならず，いったん過ぎてしまったことをさかのぼってむし返すことはできないことが多い．このような問題を数学的に定式化したものが，逐次決定問題 sequential decision problem とよばれるものである．

さらにその中で，情報を取る過程と行動決定を行なう過程が明確に分かれていて，しかも行動決定は1回限りという種類の問題は，現実にもしばしば生ずるし，数学的にもとり扱いやすい．このような問題は一般的なストッピング・ルールの問題とよばれる．というのは，いつ観測をストップして決断を下すかが問題の焦点となるからである．

このような問題は一般につぎのように定式化することができる．まず，われわれはデータの系列，$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ を順に観測していくものとし，また各段階において「状態」を表わす変量 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ が存在するものとする．この量はなんらかの形でデータと結びついているが，それ自体は直接には観測されないものとする．われわれは各段階ごとに，データ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ にもとづいて，観測を続けるか，「決定」を下すかを決める．「決定」を下す場合には，可能な決定の集合 D の中の要素 d を選ぶ．そのとき得られる「利益」あるいは「効用」は，状態 Y_n と d とによって定まるから，それを $U(Y_n, d)$ と表わす．またそれまでに「観測」のために費用 c_n を要するものとする．問題は期待効用

$$E(U(Y_n, d)-c_n)$$

を最大にするような，行動決定のルールを求めることである．

ここで二つの場合が区別される．一つは Y_n の確率分布がわかっている，より厳密にいえば $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ の同時分布と，それらが与えられたときの Y_n の条件付分布がわかっている場合である．もう一つは，$X_1, \cdots, X_n, \cdots$ および Y_n の同時分布が未知の母数 θ に依存する場合である．前者を確率的，後者を統計的な問題とよぶことにしよう．

2.　確率的な問題

最初に確率的な問題から考えよう．

まず遅くとも N 回観測をするまでに決定を下さなければならない場合を考えよう．そうして，このときに得られる期待効用の最大値を v_N^* と表わすことにしよう．

また $X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n (n \leqq N)$ が観測されたときに期待される効用の最大値を，

$$v_{N,n}^*(x_1, \cdots, x_n)$$

と表わすことにする．そうすると明らかにつぎの関係式が成り立つ．

$$v_{N,N}^*(x_1, \cdots, x_N)$$

$$=\max_d E^{Y_N}\{U(Y_N,d)|X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N\}-c_n$$

ただし $E^Y\{\ |*\}$ は $*$ が与えられたときの Y の条件付期待値を表わすとする．そうして最適性の原理により，

$$v_{N,n}^*(x_1,\cdots,x_n)$$
$$=\max\left[\max_d E^{Y_n}\{U(Y_n,d)|X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}-c_n,\ E^{X_{n+1}}\{v_{N,n+1}^*(x_1,\cdots,x_n,X_{n+1})|X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}-c_{n+1}\right]$$
$$n=1,\cdots,N-1$$
$$v_N^*=E^{X_1}\{v_{N,1}^*(X_1)\}$$

が成り立つ．

v_N^* が（一般には $v_{N,n}^*$ が）N に関して単調増加になることは明らかである．そこで，

$$v^*=\lim_{N\to\infty}v_N^*$$

とおけば，v^* は決定を下すまでの観測回数に制限がない場合に獲得可能な効用の期待値の上限を与える．しかし実際にそのような値が達成可能であるとは限らない．

この場合，問題は基本的にＤＰの問題に帰着する．そこでＤＰの理論で扱われるような問題がここで生ずることになるが，それについてはここではふれない．

ただストッピング・ルールの問題とよばれるものの典型的な形においては，取られる「最終決定」の集合Dがただ一つの要素からなる場合も多い．そのような場合には，問題はいつ「観測」をやめて決定を下すかだけとなる．その場合dは決まっているから $U(Y_n,d)=U(Y_n)$ と表わしてもよい．さらに簡単に $U(Y_n)=Y_n$ としても一般性を失うことはない．したがってこの場合漸化式は，

$$v_{N,n}^*(x_1,\cdots,x_n)=\max\left[E\{Y_n|X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}-c_n,\ E^{X_{n+1}}\{v_{N,n+1}^*(x_1,\cdots,x_n,X_{n+1})|X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}-c_{n+1}\right]$$
$$v_N^*=E^{X_1}(v_{N,1}^*(X_1))$$

が成り立つ．

多くの問題において $X_1,\cdots,X_n$ が与えられたとき，X_{n+1} および Y_n の条件付分布が X_n にのみ依存することがある．このような場合は問題はマルコフ性をもつという．このとき，

$$\max_d E\{U(Y_n,d)|X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}$$
$$=\max_d E\{U(Y_n|d)|x_n\}$$

が成り立つ．したがって帰納的に，

$$v_{N,n}^*(x_1,\cdots,x_n)=v_{N,n}^*(x_n)$$
$$=\max\left[\max_d E\{U(Y_n|d)|x_n\}-c_n,\ E\{v_{N,n+1}^*(X_{n+1})|x_n\}-c_{n+1}\right]$$

となることが示されるから，計算は容易になる．

3. 簡単な例

ある人が自分のもっている商品（株式，土地等）を適当な時期に売ろうとしているとしよう．X_n を n 期におけるその商品の市場価格とする．したがってその人が第 n 期に売ることにしたとすれば，収入は $Y_n=X_n$ となる．目的はなるべく高い価格で売ることであるのはいうまでもない．いま $c_n=0$，すなわち売らないで待ちつづけることには費用がかからないものとする．そうするとまず，

$$v_{N,N}^*(x_1,\cdots,x_N)=x_N$$

である．つぎに，

$$v_{N,N-1}^*(x_1,\cdots,x_{N-1})$$
$$=\max\left[x_{N-1},\ E(X_N|x_1,\cdots,x_{N-1})\right]$$

となる．マルコフ性を仮定すれば，

$$E(X_N|x_1,\cdots,x_{N-1})=E(X_N|x_{N-1})=f(x_{N-1})$$

と表わすことができる．そうして，

$$v_{N,N-1}^*(x_1,\cdots,x_{N-1})=\max\{x_{N-1},f(x_{N-1})\}$$
$$=v_{N,N-1}^*(x_{N-1})$$

となる．以下同様にして，

$$v_{N,n}^*(x_1,\cdots,x_n)=v_{N,n}^*(x_n)$$
$$=\max\left[x_n,E\{v_{N,n+1}^*(X_{n+1})|X_n=x_n\}\right]$$

という形の漸近式が得られる．そうして第 n 期において，

$$x_n\geqq E\{v_{N,n+1}^*(X_{n+1})|X_n=x_n\}$$

となったならば，そのとき商品を売ればよいということになる．

さらに $X_1,\cdots,X_n$ が定常的，すなわち X_n を変えたときの X_{n+1} の条件付分布が n には依存しな

いとすれば，

$$v_{N,n}^*(x_1, \cdots, x_n)=g_{N-n}(x_n)$$

という形になり，また，

$$E\{v_{N,n+1}^*(X_{N+1})|X_N=x_n\}$$
$$=E\{g_{N-n-1}(X_{N+1})|x_n\}=f_{N-n-1}(x_n)$$

という形に表わすことができる．そうして，

$$g_k(x)=\max[x, f_{k-1}(x)]$$
$$g_0(x)=x$$
$$f_k(x)=E\{g_k(X_2)|X_1=x\}$$

という形で順次計算に進めることができる．この関係を一般に図示すれば図1のようになり，第 n 期において $X_n=c_{N-n}$ ならば商品を売ればよい．

ここで明らかに f_k, g_k は k に関して単調増加であり，c_k も単調に増加する．そうしてもし $k\to\infty$ のとき $f_k\to f^*$ となり，かつそれに対応して c_k もある一定の c^* に収束するならば $N\to\infty$ すなわち決定を下すまでの期間に制限がないときは，価格が c^* を越えたならば，その商品を売ることにすればよい．

具体的に c^* を求めるには数値計算によらねばならないが，$c_k\to\infty$ となる可能性もあるから，注意が必要である（このような場合には無期限の場合に最大の期待値を達成するような戦略は存在しない）．またもしつねに $E(X_2|X_1=x)>x$ であれば最初から $c_k=\infty$ となるから，なるべく長く売らないでいるのがよいことになる．さらに $E(X_2|X_1=x)\equiv x$ であれば（このとき $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ はマルチンゲールをなしているという），つねに $f_k(x)\equiv x$ であって，いつ売っても期待値に変りはないということになる．つまりどんな売り方をしても結果に影響はないことになる．マルチンゲールになるのは，たとえば $X_1, X_2, \cdots$ がランダムウォークの場合，すなわち $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ が互いに独立に平均0の分布に従うとして，

$$X_n=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n$$

と表わされる場合である．株式の価格はランダムウォークのように変動するといわれることがしばしばあるが，もしそうであれば，株式売買の最適

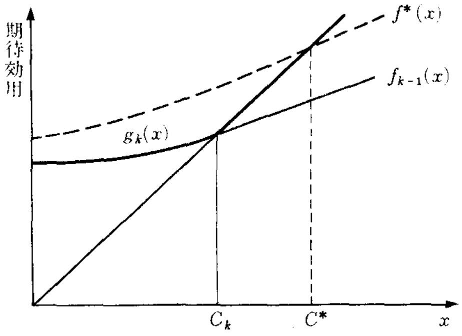


図 1

戦略は存在しない．

4. 統計的な問題

つぎに統計的な問題を考えよう．この場合には，$X_1, \cdots, X_n, Y_n$ の同時分布が未知の母数 θ をふくむから，決定 d をとったときの効用の条件付期待値

$$E_\theta\{U(Y_n, d)|X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n\}$$

も θ に依存する．したがってたとえこの期に決定を下すことにしたとしても，どの d を選ぶのが最適であるかという問題が残る．このような統計的逐次決定問題については，一般的な理論を構成することは難しい． A. Wald 以来抽象的な一般理論は作られているが，それを具体的な問題と結びつけて，具体的な答を出すことは困難である．

このような問題を一般的に扱うには，ベイジアン Bayesian の考え方による以外の方法はない．すなわち θ についてなんらかの事前分布 prior distribution を想定して，X, Y の同時分布を事前分布について平均して，それについて最適な戦略を考えるのである．そうすれば問題は形式的には未知母数をふくまない場合に帰着するから先に述べたのと同様にして解を求めることができる．すなわち $\xi(\theta)$ を θ の事前分布の密度とし，

$$p_n(x_1, \cdots, x_n, y_n, \theta)$$

を θ に対応する $X_1, \cdots, X_n, Y_n$ の同時分布の密度とすると，

$$\tilde{p}_n(x_1, \cdots, x_n, y_n)=\int p_n(x_1, \cdots, x_n, y_n, \theta)\xi(\theta)d\theta$$

が $X_1, \cdots, X_n, Y$ の同時密度になるから，これに関して問題を解けばよい．

ベイジアンの考え方については，統計的推測理論の観点からは，賛否いろいろな議論がある．とくに議論の焦点は事前分布をどのように定めたらよいかということであるが，しかしストッピング・ルールの形で扱われているような問題についてはθの大体の存在範囲についてなんらかの情報が存在する場合がむしろふつうであるし，また事前分布はある程度合理的な形に想定すれば，それがたとえ完全に妥当なものでなくてもベイズ的な方法によって得られる解は，十分よいものであることが多いから，ベイジアンの考え方を採用するのが一般に適当であるといってよい．ただし得られた解の妥当性を十分吟味するためには，事前分布をただ一つ想定して解を求めるのではなく，事前分布をいろいろ変えた場合に解がどのように変化するか，またベイズ解の与える効用の期待値が，θのいろいろな値に対してどのようになっているかをチェックすることは必要である．

ベイジアンの考え方以外にも，特定の問題については別の接近も可能なこともある．また効用の期待値のθに関する最小値を最大にするような解，いわゆるミニマックス解を求めることも考えられる．しかし一般にはミニマックスの考え方はあくまで現実的でないことが多い．

5.　2節の例の続き

統計的な問題の最も簡単な例として，先に考えた「商品を適当な時期に売る」問題を考えよう．ただし今度は $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ は互いに独立に同じ分布に従うものとする．そうしてその分布は未知の母数 θ (平均)をふくみ $p(x-\theta)$ を密度関数にもつと仮定する．

先の場合と同じ記号を用いると，まず N 期までに決定を下さなければならないとすると，

$$v_{N,N}^*(x_1, \cdots, x_N)=x_N$$

には変りはない．ところが，

$$E_\theta(X_N|X_1=x_1, \cdots, X_{N-1}=x_{N-1})=\theta$$

であって，θは未知であるから，これから先はすでに述べた方法は使えない．

そこでいま事前分布の密度として $\xi(\theta)$ を想定すると，$X_1, \cdots, X_N$ の同時分布が，

$$\tilde{p}(x_1, \cdots, x_N)=\int\prod_i p(x_i-\theta)\xi(\theta)d\theta$$

で与えられるから，条件付期待値は，

$$\begin{aligned}&\tilde{E}(X_N|X_1=x_1, \cdots, X_{N-1}=x_{N-1})\\&=\int x_N\tilde{p}(x_1, \cdots, x_N)dx_N\Big/\int\tilde{p}(x_1, \cdots, x_N)dx_N\\&=\int\theta\prod_{i=1}^{N-1}p(x_i-\theta)\xi(\theta)d\theta\Big/\int\prod_{i=1}^{N-1}p(x_i-\theta)\xi(\theta)d\theta\end{aligned}$$

となる．これは一般には $x_1, \cdots, x_{N-1}$ のすべてをふくみ，したがってもはやここではマルコフ性が成り立たないことに注意しよう．そうして，

$$\begin{aligned}&v_{N,N-1}^*(x_1, \cdots, x_{N-1})\\&=\max\{x_{N-1},\\&\qquad\tilde{E}(X_N|X_1=x_1, \cdots, X_{N-1}=x_{N-1})\}\end{aligned}$$

となる．

以下順次帰納的に $v_{N,n}^*(x_1, \cdots, x_n)$ を計算してゆくことができるが，マルコフ性がないために計算はかなり面倒になる．

ただしここで $X_1, \cdots, X_N$ がθを与えたとき，平均θ，分散1の正規分布に従うものとし，またθの事前分布として，平均0分散 τ^2 の正規分布を想定すれば，

$$\tilde{E}(X_N|X_1=x_1,\cdots,X_{N-1}=x_{N-1})=\frac{n\tau^2}{n\tau^2+1}\bar{x}_{N-1}$$

ただし，

$$\bar{x}_{N-1}=\frac{1}{N-1}(x_1+\cdots+x_{N-1})$$

訂　　正

5月号の特集――プレゼンテーション――の中に誤りがありました．柳井　浩氏の「リフレクション・チャート」で，247ページの図1.1と図1.2が逆になっていました．製作上の手違いにより，著者および読者の皆様方にご迷惑をおかけしましたことをおわびして，訂正いたします．　　　　（編集委員会）

となるから $v_{N,N-1}^*(x_1, \cdots, x_{N-1})$ は簡単な形で表わされる．さらに一般に $X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n$ が与えられたとき X_{n+1} の条件付分布は，平均が

$$n\tau^2\bar{x}_n/(n\tau^2+1)$$

分散が

$$(1+\tau^2)/(n\tau^2+1)$$

の正規分布になることが容易にわかるから，一般に，

$$v_{N,n}^*(x_1, \cdots, x_n)=v_{N,n}^*(\bar{x}_n)$$

という形になることが帰納的に示される．そうして，

$$v_{N,n}^*(\bar{x}_n)=\max\left[x_n, \tilde{E}(v_{N,n+1}^*(\bar{X}_{n+1})\,|\,X_n=\bar{x}_n)\right]$$

において，

$$\bar{X}_{n+1}=\frac{1}{n+1}(n\bar{X}_n+X_{n+1})$$

の関係を利用して $v_{N,n}^*$ を順次に計算してゆくことができる．

むすび

ストッピング・ルールの問題の面白さと重要性は一般理論よりも，個々の具体的な例の定式化の面白さと，解を求める際の計算の手続きの工夫とにある．たとえばこの種の問題の最も旧い例といえるWaldの逐次検定においては逐次確率比検定方式という，解の構造の簡明さと，それを導く理論の「鮮かさ」がその主要な魅力であった．また後に説明されている「秘書えらびの問題」においては，日常しばしば生ずるような問題をうまく定式化したところに面白さがある．そのような「面白い」例については，この号の各氏の稿を通じて味わっていただきたいと思う．

（たけうち・けい　東京大学経済学部）

数理パズルを楽しもう（20）

〔**5月号（290頁）の解答**〕 正八角形の8辺と20本の対角線に対する7色の塗り分けは図8のようにすればできる．どの2色を交互にたどっても，8個の頂点を1度ずつ通って元にもどることは，具体的に調べれば確かめられる．これ以外にも，いろいろの塗り方があるが，8個の点の順序を適当に入れかえたり，7種類の色をうまく付けかえると，すべて図の塗り分けに帰着される．つまり，本質的には1通りの塗り分けが可能である．この塗り分けは，つぎのようにして作ったものである．

8個の頂点に0～7の番号をつけ，頂点 i と頂点 j を結ぶ辺（または対角線）の色を $N(i, j)$ で表わす．すると，

$N(i, j)\equiv i+j\,(\mathrm{mod}.\,7)$，$i\neq 0$，$j\neq 0$ のとき

$N(i, 0)\equiv 2i\,(\mathrm{mod}.\,7)$

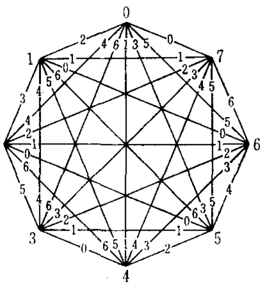
である．この方法は，p を勝手な奇素数とするとき，

$N(i, j)\equiv i+j\,(\mathrm{mod}.\,p)$，$i\neq 0$，$j\neq 0$ のとき

$N(i, 0)\equiv 2i\,(\mathrm{mod}.\,p)$

とおくことによって，正 n 角形（$n=p+1$）にも拡張できる．しかし，それ以外の正多角形には適用できない．現在，塗り分けが解明されている正 n 角形は，

$n=p+1$，$n=2p$



のときだけであるが[1]，n が小さい場合をコンピュータで調べると，すべての偶数角形について解が求められる．ただ残念ながら，理論的には未解決である．

［1］ 中村義作，“デュードニーの円卓問題と完全グラフの色分け”，数学セミナー，2月号(1975)，24-29.

――・――・――・――・――・――

20回にわたって連載してきた数理パズルも，ひとまず今回で終わりとする．ご愛読をいただいた読者諸兄に，心から感謝する次第である．

（中村義作　信州大学工学部）